ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2004–7
ОТФ

А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили, В.А. Петров

КАК БЫЛИ ОТКРЫТЫ УРАВНЕНИЯ ГИЛЬБЕРТА–ЭЙНШТЕЙНА?

Направлено в *УФН*

Протвино 2004

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Логунов А.А., Мествиришвили М.А., Петров В.А. Как были открыты уравнения Гильберта–Эйнштейна?: Препринт ИФВЭ 2004–7. – Протвино, 2004. – 24 с., библиогр.: 18.

Прослеживаются пути, по которым А. Эйнштейн и Д. Гильберт независимо пришли к уравнениям гравитационного поля. Дан критический анализ ряда работ, в которых выдвигается точка зрения, которая ***“радикально отличается от стандартной точки зрения”*** на историю вывода уравнений гравитационного поля. Показана полная несостоятельность выводов этих работ.

Abstract

Logunov A.A., Mestvirishvili M.A., Petrov V.A. How the Hilbert–Einstein Equations Were Diskovered?: IHEP Preprint 2004–7. – Protvino, 2004. – p. 24, refs.: 18.

The pathways along which A. Einstein and D. Hilbert independently came to the gravitational field equations are being traced. The critical analysis of some papers where a point of view on the history of derivation of the gravitational field equations ***“that radically differs from the standard point of view”*** is done. A full groundlessness of the conclusions of these papers is shown.

Введение

После исследований Д. Ирмена и К. Глимура [1] стало ясно, что уравнения общей теории относительности А. Эйнштейна найдены почти одновременно, но разными методами, Д. Гильбертом и А. Эйнштейном.

В 1997 г. в журнале “Science” появилась статья под названием “Запоздалое решение в споре Гильберта–Эйнштейна о приоритете” [2], авторы которой утверждают, *“что сведения о результате Эйнштейна могли быть решающими для введения Гильбертом следового члена в свои полевые уравнения”*. На этом основании они выдвигают свою точку зрения, *“радикально иную, чем стандартная точка зрения”*, которую пространно излагают в работе [3].

Согласно стандартной точке зрения, Эйнштейн и Гильберт независимо друг от друга и разными путями открыли уравнения гравитационного поля. По этому же вопросу в УФН в 2001 г. опубликована статья [4]. О чем идет речь? В работе Эйнштейна [5] даны уравнения гравитационного поля

$$\sqrt{-g}R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) ,$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор; $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи; $T_{\mu\nu}$ — плотность тензора энергии-импульса вещества; T — след плотности тензора $T_{\mu\nu}$;

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} .$$

Авторы статьи [2] утверждают, что Гильберт, познакомившийся с этими уравнениями и увидев “следовый член” $\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$, якобы тоже “ввел” после этого в свои уравнения [6]

$$\sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = -\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{1}$$

“следовый член” (в данном случае $\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, где след $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$).

Посмотрим, в какие же полевые уравнения Гильберту, по мнению авторов [2], понадобилось “вводить следовый член”. Авторы работы [2] не учитывают, что в подходе Д. Гильберта, в принципе, ничего нельзя “вводить”, поскольку все точно определено мировой функцией (лагранжианом)

$$H = R + L ,$$

введенной Гильбертом, и которая в рамках принципа наименьшего действия является ключевой для построения гравитационных уравнений. По существу, теория построена, если найдена мировая функция.

Свое открытие авторы [2] произвели на свет, познакомившись с гранками статьи Гильберта (в которых, кстати, недостает некоторых частей — см. работу [7], где, в частности, приведена сохранившаяся часть гранок) и увидев, что уравнения гравитационного поля приведены в них в форме вариационной производной от $[\sqrt{g}R]$ по $g^{\mu\nu}$

$$\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_k \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_k} + \partial_k\partial_\ell \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_{k\ell}} = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{2}$$

но нет уравнений в виде (1). Отсюда они сделали вывод, что Гильберт не имел уравнений гравитации в форме (1).

Но даже если это так и было, то все равно Гильберту ничего не нужно было “вводить” дополнительно, поскольку (2) точно переходит в (1) после довольно тривиальных вычислений. **Все обстоит, однако, не так, как пишут авторы** [2]. Для того чтобы показать, что утверждение авторов [2] не имеет под собой никаких сколь-нибудь серьезных оснований, нам придется изложить суть работы Д. Гильберта (см. раздел 1).

На основе идеи Эйнштейна об эквивалентности ускоренного движения и гравитации в написанной им совместно с М. Гроссманом статье 1913 г. [8] гравитационное поле было отождествлено с метрическим тензором псевдориманова (в дальнейшем риманова) пространства. Так было введено тензорное гравитационное поле. В этой статье А. Эйнштейн на основе простой модели формулирует общий закон сохранения энергии-импульса:

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}\,\Theta^\nu_\sigma) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\Theta_{\mu\nu}\partial_\sigma g^{\mu\nu} = 0. \tag{3}$$

“*Первые три из этих соотношений* $(\sigma = 1, 2, 3)$ *выражают закон сохранения импульса, последнее* $(\sigma = 4)$ — *закон сохранения энергии.*” Здесь $\Theta_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса вещества. Необходимо отметить, что введение Эйнштейном такого **закона сохранения энергии-импульса для любой материальной системы** — это пока еще на уровне естественного физического предположения. В этой же статье М. Гроссман показывает, что выражение (3) ковариантно относительно произвольных преобразований и может быть записано в форме

$$\nabla_\nu\Theta^\nu_\sigma = 0, \tag{4}$$

здесь ∇_ν — ковариантная производная относительно метрики $g_{\mu\nu}$. В работе [8] Эйнштейном была поставлена задача построения уравнений гравитации вида

$$\Gamma_{\mu\nu} = \varkappa\,\Theta_{\mu\nu}, \tag{5}$$

где $\Gamma_{\mu\nu}$ — тензор, составленный из метрики и ее производных. Из этих уравнений должно следовать соотношение (3). Отметим, что в части статьи, написанной Гроссманом, обсуждается вопрос об использовании в качестве $\Gamma_{\mu\nu}$ тензора Риччи $R_{\mu\nu}$, который мог бы входить в уравнение (5).

