ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2004–1
ОАФ

В.В. Ежела

ИЗОМЕРНАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ ГРАФОВЫХ СТРУКТУР

I. Псевдооргграфы

Направлено в *"Дискретная математика"*

Протвино 2004

УДК 519.1 М–24

Аннотация

Ежела В.В. Изомерная стабильность графовых структур. I. Псевдоорграфы: Препринт ИФВЭ 2004–1. – Протвино, 2004. – 17 с., библиогр.: 18.

В теории графов рассмотрены преобразования переключения однотипных связей и введено отношение изомерной эквивалентности графовых объектов, по которому множества графовых объектов группируются в изомерные классы. Выделены интересные изомерно-стабильные классы, в которых все представители связны. Изомерно стабильные классы в множестве всех изомерных классов однтипных графовых структур аналогичны простым числам в множестве натуральных чисел. Каждый изомерный класс либо изомерно стабилен либо восстанавливается переключениями однотипных связей из представителей объединения соответствующих изостабильных классов.

Ключевые слова и фразы: степенные последовательности, связность, графы и матрицы, структурная характеризация типов графов, структура-свойство, изомерная стабильность графовых структур.

Abstract

Ezhela V.V. Isomeric Stability of Graph Structures. I. Pseudodigraphs: IHEP Preprint 2004–1. – Protvino, 2004. – p. 17, refs.: 18.

Isomeric transformations of graph structures under admissible reconnections of edges is considered. Isomeric equivalence relation on the graph structures is introduced. Interesting isomeric-stable classes of graph structures are discovered. Isomeric-stable class is a class of connected graph structures any pair of which are connected by a special chain of isomeric transformations. It us proposed that isomeric-stable classes are the prime classes of graph structures analogous to the prime integers. Any isomeric class of graph structures is either isomeric-stable or can be reconstructed from a set of disjoint isomeric-stable classes by the admissible reconnections of edges.

Key words and phrases: 05C07 Degree sequences, 05C40 Connectivity, 05C50 Graphs and matrices, 05C75 Structural characterization of types of graphs, Structure-property, Isomeric stability of graph structures.

Введение

Графовые структуры — графы, мультиграфы, псевдографы и их ориентированные или нагруженные вариации — являются адекватными математическими конструкциями, моделирующими схемы связей и взаимодействий элементов реальных систем. Многие свойства моделируемых систем часто объясняются свойствами соответствующих графовых структур. Это, по-видимому, и определяет интерес исследователей разных профилей к изучению их математических свойств.

Одним из основных свойств графовых структур, моделирующих реальные системы, является их связность как отражение целостности исследуемой системы. Мы будем называть графовую структуру несвязной, если множество ее вершин является объединением двух непересекающихся подмножеств (компонент) таких, что нет ни одной связи между вершинами из разных компонент.

Среди систем, в которых возможны "структурные переходы," интересны системы, остающиеся целостными при любых допустимых структурных перестройках, т.е. системы, не теряющие свойство связности при изменении организации связей между составляющими систему элементами.

Представляется правдоподобной и увлекательной гипотеза о существовании корреляций некоторых свойств реальных систем и процессов со свойствами стабильности или нестабильности моделирующих их графовых структур при "минимальных" структурных преобразованиях, не изменяющих число составляющих элементов, число связей и их типы. Простейшими такими структурными преобразованиями являются последовательные переключения пар однотипных связей $\boldsymbol{ab, cd \to ac, bd}$ или $\boldsymbol{ab, cd \to ad, bc}$ между элементами (вершинами) $\boldsymbol{a, b, c, d}$.

При переключениях связей (ребер или дуг) графовой структуры возникают другие графовые структуры, не всегда изоморфные исходной, но с тем же набором вершин и их атрибутов. Графовые структуры, получающиеся одна из другой последовательными переключениями связей, будем называть изомерами (или изомерными) по аналогии с изомерами в химии и физике. Легко проверить, что изомерия однотипных графовых структур (графы, орграфы, мультиграфы,...) есть отношение эквивалентности, и, следовательно, каждое множество однотипных графовых структур можно представлять как объединение непересекающихся классов смежности (изомерных классов) по отношению изомерии. Другими словами, изомерные графовые структуры образуют изомерные классы, замкнутые относительно преобразований переключения связей.

Легко видеть, что переключения связей могут переводить связные графовые структуры в несвязные и обратно. Если каждый представитель изомерного класса графовых структур связен, то мы будем называть такой класс изомерно стабильным (или для краткости изостабильным). Если изомерный класс имеет несвязного представителя, то он по определению неизостабилен.

Изомерия графовых структур изучается и используется в теории графов давно, (см., например, работу Джеймса К. Сениора [1], в которой, по-видимому, впервые операция переключения (transfusion) связей использовалась как эффективный инструмент конструктивных доказательств утверждений в теории графов[1], однако классификация графовых структур по свойству стабильности ранее не рассматривалась).

Настоящая работа посвящена характеризации изостабильных классов псевдоорграфов — ориентированных псевдографов (псевдограф — это графовая структура, у которой допускаются кратные ребра и кратные петли). Используемые в работе теоретико-графовые термины в основном соответствуют терминологии, принятой в книгах [4], [5], [6], [7].

1. Псевдоорграфы и их матрицы смежности

1.1. Уравнения для матриц смежности псевдоорграфов

Каждая квадратная $n \times n$ целочисленная матрица A_{ij} с неотрицательными матричными элементами является матрицей смежности помеченного ориентированного псевдографа $P(A)$ с n вершинами. Значение A_{ij} определяет число дуг, направленных из вершины i в вершину j, и, таким образом, каждый диагональный элемент A_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ определяет число “направленных” петель, инцидентных вершине i. Транспонированная матрица A^T описывает псевдоорграф $P(A^T)$, у которого направления всех дуг изменены на обратные по отношению к ориентациям в $P(A)$.

Сумма элементов матрицы A по строкам

$$O_i = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha} \tag{1}$$

определяет полустепени исхода вершины i, а такая же сумма по столбцам

$$I_i = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha i} \tag{2}$$

определяет полустепени захода вершины i.

Таким образом, каждой неотрицательной целочисленной матрице A_{ij} соответствует псевдоорграф с n вершинами, описываемыми набором двумерных целочисленных неотрицательных векторов полустепеней

$$\vec{d}_1 = (O_1, I_1), \ \ldots, \ \vec{d}_n = (O_n, I_n)$$

[1] См. также работы Л.С. Хакими [2], где операция переключения связей названа d-преобразованием, а соответствующие классы графовых структур, связанных d-преобразованиями, — d-инвариантными классами, и Г.Дж. Райзера [3], где переключения называются заменами.

таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} O_i = \sum_{i=1}^{n} I_i \ . \tag{3}$$

Первые два соотношения между матричными элементами матрицы смежности псевдоорграфа и полустепенями его вершин можно рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных матричных элементов при заданных векторах полустепеней вершин. Соотношение (3) является условием совместности систем уравнений (1) и (2), которые мы объединим в одну систему и запишем ее в более обозримом и более наглядном для дальнейших построений виде:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_{11} & + & A_{12} & + & A_{13} & +\ldots+ & A_{1n} & = & O_1 \\
+ & & + & & + & & + & & + \\
A_{21} & + & A_{22} & + & A_{23} & +\ldots+ & A_{2n} & = & O_2 \\
+ & & + & & + & & + & & + \\
A_{31} & + & A_{32} & + & A_{33} & +\ldots+ & A_{3n} & = & O_3 \\
+ & & + & & + & & + & & + \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
+ & & + & & + & & + & & + \\
A_{n1} & + & A_{n2} & + & A_{n3} & +\ldots+ & A_{nn} & = & O_n \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
I_1 & + & I_2 & + & I_3 & +\ldots+ & I_n & = & L
\end{array} \tag{4}$$

где L — число дуг, включая и петли.

Система (4) для заданных $\vec{d_j} = (O_j, I_j)$ и $n > 1$ имеет в общем случае много решений. В самом деле, разность числа неизвестных и числа независимых уравнений равна $(n-1)^2$. Множество $P(\vec{d_1}, \ldots, \vec{d_n})$ неотрицательных целочисленных решений ограничено, $0 \le A_{ij} \le \min(O_i, I_j)$ для $1 \le (i,j) \le n$ и описывается независимыми целочисленными параметрами в количестве $(n-1)^2$. Каждое решение определяет некоторый помеченный псевдоорграф.

Из теории систем линейных уравнений известно, что любое решение неоднородной линейной системы представимо в виде суммы некоторого частного решения неоднородной системы и соответствующего решения однородной системы. Опишем сначала процедуру построения “канонического” частного решения системы (4).

1.2. Частное решение неоднородной системы

Шаг 1. Отметим прежде всего, что если $O_j = I_j$ для всех $j = 1, \ \ldots, \ n$, то каноническое частное решение — это диагональная матрица с $A_{jj} = O_j$. Далее будем рассматривать случай, когда $O_j \ne I_j$ для любого j, так как если есть некоторое количество “симметричных” векторов, то каноническое решение будет иметь блочный вид с диагональным блоком, соответствующим симметричным векторам полустепеней.

Обозначим $M_{jj} = \min(O_j, I_j)$ и рассмотрим разности векторов полустепеней вида

$$(O_j, I_j) - (M_{jj}, M_{jj}) = (\Delta O_j, \delta I_j).$$

Легко видеть, что каждый вектор-остаток имеет только одну ненулевую компоненту и, по-прежнему,

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta O_i = \sum_{i=1}^{n} \delta I_i. \tag{5}$$

Не нарушая общности, можно считать, что векторы полустепеней упорядочены так, что первые k векторов-остатков имеют только полустепени исхода, которые убывают по величине с возрастанием номера, а остальные $n-k$ имеют только полустепени захода, которые также убывают с возрастанием номера, т.е.

$$(\Delta O_1, 0),\ \ldots,\ (\Delta O_k, 0),\ (0, \delta I_{k+1}),\ \ldots,\ (0, \delta I_n).$$

Будем также считать для определенности, что $\Delta O_1 > \delta I_{k+1}$. Это всегда можно сделать перенумерацией рядов исходной матрицы, переходя при необходимости к транспонированной матрице (смене ориентации сразу всех дуг псевдоорграфа).

Будем строить частное решение в виде

$$A_{ij} = M_{jj}\delta_{ij} + a_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кроннекера, а матрица a_{ij} является решением системы уравнений:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & +\ldots+ & a_{1k} & + & a_{1(k+1)} & +\ldots+ & a_{1n} & = & \Delta O_1 \\
+ & & + & & + & & + & & + \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
+ & & + & & + & & + & & + \\
a_{k1} & +\ldots+ & a_{kk} & + & a_{k(k+1)} & +\ldots+ & a_{kn} & = & \Delta O_k \\
+ & & + & & + & & + & & + \\
a_{(k+1)1} & +\ldots+ & a_{(k+1)k} & + & a_{(k+1)(k+1)} & +\ldots+ & a_{(k+1)n} & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & + \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
+ & & + & & + & & + & & + \\
a_{n1} & +\ldots+ & a_{nk} & + & a_{n(k+1)} & +\ldots+ & a_{nn} & = & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
0 & +\ldots+ & 0 & + & \delta I_{k+1} & +\ldots+ & \delta I_n & = & \Delta L
\end{array} \tag{6}$$

где $\Delta L \neq 0$ — число дуг, исходящих из первых k вершин и входящих в остальные $n-k$ вершин. Так как все $a_{ij} \geq 0$, то матрица a_{ij} имеет следующий блочный вид:

$$\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & a_{1(k+1)} & \ldots & a_{1n} \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & a_{k(k+1)} & \ldots & a_{kn} \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix} \tag{7}$$

ненулевой блок которой удовлетворяет редуцированной системе уравнений:

$$\begin{array}{ccccc} a_{1(k+1)} & +\ldots+ & a_{1n} & = & \Delta O_1 \\ + & & + & & + \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ + & & + & & + \\ a_{k(k+1)} & +\ldots+ & a_{kn} & = & \Delta O_k \\ \| & & \| & & \| \\ \delta I_{k+1} & +\ldots+ & \delta I_n & = & \Delta L \end{array} \tag{8}$$

Система (8) совместна и всегда имеет целые неотрицательные решения, так как число неизвестных больше числа уравнений

$$k(n-k)-(k+n-k-1)=(k-1)(n-k-1)\geq 0$$

для любого $1\leq k\leq n-1$.

$\boxed{\textbf{Шаг 2.}}$ Если некоторая остаточная полустепень исхода совпадает с остаточной полустепенью захода, например $\Delta O_\alpha=\delta I_\beta=m_{\alpha\beta}$, то, полагая $a_{ij}=0$ для $(ij)\neq(\alpha\beta)$ и $a_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}$, можно редуцировать систему (8) далее.