М. Гроссман пишет: “*Однако в частном случае бесконечно слабого статического поля тяжести этот тензор* ***не сводится*** *к* $\Delta\varphi$. *Поэтому вопрос о том, как далеко простирается связь проблемы уравнений гравитационного поля и общей теории дифференциальных тензоров, связанных с гравитационным полем, остается открытым*”.

В дальнейшем Эйнштейн, следуя своим представлениям, ищет величину $\Gamma_{\mu\nu}$ как тензор, но только относительно произвольных **линейных преобразований**. По этому пути он будет идти до ноября 1915 г. В конце июня – начале июля 1915 г. Эйнштейн провел около недели в Геттингене, где, как он вспоминал, “*прочитал там шесть двухчасовых лекций*”. Очевидно, что после этого Д. Гильберт заинтересовался данной проблемой. Постановка задачи **Эйнштейном**, а также объявление **им** потенциалами гравитации метрического тензора риманова пространства $g_{\mu\nu}$ и явились ключевыми для Гильберта. Этого ему было достаточно для нахождения уравнений гравитационного поля, исходя из принципа наименьшего действия (аксиома I Гильберта) и своих глубоких знаний в области теории инвариантов. Все это непосредственно видно из статьи Гильберта [6].

Ниже в разделе 1 мы изложим подход Гильберта к получению уравнений гравитационного поля, а также проведем критический анализ статей [2, 3, 4], посвященных этому же вопросу, а в разделе 2 — подход Эйнштейна к получению тех же уравнений поля.

1. Подход Гильберта

Рассмотрим внимательно подход Гильберта [6]. Он формулирует аксиому I:
“*Законы физического события определяются мировой функцией H, аргументы которой таковы:*

$$g_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu\ell} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\ell}, \quad g_{\mu\nu\ell k} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\ell \partial x^k},$$

$$q_s,\ q_{s\ell} = \frac{\partial q_s}{\partial x^\ell}, \quad (\ell, k = 1, 2, 3, 4),$$

причем вариация интеграла

$$\int H\sqrt{g}\, d\omega, \tag{6}$$

$$(g = |g_{\mu\nu}|, \quad d\omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4),$$

обращается в нуль для каждого из 14 потенциалов $g_{\mu\nu}\, q_s$”. Далее он пишет: “*Что же касается мировой функции H, то для ее однозначного определения требуются дополнительные аксиомы. Если в уравнения гравитации могут входить лишь вторые производные потенциалов $g^{\mu\nu}$, то функция H должна иметь вид* [1]

$$H = R + L, \tag{7}$$

где R — инвариант, следующий из тензора Римана (скалярная кривизна четырехмерного многообразия):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{8}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha}, \tag{9}$$

а L – функция только переменных $g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_\ell, q_s, q_{sk}$. В дальнейшем мы, кроме того, примем для простоты, что L не зависит от $g^{\mu\nu}_\ell$.

Из аксиомы I при варьировании по 10 гравитационным потенциалам следуют 10 дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_k \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_k} + \partial_k\partial_\ell \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}_{k\ell}} = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}\text{”}. \tag{10}$$

[1] В работе [6] Гильберт пользуется для тензора Риччи и скалярной кривизны обозначениями $K_{\mu\nu}$ и K. Мы используем для них, а также для других величин современные обозначения. *(Авторы.)*

Из (8) и (9) легко увидеть, что как в R, так и в $R_{\mu\nu}$ производные второго порядка входят только линейно. Тензорами второго ранга с такими свойствами являются

$$R_{\mu\nu} \quad \textbf{и} \quad g_{\mu\nu}R. \tag{10a}$$

Все другие тензоры с такими свойствами получаются только комбинацией из этих тензоров.

Это заключение в какой-то степени было уже известно Эйнштейну, и он, отмечая тензоры второго ранга, которые могут приводить к уравнениям гравитации с производными не выше второго порядка, в письме от 19 января 1916 г. к Г.А. Лоренцу писал:

"…что помимо тензоров

$$R_{\mu\nu} \quad \textit{и} \quad g_{\mu\nu}R$$

нет (произвольных ковариантных) тензоров…"

Д. Гильберту как математику все это было просто очевидно.

Для краткости, следуя Гильберту, обозначим левую часть уравнения символами

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_k\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \partial_k\partial_\ell\frac{\partial\sqrt{g}R}{\partial g_{k\ell}^{\mu\nu}}. \tag{11}$$

Тогда уравнение (10) принимает вид

$$[\sqrt{g}R]_{\mu\nu} = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{12}$$

Заметим, что в методе Гильберта получения уравнений гравитации не требуется какая-либо конкретизация функции Лагранжа материальной системы. **Д. Гильберт в статье [6] в теореме II устанавливает тождество**:

$$\delta_L(\sqrt{g}\,J) + \partial_\lambda(\delta x^\lambda\sqrt{g}\,J) = 0\,, \tag{12a}$$

где δ_L — вариация Ли; J — произвольная инвариантная функция относительно преобразований координат. Это тождество он использует при получении уравнений (48).

Далее **Д. Гильберт доказывает очень важную теорему III**: *"Пусть J — инвариант, зависящий только от компонент $g^{\mu\nu}$ и их производных, а через $[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}$, как и прежде, обозначены вариационные производные от $\sqrt{g}J$ по $g^{\mu\nu}$. Тогда, если $h^{\mu\nu}$ — любой контравариантный тензор, то величина*

$$\frac{1}{\sqrt{g}}[\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \tag{13}$$

также будет инвариантом, если подставить в эту сумму вместо $h^{\mu\nu}$ стандартный тензор $p^{\mu\nu}$ и написать

$$[\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu}p^{\mu\nu} = (i_s p^s + i_s^e p_e^s)\,, \tag{14}$$

где конструкции

$$i_s = [\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu}\partial_s g^{\mu\nu}\,, \tag{15}$$

$$i_s^\ell = -2[\sqrt{g}\,J]_{\mu s}g^{\mu\ell} \tag{16}$$

зависят только от $g^{\mu\nu}$ и их производных, то

$$i_s = \frac{\partial i_s^\ell}{\partial x^\ell}\,, \tag{17}$$

причем данное уравнение выполняется тождественно для всех аргументов, а именно: для $g^{\mu\nu}$ и их производных".

Гильберт применяет эту теорему к случаю, когда $J = R$. Тогда тождество (17) принимает вид

$$\partial_\ell\{[\sqrt{g}\,R]_s^\ell\} + \frac{1}{2}[\sqrt{g}\,R]_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^s} \equiv 0. \tag{18}$$

Это тождество по виду аналогично выражению (3), а следовательно, его можно также записать в форме (4):

$$\nabla_\ell[\sqrt{g}\,R]_s^\ell \equiv 0. \tag{19}$$

Отсюда мы видим, что ковариантная производная от вариационной производной $[\sqrt{g}\,R]_s^\ell$ равна нулю. Таким образом, на основании (12) имеем

$$\nabla^\ell\left\{\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial g^{s\ell}}\right\} = 0. \tag{20}$$

Согласно Гильберту плотность тензора энергии-импульса материальной системы $T_{\mu\nu}$ определяется следующим образом:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{21}$$

и равенство (20) записывается как закон ковариантного сохранения тензора энергии-импульса материальной системы:

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0. \tag{22}$$

Именно Гильберт впервые дал определение (21) плотности тензора энергии-импульса материальной системы и показал, что эта плотность удовлетворяет уравнению (22); тем самым он обосновал предположение Эйнштейна, сделанное в статье [8]. Таким образом, Д. Гильберт **нашел уравнение гравитационного поля** [2]

$$[\sqrt{g}\,R]_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{23}$$

из которого **точно следует ковариантный закон сохранения энергии-импульса** (22).

Умножая обе части уравнения (23) на $g^{\mu\nu}$ и суммируя по индексам μ и ν, получаем

$$g^{\mu\nu}[\sqrt{g}\,R]_{\mu\nu} = -\varkappa T\,. \tag{24}$$

Слева в уравнении (24) образовался инвариант, в который вторые производные входят линейно. Но такой инвариант только один — R. Отсюда получим уравнение

$$\sqrt{g}\,\beta R = -\varkappa T\,, \tag{25}$$

где β — произвольная постоянная.

Таким образом, подводя итог, можно сказать, что **Д. Гильбертом были найдены уравнения гравитационного поля и тем самым решена задача, которую поставил А. Эйнштейн в 1913 г. Уравнения (23) тождественны уравнениям (1). Они отличаются только по форме. Ниже мы увидим, что, следуя Гильберту, уравнения (23) легко преобразуются к форме (1)**. Гильберт как в гранках, так и в статье [6], пишет: ***"Ниже я хочу . . . установить . . . новую систему фундаментальных уравнений физики"***. И далее там же: ***"моих основных уравнений"***, ***"моей теории"***.

[2]Оригинальная работа [6] Гильберта отвечает системе единиц, где $\varkappa = 1$. *(Авторы.)*

Д. Гильберт не мог бы писать так, если бы не считал **себя** автором “фундаментальных уравнений физики”.

Плотность тензора $[\sqrt{g}\, R]_{\mu\nu}$ в уравнении (23) по построению (11) также содержит производные второго порядка только линейно, а поэтому на основании (10а) эта плотность тензора имеет вид

$$[\sqrt{g}\, R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(R_{\mu\nu} + \alpha g_{\mu\nu} R)\,. \tag{26}$$

Для Д. Гильберта выражение (26) просто очевидно. Может быть авторам [2, 3, 4] это трудно понять, но это уже их личное дело. На основании (26) для левой части уравнений (24) получим выражение

$$g^{\mu\nu}[\sqrt{g}\, R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}(4\alpha + 1)R, \tag{27}$$

которое находится в полном соответствии с (25). Именно об этих общих рассуждениях и писал Гильберт: “*...что ясно без вычислений, если учесть, что R — единственный инвариант, а $R_{\mu\nu}$ — единственный (кроме $g_{\mu\nu}$) тензор второго порядка, который можно построить только из компонент $g_{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных $g_k^{\mu\nu}, g_{k\ell}^{\mu\nu}$*”.

Авторы статьи [2] (см. также [3]) по этому поводу пишут: “*Аргумент этот, однако, не убедителен, поскольку есть много других тензоров второго порядка и много других инвариантов, которые могут быть построены из тензора Римана*”.

Это высказывание авторов [2, 3] не имеет никакого отношения к точному аргументу Гильберта, поскольку авторы работ [2, 3] упустили из вида главное — речь шла о построении уравнений гравитации, в которые входят вторые производные от $g^{\mu\nu}$ и не выше. Об этом Гильберт специально писал в своей работе [6]: “*Если в уравнения гравитации могут входить лишь вторые производные потенциалов $g^{\mu\nu}$, то функция H должна иметь вид*

$$H = R + L\text{”}.$$

Поэтому Д. Гильберт **абсолютно прав**, что в этом случае имеются только **один инвариант R и два тензора $R_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}R$**, содержащие линейно вторые производные гравитационного потенциала $g^{\mu\nu}$. Все другие тензоры с такими свойствами являются комбинацией этих тензоров.

Ошибается и автор статьи [4], когда он пишет: «*При этом, правда, вариационный вывод уравнений отсутствует, а правильная форма уравнений (с “половинным” членом) обосновывается (не вполне корректно!) единственностью тензора Риччи и скалярной кривизны, как общековариантных величин, зависящих только от $g^{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных*».

Удивляет также, когда автор статьи [4] пишет о работе Гильберта: “*При этом, правда, вариационный вывод уравнений отсутствует ...* ” Он, по-видимому, **запамятовал** хорошо известное обстоятельство, что уравнения Лагранжа, которые приведены Гильбертом, являются следствием вариационного принципа наименьшего действия (аксиома I Гильберта). Так что **в работе Гильберта [6] вариационный вывод уравнений гравитационного поля имеется**.