$\boxed{\textbf{Шаг 3.}}$ На этом шаге будем считать, что система (8) уже таким образом редуцирована и у нее более нет совпадающих полустепеней исхода и захода. Так как по соглашению $\Delta O_1>\delta I_{k+1}$, то положим в (8) $a_{1(k+1)}=\delta I_{k+1}$, и тогда система (8) перейдет в аналогичную систему с меньшим числом неизвестных:

$$\begin{array}{ccccccc} \delta I_{k+1} & + & a_{1(k+2)} & +\ldots+ & a_{1n} & = & \Delta O_1 \\ + & & + & & + & & + \\ 0 & + & a_{2(k+2)} & +\ldots+ & a_{2n} & = & \Delta O_2 \\ + & & + & & + & & + \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ + & & \cdot & & + & & + \\ 0 & + & a_{k(k+2)} & +\ldots+ & a_{kn} & = & \Delta O_k \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ \delta I_{k+1} & + & \delta I_{(k+2)} & +\ldots+ & \delta I_n & = & \Delta L \end{array} \tag{9}$$

$\boxed{\textbf{Шаг 4.}}$ Если $\Delta O_1-\delta I_{k+1}$ совпадает по величине с какой-либо остаточной степенью захода, то система (9) редуцируется по процедуре второго шага к аналогичной системе с меньшим числом переменных, у которой набор полустепеней исхода не пересекается с набором полустепеней захода.

$\boxed{\textbf{Шаг 5.}}$ Если у редуцированной на четвертом шаге системы первая полустепень исхода больше (меньше) первой полустепени захода, то редукцию проводим так же, как на шаге 3, по первому столбцу (первой строке).

Легко видеть, что, повторяя шаги 2 – 4, мы получаем далее после исчерпания размерности исходной системы выделенное, частное решение исходной системы. Это решение выделенно тем, что имеет максимально допустимые значения диагональных элементов и минимальное число ненулевых недиагональных элементов. По построению оно имеет "канонический" вид:

$$\boldsymbol{A_{ij} = M_{jj}\delta_{ij} + a_{ij}}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\delta_{ij}}$ — символ Кроннекера, а $\boldsymbol{a_{ij}}$ — матрица смежности ориентированного двудольного мультиграфа, у которого в одной доле вершины имеют только полустепени исхода, а в другой — только полустепени захода. Такие двудольные мультиорграфы будем называть поляризованными.

1.3. Общее решение однородной системы

Рассмотрим теперь однородную систему:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{A_{11}} & + & \boldsymbol{A_{12}} & + & \boldsymbol{A_{13}} & +\ldots+ & \boldsymbol{A_{1n}} & = & \boldsymbol{0} \\
+ & & + & & + & & + & & \\
\boldsymbol{A_{21}} & + & \boldsymbol{A_{22}} & + & \boldsymbol{A_{23}} & +\ldots+ & \boldsymbol{A_{2n}} & = & \boldsymbol{0} \\
+ & & + & & + & & + & & \\
\boldsymbol{A_{31}} & + & \boldsymbol{A_{32}} & + & \boldsymbol{A_{33}} & +\ldots+ & \boldsymbol{A_{3n}} & = & \boldsymbol{0} \\
+ & & + & & + & & + & & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
+ & & + & & + & & + & & \\
\boldsymbol{A_{n1}} & + & \boldsymbol{A_{n2}} & + & \boldsymbol{A_{n3}} & +\ldots+ & \boldsymbol{A_{nn}} & = & \boldsymbol{0} \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \\
\boldsymbol{0} & & \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{0} & &
\end{array} \tag{11}$$

Множество целочисленных решений системы (11) является линейным множеством над целыми числами, т.е. если $\boldsymbol{A_{\alpha\beta}}$ и $\boldsymbol{B_{\alpha\beta}}$ — два решения системы (11), то

$$\boldsymbol{M \cdot A_{\alpha\beta} + N \cdot B_{\alpha\beta}}$$

тоже есть целочисленное решение системы (11), если $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ — целые числа.

Легко видеть, что матрицы

$$\boldsymbol{(E^{ij}_{kl})_{\alpha\beta}} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \text{для} \quad \boldsymbol{\alpha\beta \neq ik, il, jk, jl} \\ \boldsymbol{-1} & \text{для} \quad \boldsymbol{\alpha\beta = ik} \\ \boldsymbol{+1} & \text{для} \quad \boldsymbol{\alpha\beta = il} \\ \boldsymbol{+1} & \text{для} \quad \boldsymbol{\alpha\beta = jk} \\ \boldsymbol{-1} & \text{для} \quad \boldsymbol{\alpha\beta = jl} \end{cases} \tag{12}$$

где $\boldsymbol{1 \leq i, j, k, l \leq n}$ являются решениями системы с минимально возможным числом ненулевых матричных элементов.

Представим их в более наглядном и более удобном для дальнейших рассуждений виде:

$$
(E^{ij}_{kl})_{\alpha\beta} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} {} \\ {} \\ {} \\ {} \\ k \\ {} \\ {} \\ {} \\ {} \\ l \\ {} \\ {} \\ {} \\ {} \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & \dots & . & 0 & . & \dots & . & 0 & . & \dots & 0 \\
. & & & . & & & & . & & & . \\
. & & & . & & & & . & & & . \\
. & & . & 0 & . & & . & 0 & . & & . \\
0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & +1 & 0 & \dots & 0 \\
. & & . & 0 & . & & . & 0 & . & & . \\
. & & & . & & & & . & & & . \\
. & & & . & & & & . & & & . \\
. & & . & 0 & . & & . & 0 & . & & . \\
0 & \dots & 0 & +1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
. & & . & 0 & . & & . & 0 & . & & . \\
. & & & . & & & & . & & & . \\
. & & & . & & & & . & & & . \\
0 & \dots & . & 0 & . & \dots & . & 0 & . & \dots & 0
\end{pmatrix}
\end{array} \qquad (13)
$$

Можно показать (см. далее), что набор $(n-1)^2$ матриц $E^{i(i+1)}_{j(j+1)}$ является линейным базисом в множестве целочисленных решений системы (11), и общее решение ее можно представить в виде

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1}^{n-1} Z^i_j \cdot (E^{i(i+1)}_{j(j+1)})_{\alpha\beta},$$

где Z^i_j — любые целые числа.