Как авторы [2, 3, 4] решаются вести анализ работы Д. Гильберта [6] и далее судить о ней, не понимая сути точных математических аргументов Гильберта? Далее авторы работ [2, 3] пишут: “*даже если требовать линейности по тензору Риччи, то критически важный коэффициент в следовом члене остается неопределенным*”. Это тоже **неправильно** — он легко определяется. Гильберт доказал тождество (19):

$$\nabla_\sigma[\sqrt{g}\, R]^\sigma_\mu \equiv 0\,. \tag{28}$$

Учитывая (26) в локальной римановой системе координат, где символы Кристоффеля равны нулю, тождество (28) принимает простой вид

$$\partial_\sigma(R^\sigma_\mu + \alpha\delta^\sigma_\mu R) \equiv 0\,. \tag{29}$$

На основании (8) и (9) находим

$$\partial_\mu R = K_\mu, \quad \partial_\sigma R^\sigma_\mu = \frac{1}{2} K_\mu\,, \tag{30}$$

где

$$K_\mu = g^{\nu\sigma} g^{\lambda\rho} \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\mu g_{\lambda\rho} - g^{\nu\sigma} g^{\alpha\lambda} \partial_\sigma \partial_\alpha \partial_\mu g_{\lambda\nu}\,. \tag{31}$$

Используя эти выражения, получаем

$$\partial_\sigma (R^\sigma_\mu + \alpha \delta^\sigma_\mu\, R) = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) K_\mu \equiv 0\,.$$

Отсюда имеем

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \tag{32}$$

а следовательно,

$$[\sqrt{g}\, R]_{\mu\nu} = \sqrt{g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)\,, \tag{33}$$

т. е.

$$\sqrt{g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) = -\varkappa\, T_{\mu\nu}\,. \tag{34}$$

Таким образом, “*критически важный коэффициент*”, о котором пишут авторы [2, 3], в подходе Гильберта определяется тривиальным образом путем обычного дифференцирования, вполне доступного студенту первого курса университета. Отсюда ясно также, что следовый член $\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ не возникает путем какого-либо произвольного “введения” в уравнения поля, сформулированные Гильбертом, он органически **содержится** в них.

Позднее в 1921 г. в работе 60 [9] А. Эйнштейн при написании уравнений гравитации будет строить геометрическую часть уравнений гравитации, используя тензор

$$R_{\mu\nu} + a g_{\mu\nu} R,$$

т.е. так же, как это ранее делал Д. Гильберт при преобразовании уравнений гравитации (12) к форме (34).

Творческий поиск авторов статей [2, 3] венчает следующий глубокомысленный вывод: “*В целом вся эта цепочка наводит на мысль, что сведения о результате Эйнштейна могли быть решающими для введения Гильбертом следового члена в свои уравнения*”. Как можно прийти после чтения работы Гильберта к таким мыслям? Но оказывается, при желании это возможно. Напомним авторам [2], что **в формализме Гильберта ничего не нужно вводить. Как только он написал мировую функцию $\boldsymbol{H}$ в виде**

$$\boldsymbol{H = R + L}\,,$$

и установил теорему III, все остальное — дело простой техники вычислений и ничего более.

Таким образом, анализ, который мы провели относительно суждений авторов [2]**, показывает, что все их замечания к Гильберту или неправильны, или не имеют к нему никакого отношения. Поэтому все их аргументы в пользу *“радикально иной”* точки зрения, чем стандартная, несостоятельны**.

Гильберт ранее, еще до публикации статьи Эйнштейна со следовым членом уже имел равенство (33). Используя (19) и (33), находим

$$\nabla_\nu \left(R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R \right) \equiv 0. \tag{35}$$

Но это есть тождество Бьянки.

Незнание содержания работы Гильберта встречается не только у авторов [2]. Так, например, проф. А. Пайс в книге [10] в § 14.4 писал: *"Очевидно, и Гильберт не был знаком с тождеством Бьянки!"* и далее: *"Итак, я утверждаю, что ни Гильберт, ни Эйнштейн не знали тождества Бьянки в тот критический ноябрь 1915 г."*.

" Как это ни странно, но в 1917 г. специалисты еще не знали, что вывод тождества, данный Вейлем вариационным методом, был новым способом получения давно известного результата".

Проф. А. Пайс прав в том, что А. Эйнштейн не знал тождества Бьянки *"в тот критический ноябрь 1915 г."*. **Все остальное, написанное в [10] в отношении Гильберта, неправильно. Дело в том, что Гильберт не знал тождества Бьянки — он сам его получил**. Д. Гильберт вариационным методом доказал общее тождество (см. теорему III Гильберта), из которого, полагая $J = R$, он получил также тождество Бьянки. **Таким образом, не Вейль в 1917 г., а Гильберт в 1915 г. получил тождество Бьянки вариационным методом**. В § 15.3 [10] Пайс пишет: *"Но в ноябре 1915 г. ни Гильберт, ни Эйнштейн не знали об этом королевском пути к законам сохранения, хотя Гильберт был довольно близок к цели"*.

Аналогичное пишут и авторы [3]: *"Гильберт не открыл королевского пути к формулировке полевых уравнений общей теории относительности. На самом деле, он не сформулировал этих уравнений вовсе"*.

Все это неправильно. Именно Гильберт и нашел самый короткий и общий путь построения уравнений гравитации. Он нашел функцию Лагранжа гравитационного поля R, с помощью которой путем использования вариационного принципа наименьшего действия уравнения гравитации получаются автоматически. **Именно так их получают и в настоящее время при изложении общей теории относительности А. Эйнштейна**. Досадно, что проф. А. Пайс поверхностно познакомился со статьей Гильберта, этим же страдают и авторы работ [2, 3].

Позднее в 1924 г. Д. Гильберт написал [11]: *"Для того, чтобы определить выражение $[\sqrt{g}\, R]_{\mu\nu}$, сначала выбирают систему координат таким образом, чтобы все $g^{\mu\nu}_s$, будучи взятыми в мировой точке, исчезли. Находим, таким образом,*

$$[\sqrt{g}\, R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\Big[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big]\text{''}. \tag{36}$$

По поводу этих слов авторы [2] пишут: *"Итак: поначалу Гильберт не приводил явного вида полевых уравнений; потом, после того, как Эйнштейн опубликовал свои полевые уравнения, Гильберт заявил, что нет необходимости в вычислении; в конце-концов, он признал, что оно нужно"*.

Это высказывание — плод фантазии авторов [2]. Ниоткуда не следует, что Гильберт не имел явного вида полевых уравнений. Они получались из уравнений (23) и выражения (26) с использованием тождества (28) элементарным путем. **Неужели можно всерьез предполагать, что Гильберт не смог, исходя из (28), получить (33)?** Добавление Гильберта, сделанное в 1924 г., не означает какого-то "признания необходимости вычисления". Он внес его, чтобы напомнить простой метод нахождения тензора. Но это ни в какой степени не отменяло его точного высказывания (*"что ясно без вычислений"*).

Авторы [2, 3] утверждают, ссылаясь на гранки, что Гильберт имел только уравнения гравитации в форме (23). Уравнение (23) содержит производные

$$\frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad \frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g_k^{\mu\nu}}, \quad \frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g_{k\ell}^{\mu\nu}}. \tag{37}$$

Невозможно себе представить физика-теоретика или математика, чтобы он не вычислил этих производных, и не получил тем самым в явном виде дифференциальные уравнения, в которые входят только производные $g_k^{\mu\nu}, g_{k\ell}^{\mu\nu}$. Но Гильберту, как мы видели, и их не надо было вычислять, поскольку он из общих и строгих математических положений определил структуру выражения $[\sqrt{g}\,R]_{\mu\nu}$, после чего вычисление *"критически важного коэффициента"* стало тривиальным. **Именно поэтому вывод авторов статей** [2, 3]**, что якобы Гильберт не имел *"явного вида гравитационной части полевых уравнений"*, не может быть правильным**. Он также, как мы увидим далее, явно противоречит переписке Эйнштейна с Гильбертом.

Именно из переписки Эйнштейна и Гильберта все становится предельно ясным, и не требуется каких-либо дополнительных аргументов. Более точного аргумента, чем свидетельство Эйнштейна, просто не может быть. **Почему-то авторы [2, 3] оставили это важнейшее свидетельство Эйнштейна без внимания**, а в центр своего анализа положили неопубликованные материалы Гильберта, содержащие к тому же и пропуски.

Свидетельство Эйнштейна в письме от 18 ноября 1915 г. однозначно исключает всякие домыслы о работе [6] Гильберта. Так что ***"архивная находка"*** авторов [2] не может, в принципе, поколебать свидетельство самого Эйнштейна. На этом можно было бы по данному вопросу поставить точку. Но, поскольку авторы [2, 3, 4] по ходу своей аргументации высказывают ошибочные заключения о работе [6] Гильберта, нам приходится на этом специально остановиться.

Если даже не следовать общим положениям Гильберта, то, используя определение (11), можно провести простое дифференцирование и выразить плотность тензора $[\sqrt{g}\,R]_{\mu\nu}$ через плотность тензора Риччи и скалярную плотность $\sqrt{g}\,R$. Первый член в (11) записывается в форме

$$\frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g^{\mu\nu}} = \sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}}R\right) + \sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}}\,, \tag{38}$$

но так как

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}\,g_{\mu\nu}\,, \tag{39}$$

получим

$$\frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g^{\mu\nu}} = \sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,R\right) + \sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}}\,. \tag{40}$$

На основании (11) и (40) имеем

$$[\sqrt{g}\,R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,R\right) + \left\{\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_k\frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \partial_k\partial_\ell\frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g_{k\ell}^{\mu\nu}}\right\}.$$

Легко убедиться, что сумма членов в фигурных скобках тождественно равна нулю. Это проще всего увидеть в локальной римановой системе координат, в которой символы Кристоффеля равны нулю. Таким простым, но не элегантным путем опять находим искомое выражение

$$[\sqrt{g}\,R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\Big).$$

Авторы статьи [3] пишут: *“Как в гранках, так и в опубликованных версиях работы* [6], *Гильберт ошибочно утверждал, что можно рассматривать последние четыре уравнения (*имеются в виду уравнения электромагнитного поля. – *Авторы.) как следствие четырех тождеств, которые должны иметь место, согласно его теореме I, между четырнадцатью дифференциальными уравнениями”*.

Все не совсем так, как полагают авторы [3]. Теоремы I и II сформулированы для инварианта J относительно произвольных преобразований четырех мировых параметров. Согласно этим теоремам, для каждого инварианта существуют **четыре тождества**. Гильберт рассматривает в своей статье два инварианта R и L. Общий инвариант H Гильберт составляет из этих двух инвариантов:

$$H = R + L\,.$$

Уравнения гравитации в обозначениях Гильберта имеют вид

$$[\sqrt{g}\,R]_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}\,,$$

Инвариант L Гильберт выбирает в виде функции от переменных $g^{\mu\nu}, q_\sigma, \partial_\nu q_\sigma$ и поэтому он получает обобщенные уравнения Максвелла

$$[\sqrt{g}\,L]^\nu = 0, \tag{41}$$

где

$$[\sqrt{g}\,L]^\nu = \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial(\partial_\mu q_\nu)}\right). \tag{42}$$

Далее на основании теоремы II Гильберт устанавливает, что функция Лагранжа L зависит от производных потенциала q_ν только в комбинации $F_{\mu\nu}$, т.е. L является функцией $F_{\mu\nu}$

$$L(F_{\mu\nu})\,, \tag{43}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu q_\nu - \partial_\nu q_\mu\,. \tag{44}$$

Это, конечно, не исключает непосредственной зависимости L от переменной q_ν. Именно на этом основании Д. Гильберт выбирает лагранжиан в виде

$$L = \alpha Q + f(q)\,, \tag{45}$$

где

$$Q = F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}, \quad q = q_\mu q_\nu g^{\mu\nu}, \tag{46}$$

здесь α — постоянная.

Гильберт далее отмечает, что уравнения электродинамики *“можно рассматривать как следствия уравнений гравитации”*.

Для инварианта L согласно теореме II имеют место **четыре тождества**:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = F_{\mu\nu}[\sqrt{g}\,L]^\mu + q_\nu\partial_\mu[\sqrt{g}\,L]^\mu. \tag{47}$$

Из тождества (47) следует, что если уравнения движения материальной системы (41) выполняются, то имеет место ковариантный закон сохранения

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$$

для материальной системы. Но если в тождестве (47) воспользоваться уравнениями гравитации (34), как это сделал Д. Гильберт, то мы получим уравнения Гильберта

$$F_{\mu\nu}[\sqrt{g}\,L]^{\mu} + q_{\nu}\partial_{\mu}[\sqrt{g}\,L]^{\mu} = 0, \tag{48}$$

которые отмечены в его статье [6] под номером 28. Уравнения (48) должны быть **совместимы с уравнениями, которые следуют из принципа наименьшего действия с тем же лагранжианом $\boldsymbol{L}$.** Но это возможно только в том случае, когда имеют место **обобщенные уравнения Максвелла**

$$[\sqrt{g}\,L]^{\nu} = 0. \tag{49}$$

Поэтому автор статьи [4] совершенно не прав, считая, что *"в случае калибровочно-неинвариантной теории Ми с лагранжианом типа* (45) *в общем надо пользоваться не обобщенными уравнениями Максвелла* (49)*, а уравнениями* (48)*"*.