1.4. Канонический линейный базис целочисленных решений

Существуют $n^2(n-1)^2/4$ фундаментальных решений системы (11) вида $(E^{i<j}_{k<l})_{\alpha\beta}$, описанного в разделе 1.2, однако только $(n-1)^2$ из них линейно независимы. Покажем, что в качестве полной линейно независимой системы фундаментальных решений действительно может быть взята система матриц

$$E^{i(i+1)}_{j(j+1)},$$

где $1 \le i, j \le n-1$. Доказательство будем проводить по индукции. Для $n = 1$ утверждение справедливо, так как имеется только тривиальное решение $A_{11} = 0$. Для $n = 2$ система

$$
\begin{array}{ccccc}
A_{11} & + & A_{12} & = & 0 \\
+ & & + & & \\
A_{21} & + & A_{22} & = & 0 \\
\| & & \| & & \\
0 & & 0 & &
\end{array} \qquad (14)
$$

имеет единственное решение

$$A = Z \cdot E^{12}_{12} = Z \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

где Z — целое число. Предположим, что утверждение справедливо для матриц $\boldsymbol{n \times n}$, и покажем, что оно справедливо и для матриц $\boldsymbol{(n+1) \times (n+1)}$.

Пусть $\boldsymbol{C_{\alpha\beta}^{(n+1)}}$ — решение системы

$$
\begin{array}{ccccccccc}
C_{11} & + & C_{12} & + & C_{13} & + \dots + & C_{1(n+1)} & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & \\
C_{21} & + & C_{22} & + & C_{23} & + \dots + & C_{2(n+1)} & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & \\
C_{31} & + & C_{32} & + & C_{33} & + \dots + & C_{3(n+1)} & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & \\
. & & . & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . & & . \\
+ & & + & & + & & + & & \\
C_{(n+1)1} & + & C_{(n+1)2} & + & C_{(n+1)3} & + \dots + & C_{(n+1)(n+1)} & = & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \\
0 & & 0 & & 0 & \dots & 0 & &
\end{array}
\tag{16}
$$

Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{D^{(n+1)}}$ размерности $\boldsymbol{(n+1) \times (n+1)}$ следующего вида:

$$
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & -C_{1(n+1)} & C_{1(n+1)} \\
0 & \dots & 0 & -C_{2(n+1)} & C_{2(n+1)} \\
. & & . & . & . \\
. & & . & . & . \\
. & & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & -C_{(n-1)(n+1)} & C_{(n-1)(n+1)} \\
-C_{(n+1)1} & \dots & -C_{(n+1)(n-1)} & -C_{(n+1)n} - C_{n(n+1)} - C_{(n+1)(n+1)} & C_{n(n+1)} \\
C_{(n+1)1} & \dots & C_{(n+1)(n-1)} & C_{(n+1)n} & C_{(n+1)(n+1)}
\end{pmatrix}
$$

которая, как легко видеть, является решением системы (16). У нее последние столбец и строка совпадают с последними столбцом и строкой матрицы $\boldsymbol{C^{(n+1)}}$.

Так как $\boldsymbol{C^{(n+1)} - D^{(n+1)}}$ — это матрица, у которой последний столбец и последняя строка нулевые, и она является решением однородной системы, то по предположению индукции она представима в виде разложения по каноническому базису из матриц размерности $\boldsymbol{n \times n}$, дополненных нулевыми последними столбцом и строкой до размерности $\boldsymbol{(n+1) \times (n+1)}$.

Легко убедиться непосредственной проверкой, что имеет место равенство

$$
\begin{aligned}
D^{(n+1)} \;=\; & -C_{(n+1)(n+1)} \cdot E_{(n)(n+1)}^{(n)(n+1)} \\
& -(C_{(n+1)(n+1)} + C_{n(n+1)}) \cdot E_{(n-1)n}^{(n)(n+1)} \\
& -(C_{(n+1)(n+1)} + C_{(n+1)n)}) \cdot E_{(n)(n+1)}^{(n-1)n} \\
& -(C_{(n+1)(n+1)} + C_{n(n+1)} + C_{(n-1)(n+1)}) \cdot E_{(n-2)(n-1)}^{(n)(n+1)} \\
& -(C_{(n+1)(n+1)} + C_{(n+1)n)} + C_{n+1)(n-1)}) \cdot E_{(n)(n+1)}^{(n-2)(n-1)} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& -(C_{(n+1)(n+1)} + \dots + C_{2(n+1)}) \cdot E_{12}^{n(n+1)} \\
& -(C_{(n+1)(n+1)} + \dots + C_{(n+1)2}) \cdot E_{n(n+1)}^{12}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

а это и есть разложение матрицы $\boldsymbol{D^{(n+1)}}$ по матрицам канонического базиса размерности $\boldsymbol{(n+1)\times(n+1)}$.

Таким образом, мы показали, что для любой размерности $\boldsymbol{n}$ последовательные матрицы фундаментальных решений

$$\boldsymbol{E^{i(i+1)}_{j(j+1)}},$$

где $\boldsymbol{1 \le i, j \le (n-1)}$, образуют полный линейный базис в множестве целочисленных решений однородной системы уравнений (11).

2. Изостабильность изомерных классов псевдоорграфов

Матрицы (13) фундаментальных решений однородной системы (11) имеют простую интерпретацию в терминах изомерных преобразований псевдоорграфов.

Как показано ранее, для заданного набора векторов полустепеней система уравнений связи полустепеней с матричными элементами матриц смежности, вообще говоря, имеет несколько решений. С помощью матриц фундаментальных решений однородной системы их можно переводить друг в друга. В самом деле, пусть неотрицательная матрица $\boldsymbol{A_{\alpha\beta}}$ есть некоторое решение системы (4). Матрица

$$\boldsymbol{\tilde{A}^{\epsilon}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + \epsilon \cdot (E^{ij}_{kl})_{\alpha\beta}}, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{\epsilon = \pm 1}$, тоже является решением системы (4) и матрицей смежности некоторого, вообще говоря, другого псевдоорграфа с теми же наборами векторов полустепеней при условии, что преобразованная таким образом матрица остается неотрицательной.

На языке схем псевдоорграфов это преобразование означает переключение двух дуг без изменения структуры полустепеней[2].

В самом деле, если в исходном псевдоорграфе имеются дуги $\boldsymbol{i \to k}$ и $\boldsymbol{j \to l}$, то добавление к его матрице смежности матрицы $\boldsymbol{E^{ij}_{kl}}$ приведет к матрице смежности псевдоорграфа, отличающегося от исходного заменой этих дуг на дуги $\boldsymbol{i \to l}$ и $\boldsymbol{j \to k}$, а это и есть переключение.

В дальнейшем всякое преобразование (18) будем называть допустимым переключением в классе псевдоорграфов, если оно переводит неотрицательную матрицу в другую неотрицательную матрицу.