Это высказывание противоречит принципу наименьшего действия, т.е. аксиоме I Гильберта. **Таким образом, наличие согласно теореме II четырех тождеств (47) и уравнений гравитации (34) приводит к четырем уравнениям (48), которые совместны с обобщенными уравнениями Максвелла, полученными на основе аксиомы I Гильберта**. Это и подчеркивал Гильберт в работе [6]. В связи с этим он в статье [6] отмечает: *"…т. е. из уравнений гравитации (10) действительно следуют 4 не зависящие друг от друга линейные комбинации* (48) ***уравнений электродинамики (41)*** *(*выделено нами. – *Авторы.) вместе с их первыми производными"*. Следует особо подчеркнуть, что Гильберт пишет о *"линейной комбинации уравнений электродинамики (41)"*, а не выражений (42). Именно здесь и имеется путаница у авторов [3, 4].

Отметим, что в частном случае, когда лагранжиан L равен

$$L = \alpha Q, \tag{50}$$

второй член в уравнениях (48) тождественно обращается в нуль и мы приходим к уравнениям

$$F_{\mu\nu}[\sqrt{g}\,L]^{\mu} = 0.$$

Отсюда следует, что если детерминант $|F_{\mu\nu}|$ не равен нулю, то имеют место уравнения Максвелла

$$[\sqrt{g}\,L]^{\mu} = 0,$$

что находится в полном соответствии с принципом наименьшего действия (аксиома I Гильберта). **Таким образом, уравнения Максвелла являются следствиями уравнений гравитации (34) и четырех тождеств (47)**. Все это следует из статьи Гильберта, если читать ее внимательно. Позднее А. Эйнштейн совместно с Инфельдом и Гоффманом в статье 117 [9], а также В.А. Фок в статье [12] получат уравнения движения материальной системы из уравнений гравитации.

Очень часто отмечается, что уравнение гравитационного поля Гильберт получил *"не для произвольной материальной системы, а специально исходя из теории Ми"* [13]. Это не совсем точно. Метод, которым пользовался Гильберт, общий, и не накладывает никаких ограничений на вид функции L. Но поскольку из гравитационных уравнений следуют **четыре уравнения** для материальной системы, то для Гильберта это обстоятельство стало привлекательным, и он применил свои общие уравнения к теории Ми. Это объединение гравитации и теории Ми не оказалось плодотворным. Но общий метод Гильберта, с помощью которого он получил гравитационные уравнения, оказался весьма перспективным.

Теперь несколько слов о дополнительных нековариантных уравнениях.

Для решения задач всегда необходимо иметь полную систему уравнений. Уравнений ОТО только десять. Необходимо их дополнить еще четырьмя уравнениями, которые никогда нельзя выбрать общековариантными. Эти дополнительные условия называются координатными. Они могут быть разными. Таково положение в теории. Именно это и понимал Гильберт, когда он писал (см. текст гранок в [7]): *"Как учит наша математическая теорема, предыдущие аксиомы I и II* [3]*могут дать для 14 потенциалов только 10 независимых друг от друга уравнений, с другой стороны, в силу общей инвариантности, более чем 10 существенно независимых уравнений для 14 потенциалов $g_{\mu\nu}, q_s$ невозможны, и, поскольку мы хотим придерживаться теории Коши для дифференциальных уравнений, и соответственно, придать основным уравнениям физики определенный характер, то неизбежно добавление к (4) и (5)* [4] *дополнительных неинвариантных уравнений"*.

Это требование — математическое, и оно обязательно для теории. Для решения задач необходимо всегда иметь полную систему уравнений. Эти дополнительные уравнения он и пытался найти из самой теории. Но это ему не удалось, а поэтому он это и не включил в статью.

Так что основная система ОТО (десять уравнений) общековариантна. Но полная система уравнений, которая необходима для решения задач, необщековариантна, поскольку четыре уравнения, выражающие координатные условия, не могут быть тензорными, они всегда необщековариантны. Решение полной системы уравнений гравитационного поля с помощью тензорных преобразований может быть записано в любой допустимой системе координат. Именно здесь возникает понятие атласа карт. **Поэтому утверждение авторов [2, 3, 4], что теория Гильберта необщековариантна в противоположность теории Эйнштейна, неправильно. Полная система уравнений как у Эйнштейна, так и у Гильберта необщековариантна**. Разница была только в том, что Гильберт пытался однозначно построить эти нековариантные уравнения в рамках самой теории. Однако это оказалось невозможным. Они стали достаточно произвольными, но не тензорными, и определяют выбор системы координат.

По этому поводу Дж. Синг [14] пишет: *"В работах по теории относительности можно найти целый ряд различных координатных условий, преследующих каждый раз особые цели. Чтобы подойти к этому вопросу единым образом, запишем координатные условия в виде*

$$C_i = 0, \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

*Этим уравнениям (возможно дифференциальным) должен удовлетворять метрический тензор g_{ij}. Конечно, они **не могут быть** тензорными, так как они удовлетворяются лишь при специальном выборе координат"*.

На каком же материале сделали выводы авторы статьи [2]? В так называемых гранках работы Д. Гильберта, из которых они исходили, использованы в разных частях инварианты H и K, но определение этих величин в сохранившихся частях гранок отсутствует. В гранках Д. Гильберт пишет: *"Я хотел бы в последующем, следуя аксиоматическому методу и исходя, по-существу, из двух аксиом, составить новую систему основных уравнений физики"*. Очевидно, что для того чтобы осуществить это, Гильберту необходимо было задать вид инвариантов H и K.

Невозможно представить, чтобы Гильберт, поставив перед собой в статье такую цель, не определил бы эти фундаментальные величины. **Но это означает, что пропуски, имеющиеся**

[3]Согласно аксиоме II, мировая функция H является инвариантом по отношению к любому преобразованию координат.

[4]Под номерами (4) и (5) записаны соответственно уравнения гравитационного поля (10) и обобщенные уравнения Максвелла (41). *(Авторы.)*

в гранках, очень существенны и содержат важную информацию. Без учета этой ключевой информации не могут быть сделаны правильные заключения.

Однако авторы [2] пренебрегли этим важным обстоятельством и поспешили сделать вывод, что Гильберт не имел уравнений гравитации в форме

$$\sqrt{g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)=-\varkappa T_{\mu\nu}\,.$$

Этот вывод они представили широкой научной общественности в популярном и известном журнале “Science” [2]. При этом авторы [2] не информировали читателя о том, что в так называемых гранках, которые они использовали, имеются пропуски. Лишь позднее в препринте [3] они отметили это обстоятельство. Авторы [2] свой шаг объясняют тем, что гранки позволили им обосновать свою точку зрения *“радикально иную, чем стандартная точка зрения”*. Но как можно сделать это на основании предварительного материала, в котором имеются пропуски?

Вот еще один из приемов “анализа”, применяемых авторами работы [3]: *“Замечательно, что характеризуя свою систему уравнений, Гильберт вычеркнул слово «**новую**» — ясное указание на то, что он перед этим видел работу Эйнштейна и признал, что уравнения, вытекающие из его собственного вариационного принципа, формально эквивалентны уравнениям, которые Эйнштейн записал явно (из-за появления члена со следом), если тензор энергии-импульса Гильберта подставить вместо неопределенного тензора в правой части полевых уравнений Эйнштейна”*.

Но все написанное авторами препринта [3] теряет смысл поскольку, на самом деле, их ***“ясное указание”*** исчезает, так как Д. Гильберт в опубликованной статье [6] вполне ясно написал: *“Ниже я хочу …установить …новую систему фундаментальных уравнений”*. Мягко говоря, крайне неделикатно делать выводы о мнении Гильберта, опираясь только на его черновые пометки, сделанные в предварительных неопубликованных материалах. Полученная Д. Гильбертом система гравитационных уравнений действительно **новая**. Он получил ее, не зная, что А. Эйнштейн пришел к таким же гравитационным уравнениям. Об этом А. Эйнштейн и писал Д. Гильберту в письме от 18 ноября 1915 г. (см. раздел 3). Странный путь избран авторами [3], чтобы обосновать свою *“радикально иную”* точку зрения. Многостраничное сочинение авторов [3] изобилует как подобными сомнительными аргументами, так и ошибочными высказываниями. Такой подход авторов [2, 3] к изучению важнейших работ в физике едва ли можно считать профессиональным, основанным на глубоком анализе материала.

В заключение этого раздела отметим, что работы Гильберта под общим названием **“Основание физики”** очень важны и содержательны. И теоретикам, занимающимся близкими вопросами, неплохо бы их знать.

Так, например, в УФН была опубликована статья [15]. Если бы авторы этой статьи прочли статью Гильберта [16], опубликованную в 1917 г., они увидели бы, что критическая координатная скорость V_c, которую они приближенно вычислили, на самом деле равна

$$V_c=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{r-\alpha}{r}\right),\quad \alpha=r_g=2GM.$$

Именно при этой скорости ускорение точно равно нулю. Скорость V_c зависит от радиуса, тогда как соответствующая ей собственная скорость v не зависит от r и равна

$$v=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Для определения критической координатной скорости v_c в первом порядке по G необходимо в ускорении учитывать члены второго порядка по G. Гравитационное поле не оказывает воздействия на тело, если оно движется со скоростью v_c под действием внешней силы.

Д. Гильберт в статье [16] получает уравнение

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3} = 0$$

и приводит его интеграл:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 + A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^3,$$

где A — постоянная; для света $A = 0$.

Отсюда, в частности, получим формулу (20) для скорости из работы [15]

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2\left(1 + \frac{2r_g}{r}\right),$$

которая отличается от критической скорости v_c. При этой скорости ускорение не будет точно равно нулю.

Д. Гильберт далее пишет: *"Согласно этому уравнению, ускорение отрицательно или положительно, т. е. гравитация притягивает или отталкивает в зависимости от того, удовлетворяет ли абсолютная величина скорости неравенству*

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{r-\alpha}{r}\right),$$

или неравенству

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| > \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)".$$

Для света Гильберт находит

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{r-\alpha}{r},$$

и далее он отмечает: *"Свет, распространяющийся по прямой к центру, в соответствии с последними неравенствами всегда испытывает отталкивание; его скорость возрастает от* 0 *при* $r = \alpha$ *до* 1 *при* $r = \infty$*"*.

Заметим, что локальная физическая скорость света равна c. Необходимо отметить также, что скорость v_c не является решением исходного уравнения.

Еще об одном. Авторы [15] пишут: *«Возможно, поэтому многие авторы выделяют собственное время: одни называют его "истинным", другие "физическим", не поясняя, какой смысл вкладывается в данном случае в эти термины»*. И далее: *«В результате многие специалисты по общей теории относительности всегда рассматривают координатные величины (например, координатную скорость) как нефизические, так сказать, "второсортные". Между тем …координатное время* t *имеет не меньше физического смысла, чем собственное время* τ*»*.

Таким образом, как отмечают авторы [15], *«говорить о собственной скорости как "истинной" или "физической" в противоположность координатной скорости нелогично»*.

Авторы [15] напрасно подумали, что специалисты по общей теории относительности (ОТО) не понимают значение координатных величин. Все описание в ОТО ведется в координатных величинах. Так что без них, в принципе, нельзя обойтись. Это хорошо известно уже давно.

В качестве примера физической величины возьмем собственное время, которое отличается от координатного тем, что оно не зависит от выбора координатного времени. Как видите, разница имеется, и она существенна. Другой пример: координатная скорость света равна

$$v = c\frac{\sqrt{g_{00}}}{1 - \dfrac{g_{0i}e^i}{\sqrt{g_{00}}}} \,,$$

здесь $i = 1, 2, 3;\ e^i$ — единичный вектор в трехмерном римановом пространстве.