Итак, мы показали, что набор двухкомпонентных целочисленных векторов полустепеней исхода и захода

$$\boldsymbol{\vec{d_i} = (O_i, I_i), \quad 1 \le i \le n, \qquad \sum_i^n O_i = L = \sum_i^n I_i}$$

определяет один и только один изомерный класс помеченных псевдоорграфов с $\boldsymbol{L}$ дугами.

Из структуры общего решения для матриц смежности при заданных полустепенях следует, что весь изомерный класс восстанавливается переключениями из канонического частного решения (10), представляющего собой объединение поляризованного двудольного

[2]Отметим, что полученное выше утверждение о том, что матрицы смежности любых двух псевдоорграфов из одного и того же изомерного класса связаны цепочкой переключений, есть парафраз теоремы Райзера о заменах [3].

мультиорграфа с несколькими одновершинными псевдоорграфами. Так как переключения петель могут только уменьшить число несвязных компонент, то изомерная стабильность или нестабильность всего изомерного класса псевдоорграфов определяется изостабильностью поляризованного двудольного мультиорграфа. Если канонический, поляризованный по построению мультиорграф несвязен, то весь класс псевдоорграфов, восстанавливаемый переключениями из канонического представителя, изомерно нестабилен. Таким образом, задача характеризации изостабильности псевдоорграфов свелась к аналогичной задаче для изомерных классов поляризованных двудольных мультиорграфов.

2.1. Изостабильные поляризованные двудольные мультиорграфы

Как показано ранее, любой изомерный класс псевдоорграфов полностью определяется заданием векторов полустепеней с условием существования — сумма полустепеней исхода равна сумме полустепеней захода и равна числу дуг. Другими словами, наборы полустепеней исхода и захода суть две композиции (т.е. два разбиения с учетом порядка слагаемых [8]) числа дуг $\boldsymbol{L}$ с $\boldsymbol{n}$ целыми частями.

В разделе 1 показано, что после выделения петель система уравнений для матрицы смежности псевдоорграфа переходит в систему уравнений для поляризованного двудольного мультиорграфа, для которого условие существования дуг имеет вид

$$\boldsymbol{\Delta O_1 + \ldots + \Delta O_k = \Delta L = \delta I_{(k+1)} + \ldots + \delta I_{(n-k)}}. \tag{19}$$

Пусть теперь мы имеем ситуацию, когда наборы вершин в долях исхода и захода представляются в виде объединений непустых непересекающихся подмножеств $\boldsymbol{(\{\Delta O_1\},\ \{\Delta O_2\})}$ и $\boldsymbol{(\{\delta I_1\},\ \{\delta I_2\})}$ таких, что

$$\boldsymbol{\sum_{\alpha} \Delta O_{1,\alpha} = \Delta L_1 = \sum_{\beta} \delta I_{1,\beta}}\ , \tag{20}$$

и

$$\boldsymbol{\sum_{\alpha} \Delta O_{2,\alpha} = \Delta L_2 = \sum_{\beta} \delta I_{2,\beta}}\ , \tag{21}$$

где $\boldsymbol{\Delta L_1 + \Delta L_2 = \Delta L}$. Тогда, как легко показать, система (6) имеет класс блочных решений, соответствующий несвязным поляризованным мультиорграфам, построенным на вершинах, соответствующих разбиениям $\boldsymbol{(\{\Delta O_1\},\ \{\delta I_1\})}$ и $\boldsymbol{(\{\Delta O_2\},\ \{\delta I_2\})}$.

Таким образом, мы приходим к утверждению: пара разбиений целого числа

$$\boldsymbol{L = \sum_{i}^{k} \Delta O_i}, \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{L = \sum_{j}^{(n-k)} \delta I_j}$$

реализуется изостабильным классом поляризованных мультиорграфов с $\boldsymbol{n}$-вершинами тогда и только тогда, когда единственным разбиением $\boldsymbol{L}$, покрывающим[3] разбиения $\boldsymbol{\Delta}$ и $\boldsymbol{\delta}$, является однокомпонентное разбиение $\boldsymbol{L}$. В дальнейшем любые два таких разбиения (две композиции) мы будем называть взаимно стабильными.

[3]По определению [9], разбиение (композиция) $\boldsymbol{\Lambda}$ целого числа $\boldsymbol{L}$ покрывает разбиение (композицию) $\boldsymbol{\Delta}$ этого же числа, если $\boldsymbol{\Delta}$ получается из $\boldsymbol{\Lambda}$ дроблением его (ее) компонент на неотрицательные целые слагаемые. Если $\boldsymbol{\Lambda}$ покрывает $\boldsymbol{\Delta}$, то, говорят, $\boldsymbol{\Delta}$ вложимо (вложима) в $\boldsymbol{\Lambda}$ [10].

Так как добавление к каждой вершине поляризованного мультиорграфа любого количества петель не меняет свойств изостабильности получаемых классов псевдоорграфов, то для произвольной пары n-компонентных композиций целого числа L справедливо утверждение: *пара* n*-компонентных композиций числа* $L \geq n+1$ *определяет изостабильный класс псевдоорграфов с* L*-связями тогда и только тогда, когда после удаления симметричных частей векторов полустепеней (т.е. максимально возможного числа петель в каждой вершине) остающиеся векторы полустепеней определяют изостабильный класс поляризованных двудольных мультиорграфов.*

2.2. Характеризация изостабильных изомерных классов псевдоорграфов

Полученные в предыдущем разделе утверждения дают возможность построения полного описания изостабильных изомерных классов псевдоорграфов, а также и построения всех способов разложения неизостабильных классов на изостабильные компоненты.

Напомним, что произвольный класс изомерных псевдоорграфов полностью восстанавливается переключениями связей из его канонического представителя. В общем случае канонический представитель — это объединение нескольких одновершинных псевдоорграфов, соответствующих симметричным векторам полустепеней, и поляризованного двудольного мультиорграфа, в каждой вершине которого есть еще несколько направленных петель.

Задача описания множества нетривиальных псевдоорграфов сводится к задаче описания двудольных поляризованных мультиорграфов, среди которых изостабильные изомерные классы играют выделенную роль. Изостабильные изомерные классы — это “минимальные блоки”, из которых могут быть построены любые другие изомерные классы с помощью операций объединения и переключения связей у представителей объединенных классов.

Для полного описания множества двудольных поляризованных мультиорграфов нам необходимо научиться анализировать их изостабильность, построить процедуры разложения на изостабильные компоненты и процедуру генерации всех изостабильных классов. Так как любой изомерный класс описывается векторами полустепеней, то анализ и генерация должны производиться в терминах наборов полустепеней.

Пусть задана последовательность n двухкомпонентных векторов полустепеней двудольного поляризованного мультиорграфа

$$(\Delta_1, 0),\ \ldots,\ (\Delta_k, 0),\ (0, \delta_1),\ \ldots,\ (0, \delta_{(n-k)})$$

и пусть G^{Δ}_{δ} — соответствующий класс мультиорграфов. Построим две последовательности целых чисел — сумм степеней в каждом из всех непустых подмножеств набора степеней исхода

$$N^{\Delta} = \{\Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_k,\ \Delta_1 + \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_1 + \ldots + \Delta_k = L\}$$

и степеней захода

$$N_{\delta} = \{\delta_1,\ \ldots,\ \delta_{(n-k)},\ \delta_1 + \delta_2,\ \ldots,\ \delta_1 + \ldots + \delta_{(n-k)} = L\}.$$

По построению $\{L\} \in N^{\Delta} \cap N_{\delta}$. Далее очевидно, что если $N^{\Delta} \cap N_{\delta}$ содержит и другие элементы, то это будет означать, что исходная последовательность векторов полустепеней реализуется неизостабильным классом, и каждый элемент пересечения $\neq \{L\}$ соответствует некоторому разложению G^{Δ}_{δ} на два непересекающихся изомерных подкласса с меньшими числами вершин у их представителей. Отметим, что построенная процедура является только индикатором взаимной стабильности разбиений $\boldsymbol{\Delta}$ и $\boldsymbol{\delta}$, в случае взаимной нестабильности она не дает всей информации о разложениях на компоненты.

Для построения процедуры анализа изостабильности классов двудольных поляризованных мультиорграфов воспользуемся методом производящих полиномов.

Каждой вершине $\boldsymbol{\alpha}$ в доле исхода поставим в соответствие формальную переменную $\boldsymbol{u_\alpha}$, и по набору полустепеней исхода построим полином

$$\boldsymbol{P^{\Delta}(u_\alpha) = -1 + \prod_{\alpha}^{k}(1 + u_\alpha^{\Delta_\alpha}).}$$

Аналогичный полином от формальных переменных $\boldsymbol{d_\beta}$ по набору полустепеней захода имеет вид

$$\boldsymbol{P_\delta(d_\beta) = -1 + \prod_{\beta}^{(n-k)}(1 + d_\beta^{\delta_\beta}).}$$

Далее построим производящий полином возможных разложений $\boldsymbol{G_\delta^\Delta}$ на два непересекающихся изомерных подкласса как Адамарову композицию [11] "долевых" полиномов:

$$\boldsymbol{A_\delta^\Delta(u_\alpha, d_\beta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} P^\Delta(u_\alpha \cdot z)\cdot P_\delta(\frac{d_\beta}{z})\frac{dz}{z}.} \qquad (22)$$

Каждый моном этого полинома соответствует некоторому разложению исходного класса двудольных поляризованных мультиорграфов на два подкласса таких же графовых структур, а полином дает все способы разложения исходного неизостабильного класса на два подкласса.

Конкретные вычислительные процедуры анализа изостабильности, разложений на изостабильные компоненты, генерации подмножеств изостабильных псевдоорграфов мы рассмотрим в другом месте, а здесь приведем некоторые общие утверждения об изостабильных классах поляризованных мультиорграфов.

Для построения удобной для приложений компактной характеризации изостабильных классов псевдоорграфов нам будет удобно рассматривать в явном виде кратности одинаковых вершин.

Набор разных степеней в доле исхода (захода) у любого класса поляризованных двудольных мультиорграфов будем называть степенным множеством исхода (захода). В записях степенных множеств нам будет удобно считать их упорядоченными слева направо по убыванию, т.е. в записи

$$\boldsymbol{\{\Delta\} = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k\}}$$

всегда будет подразумеваться строгий порядок $\boldsymbol{\Delta_1 > \Delta_2 > \ldots > \Delta_k}$, и аналогично для степеней захода $\boldsymbol{\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_l}$.

Напомним также, что ранее мы условились считать $\boldsymbol{\Delta_1 > \delta_1}$ для нетривиальных изостабильных классов поляризованных мультиорграфов.

Таким образом, для полного описания класса изомерных поляризованных мультиорграфов нам необходимо будет указывать степенные множества и кратности вхождения степеней в обеих долях. Теперь полная запись класса поляризованных двудольных мультиорграфов будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{G = \{\{\Delta_1, m_1\}, \ldots, \{\Delta_k, m_k\}; \{\delta_1, n_1\}, \ldots, \{\delta_l, n_l\}\}},$$

где кратности $\boldsymbol{m_i, n_j > 0 \quad \forall i, j}$.

Условие существования класса двудольных поляризованных мультиорграфов в терминах разных степеней захода и исхода и их кратностей будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta_i = \sum_{j=1}^{l} n_j \cdot \delta_j} \ . \tag{23}$$

Рассмотрим некоторое степенное множество $\boldsymbol{A}$ и множество всех его непустых подмножеств, которое обозначим $\boldsymbol{Subsets[A]}$. Построим множество

$$\boldsymbol{Sext[A] = \{\sum_{a_i \in X} a_i : \quad \forall \quad X \in Subsets[A]\}} \ .$$

Легко видеть, что $\boldsymbol{A \subset Sext[A]}$, и в дальнейшем будем называть конструкцию $\boldsymbol{Sext[A]}$ S-расширением множества A.

Теперь мы можем перейти к формулировкам признаков изостабильности поляризованных двудольных мультиорграфов в терминах степенных множеств, их S-расширений и кратностей степеней. Приведем сначала некоторые общие утверждения.

Теорема существования. Для любой пары непустых степенных множеств захода $\boldsymbol{\delta}$ и исхода $\boldsymbol{\Delta}$ существуют построенные над ними классы двудольных поляризованных мультиорграфов.

В самом деле, для любой пары $\boldsymbol{\Delta}$ и $\boldsymbol{\delta}$, согласно критерию существования двудольного поляризованного мультиорграфа, достаточно построить наборы степеней для долей исхода и захода так, чтобы сумма всех степеней исхода равнялась сумме всех степеней захода, что всегда можно сделать, подобрав специальным образом кратности вершин в обеих долях:

$$\boldsymbol{G = \{\{\Delta_1, M\}, \ldots, \{\Delta_k, M\}; \{\delta_1, N\}, \ldots, \{\delta_l, N\}\}},$$

где $\boldsymbol{M = \sum_{j=1}^{l} \delta_j, \quad N = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если в классе двудольных поляризованных мультиорграфов существуют вершины исхода $\boldsymbol{\{\Delta_0, m_0\}}$ и захода $\boldsymbol{\{\delta_0, n_0\}}$ такие, что они и их кратности связаны неравенствами $\boldsymbol{m_0 \geq \delta_0}$, $\boldsymbol{n_0 \geq \Delta_0}$, то такой класс неизостабилен и из него может быть выделен подкласс полных двудольных мультиорграфов

$$\boldsymbol{G_0 = \{\{\Delta_0, \delta_0\}; \{\delta_0, \Delta_0\}\}}.$$

Отметим, что не для всяких $\boldsymbol{\Delta}$ и $\boldsymbol{\delta}$ класс изостабильных двудольных мультиорграфов существует. Например, для степенных множеств

$$\boldsymbol{\Delta = \{6, 5\} \quad \text{и} \quad \delta = \{3, 2, 1\}}$$

для любых ненулевых кратностей все классы двудольных поляризованных мультиорграфов неизостабильны.

Теорема. Число изостабильных классов поляризованных двудольных мультиорграфов над ограниченными степенными множествами ограничено.

Доказательство. Для заданных степенных множеств исхода $\boldsymbol{\Delta}$, с числом элементов $\boldsymbol{k}$, и захода $\boldsymbol{\delta}$, с числом элементов $\boldsymbol{l}$, каждому классу поляризованных мультиорграфов над ними соответствует некоторый набор кратностей вершин исхода $\boldsymbol{M = \{m_1, \ldots, m_k\}}$, $\boldsymbol{k \le M_\Delta}$ и захода $\boldsymbol{N = \{n_1, \ldots, n_l\}}$ с $\boldsymbol{m_i, n_j \ge 1}$ $\forall \boldsymbol{i, j}$ и только один. Таким образом, мы можем характеризовать поляризованные мультиорграфы над $\boldsymbol{\Delta, \delta}$ парой целочисленных положительных векторов $\boldsymbol{(M, N)}$. Легко видеть, что если $\boldsymbol{(M, N)}$ и $\boldsymbol{(M', N')}$ два набора векторов-кратностей для двух поляризованных мультиорграфов, то и набор $\boldsymbol{(M + M', N + N')}$ также есть набор векторов-кратностей поляризованного мультиорграфа над теми же степенными множествами, и, следовательно, множество всех возможных классов поляризованных мультиорграфов над заданными конечными степенными множествами не ограничено сверху.

Выбранный ранее строгий порядок в степенных множествах исхода и захода и их соподчиненность $\boldsymbol{\Delta_1 > \delta_1}$ индуцируют лексикографический порядок на множестве всех классов поляризованных мультиорграфов над $\boldsymbol{(\Delta, \delta)}$, при котором старшинство векторов

$$\boldsymbol{(m_1, \ldots, m_k;\, n_1, \ldots, n_l)}$$

определяется старшинством компонент слева направо. Это означает, что множество классов поляризованных мультиорграфов является частично упорядоченным множеством, в котором отсутствуют несравнимые элементы. В таком множестве всегда существует строго возрастающая последовательность.

Предположим теперь, что множество изостабильных мультиорграфов не ограничено. Так как оно является неограниченным подмножеством частично упорядоченного множества и не имеет несравнимых элементов, то и у него существует строго возрастающая последовательность векторов-кратностей, в которой возрастают по крайней мере одна компонента подвектора кратностей вершин исхода и одна компонента подвектора кратностей вершин захода (напомним, что оба подвектора имеют фиксированные числа компонент, равные мощностям степенных множеств).

Пусть это будут для определенности вершины и компоненты $\boldsymbol{\{\Delta_\alpha, m_\alpha\}}$ и $\boldsymbol{\{\delta_\beta, n_\beta\}}$. Так как по предположению $\boldsymbol{m_\alpha}$ и $\boldsymbol{n_\beta}$ — совместно возрастающие последовательности, то, начиная с некоторого шага совместного возрастания, мы будем иметь $\boldsymbol{m_\alpha > \delta_\beta}$ и $\boldsymbol{n_\beta > \Delta_\alpha}$.

Таким образом, начиная с некоторого шага возрастания количеств вершин исхода и захода, у каждого класса поляризованных мультиорграфов будут подмножества вершин исхода $\boldsymbol{\{\Delta_\alpha, m_\alpha\}}$ и вершин захода $\boldsymbol{\{\delta_\beta, n_\beta\}}$, на которых всегда можно построить подкласс поляризованных полных двудольных мультиорграфов.

Полученное противоречие доказывает ограниченность множества изостабильных поляризованных мультиорграфов над ограниченными степенными множествами исхода и захода.

Замечание. Множество изостабильных поляризованных мультиорграфов над заданным степенным множеством $\boldsymbol{\{\Delta, \delta\}}$ содержится в множестве минимальных неотрицательных решений уравнения (23) относительно кратностей степеней исхода и захода.

В самом деле, минимальное решение уравнения (23) — это такое решение, которое не может быть представлено суммой двух ненулевых решений. Минимальные решения образуют базис Гильберта в множестве всех натуральных решений (23), т.е. любое натуральное решение представимо как линейная комбинация базисных решений с натуральными коэффициентами, и ни одно базисное решение не может быть выражено как линейная комбинация других базисных решений.

Концепция неотрицательных минимальных решений линейных диофантовых уравнений исследуется уже давно (Gordan:1873,[12]), (Hilbert:1890, [13]) и в разных контекстах (см. обзоры в [14], стр. 373 и 506). Однако содержательные оценки мощности базиса Гильберта и алгоритмы генерации всех его представителей появились совсем недавно [15],[16].

3. Обсуждение результатов

Идея исследования свойств изомерной стабильности графовых структур родилась в процессе построения “динамически мотивированной” классификации конечных состояний в реакциях множественного рождения адронов в адрон – адронных столкновениях [17]. Там в задаче классификации возникла потребность описания и перечисления нейтральных по всем суммарным квантовым числам наборов адронов “неразделимых” на нейтральные по всем суммарным квантовым числам поднаборы. Эта задача сводится к задаче построения классов графовых структур с разнотипными ориентированными связями изостабильных по переключениям однотипных связей.

В явном виде для графовых структур она была сформулирована в работе [18], где были получены некоторые утверждения об изостабильности графов, мультиграфов и псевдографов.

В представленной работе дано качественное (частичное) решение задачи описания структуры множества псевдоорграфов — одного из самых простых видов графовых структур[4]. Построена классификация псевдоорграфов по специальному отношению подобия — изомерии, и построена характеризация соответствующих классов. Относительная простота структуры множества псевдоорграфов обусловлена отсутствием структурных ограничений — множество псевдоорграфов изоморфно множеству всех целочисленных квадратных матриц с неотрицательными матричными элементами.

Отношение изомерии псевдоорграфов индуцирует отношение эквивалентности на множестве таких матриц (две матрицы эквивалентны, если их множества строковых и столбцовых сумм совпадают соответственно). Классы смежности по этому отношению эквивалентности (изомерные классы) описываются решениями линейного однородного диофантового уравнения, выражающего условие существования квадратной матрицы при заданных наборах значений строковых и столбцовых сумм. Представители одного и того же класса смежности связаны друг с другом цепочкой простых матричных преобразований: разность двух изомерных матриц является целочисленной линейной комбинацией весьма простых матриц — матриц переключения связей.

Далее, естественное для графовых структур свойство связности индуцирует свойство стабильности или нестабильности представителей изомерного класса по отношению

[4]Более простым видом графовых объектов по отношению к операции переключения связей являются псевдографы, для них задача характеризации изомерных и изостабильных классов тривиальна: изостабильными классами являются одновершинные псевдографы (степень вершины — четное число) и двухвершинные псевдографы (степени обеих вершин нечетны). Любой изомерный класс псевдографов восстанавливается переключениями связей из объединения представителей соответствующей совокупности изостабильных классов псевдографов [18].

к переключениям связей. На множестве изомерных классов возникает дихотомия: изостабильные и неизостабильные классы. Класс изостабилен, если все его представители связны. Множество изостабильных классов является своего рода множеством образующих для всех изомерных классов. Любой изомерный класс порождается множеством допустимых переключений объединения представителей нескольких изостабильных классов. Таким образом, можно утверждать, что качественное описание структуры множества псевдооргрофов, индуцированной свойством связности и преобразованиями переключения связей, закончено. Для полноты решения необходимо:

- построить алгоритм перечисления изостабильных классов псевдооргрофов;
- для заданного изостабильного класса построить процедуру выделения (задания) канонического представителя и построить алгоритм порождения всех представителей цепочками переключений из канонического.

По замечанию к теореме об ограниченности множества изостабильных псевдооргрофов над ограниченным степенным множеством задача перечисления изостабильных классов эквивалентна задаче перечисления базисов Гильберта для соответствующих диофантовых уравнений над степенными множествами, и, следовательно, эта задача уже решена.

Процедуру указания удобного канонического представителя изостабильного класса и алгоритм порождения всех представителей переключениями из канонического еще предстоит построить.

Благодарности. В процессе исследования разных аспектов изомерии и изомерной стабильности графовых структур весьма полезными и плодотворными были обсуждения с коллегами С.И.Алехиным, В.В.Брызгаловым, Н.Г.Демидовым, А.В.Емельяненко, Н.В.Емельяненко, Э.А.Людмирским и А.Н.Толстенковым, студентами и аспирантами Г.В.Ежела, В.А.Лазиным и В.В.Котляром. Выражаю им свою глубокую признательность.

Список литературы

[1] Senior J.K. //Amer. Jour. Math., 1951, v.73, p.663-689.
Partitions and Their Representative Graphs.

[2] Hakimi S.L. //J. SIAM, 1962, v.10, p.496-506.
On the Realizability of a Set of Integers as Degrees of the Vertices of a Linear Graph. I.
Хакими С.Л Кибернетический сборник. — М.: Мир, 1966, т.2, с.40-53. *О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа. I.*
Hakimi S.L. //J. SIAM, 1963, v.11, p.135-147.
On the Realizability of a Set of Integers as Degrees of the Vertices of a Linear Graph. II.

[3] Ryser H.J. *Combinatorial Mathematics* — The Garus Mathematical Monographs, 1963.
Райзер Г.Дж. *Комбинаторная Математика* — М.: Мир, 1966, стр. 71.

[4] Харари Ф. *Теория графов.* — М.: Мир, 1973;
Harary F. *Graph Theory.* — AMS, Providence, Rhode Island, 1962.

[5] Оре О. *Теория графов.* — М.: Наука, 1980.
Ore O. *Theory of Graphs.* — Addison-Wesley, 1969.

[6] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов.* — М.: Наука, 1990.

[7] Евстигнеев В.А, Касьянов В.Н. *Толковый словарь по теории графов.* — Новосибирск: Наука, 1999.

[8] Эндрюс Г. *Теория Разбиений.* — М.: Наука, 1982, с. 67.
Andrews G.E. *The Theory of Partitions.* — Addison-Wesley, 1976.

[9] Биркхоф Г. *Теория Решеток.* — М.: Наука, 1984, с.30.
Birkhoff G. *Lattice Theory.* — Providence, Rhode Island, 1967.

[10] Стечкин Б.С. *Экстремальные свойства разбиений.* (см. Добавление к переводу книги [8], с. 249.)

[11] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* — М.: Наука, 1967, с.38.
Bieberbach L. *Analytische Forzetzung.* — Springer – Verlag, 1955.
Hadamard J. //Acta Math. 1899 v.22 p.55-63.
Théorème sur les séries entières.

[12] Gordan P. //Mathematische Annalen, **6** (1873) 23-28.
Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten, (цитируется по [14]).

[13] Hilbert D. //Mathematische Annalen **36** (1890) 473-534.
Ueber die Theorie der algebraischen Formen, (цитируется по [14]).

[14] Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования.* — М:, МИР, 1991
Schrijver A. *Theory of linear and integer programming.* — Wiley, Chichester, 1986

[15] Lambert J. L. //C. R. Acad. Sci. Paris bf 305 (1987), Série I, 39-40.
Une borne pour les générateurs des solutions entiéres positives d'une équation diophantienne linéaire.

[16] Clausen M., Fortenbacher A. //J. Symbolic Computations **8** (1989) 201-216.
Efficient Solution of Linear Diophantine Equation.

[17] Alekhin S.I. et al. — Preprint IHEP 84-77, COMPAS.
Classification of Hadron-Hadron Exclusive Reactions.

[18] Ежела Г.В. — Дипломная работа МФТИ, 1995.
Теория стабильности графических объектов и ее применение в решении экономических задач.

Рукопись поступила 9 января 2004 г.

В.В. Ежела.
Изомерная стабильность графовых структур.I. Псевдоорграфы.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В. Ежела.

Подписано к печати 13.01.2004. Формат **60 × 84/8.**
Офсетная печать. Печ.л. 2,12. Уч.-изд.л. 1,7. Тираж 130. Заказ 180.
Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2004–1, И Ф В Э, 2004