Координатная скорость v, конечно, измерима, но зависит от выбора координат и может быть любой, удовлетворяющей условию

$$0 < v < \infty \,,$$

тогда как физическая скорость света точно равна c. Как видите, и здесь разница есть, и она также существенна, поэтому никакой “нелогичности”, о которой пишут авторы [15], в использовании понятий физической скорости и координатной не было и нет.

2. Подход А. Эйнштейна

Эйнштейн в 1913 г. писал: *“Излагаемая теория возникла на основе убеждения, что пропорциональность инертной и тяжелой масс является точным законом природы, который должен находить свое отражение уже в самих основах теоретической физики. Это убеждение я стремился отразить в ряде предыдущих работ (Ann. Phys., 1911, **35**, 898; 1912, **38**, 355: статьи 14 и 17 «Собрание научных трудов»* **I** [9]*), в которых делалась попытка свести **тяжелую** массу к **инертной**; это стремление привело меня к гипотезе о том, что поле тяжести (однородное в бесконечно малом объеме) физически можно полностью заменить ускоренной системой отсчета”.*

Именно этот путь и привел Эйнштейна к убеждению, что в общем случае гравитационное поле характеризуется десятью пространственно-временны́ми функциями (метрическими коэффициентами риманова пространства) $g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{51}$$

Далее он публикует ряд исследований (статьи 21, 22, 23, 25, 28, 29, 32) [9] в этом направлении, относительно которых он в статье 34 [9] пишет: *“В последние годы я старался построить общую теорию относительности исходя из относительности также и неравномерных движений. Я думал, что на самом деле нашел единственный закон гравитации, который соответствует понятному по смыслу общему постулату относительности, и пытался доказать необходимость именно этого решения в работе, появившейся в прошлом году в этом журнале.*

Однако заново проведенный анализ показал, что, следуя по предложенному пути, совершенно невозможно ничего доказать; то, что это казалось все же сделанным, было основано на заблуждении. Постулат относительности в той мере, в какой я требовал, выполняется всегда, когда в основу кладется принцип Гамильтона; однако фактически он не дает возможности определить гамильтонову функцию H гравитационного поля. На самом деле ограничивающее выбор H *соотношение (77) статьи 29* [9] *выражает не что иное, как то, что функция* H *должна быть инвариантна относительно линейных преобразований, а это требование не имеет ничего общего с относительностью ускорения. Кроме того, указанный соотношением (77) выбор нисколько не подтвержден уравнением (78) статьи 29* [9].

По этим причинам я полностью потерял доверие к полученным мной уравнениям поля и стал искать путь, который бы ограничивал возможности естественным образом. Так я вернулся к требованию более общей ковариантности уравнений поля, от которой я отказался с тяжелым сердцем, когда работал вместе с моим другом Гроссманом. Мы подошли тогда фактически очень близко к излагаемому ниже решению задачи.

Подобно тому, как частная теория относительности основана на постулате, что ее соотношения должны быть ковариантны относительно линейных ортогональных преобразований, излагаемая здесь теория основана на постулате ***ковариантности всех систем уравнений относительно преобразований с определителем 1****. Прелесть этой теории едва ли может скрыться от того, кто действительно понимает ее; она означает истинный триумф метода абсолютного дифференциального исчисления, развитого Гауссом, Риманом, Кристоффелем, Риччи и Леви-Чивитой".*

Эйнштейн выбирает уравнение гравитации в системе координат $\sqrt{-g} = 1$ в форме [5]

$$\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = -\varkappa T_{\mu\nu}\,, \tag{52}$$

где

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})\,,$$

$T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материальной системы. Здесь левая часть уравнения (52) получена из тензора Риччи при условии $\sqrt{-g} = 1$.

Для гравитационного поля Эйнштейн находит функцию Лагранжа

$$L = g^{\sigma\tau}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}\,. \tag{53}$$

Если учесть соотношение

$$2\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\delta(g^{\sigma\tau}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}) = \Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\delta g^{\sigma\beta}_\alpha\,, \tag{54}$$

то легко получить

$$\delta L = -\Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\Gamma^\beta_{\tau\alpha}\delta g^{\sigma\tau} + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\delta g^{\sigma\beta}_\alpha\,. \tag{55}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,. \tag{56}$$

С помощью этих формул уравнение гравитации (52) принимает вид

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} = -\varkappa T_{\mu\nu}\,. \tag{57}$$

Умножая (57) на $g^{\mu\nu}_\sigma$ и суммируя по индексам μ и ν, Эйнштейн получает

$$\partial_\lambda t^\lambda_\sigma = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}\partial_\sigma g^{\mu\nu}\,, \tag{58}$$

[5] В этом разделе мы сохранили обозначения Эйнштейна. *(Авторы.)*

где величина

$$t_\sigma^\lambda = \frac{1}{2\varkappa}\left(\delta_\sigma^\lambda L - g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial L}{\partial g_\lambda^{\mu\nu}}\right), \tag{59}$$

характеризует гравитационное поле. Принимая во внимание равенство

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\sigma g^{\mu\nu} = 2g^{\alpha\mu}\Gamma_{\alpha\sigma}^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda ,$$

находим

$$t_\sigma^\lambda = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - g^{\alpha\mu}\Gamma_{\alpha\sigma}^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\right). \tag{60}$$

Все дальнейшие вычисления проводятся в системе координат, где $\sqrt{-g} = 1$. Эйнштейн записывает основные уравнения гравитации (52) в форме

$$\partial_\alpha(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha) - \frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\varkappa(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda). \tag{61}$$

Мы покажем ниже, в какой малой близости к уравнениям гравитационного поля находился Эйнштейн при написании статьи 4 ноября 1915 г.

А. Эйнштейн, начиная с 1913 г., в той или иной форме отмечал, что **величина** $\boldsymbol{t_\sigma^\lambda}$, характеризующая гравитационное поле должна входить в уравнение гравитации **так же**, как **величина** $\boldsymbol{T_\sigma^\lambda}$, характеризующая материальные системы. Вот, например, что он писал в 1913 г. в статье [8]: *“…тензор гравитационного поля является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям”*. При написании статьи 34 [9] Эйнштейн оставил, однако, это важное интуитивное соображение без внимания.

Отмеченное выше соображение о симметрии между величинами T_σ^λ и t_σ^λ является скорее всего продуктом интуиции Эйнштейна, а не каким-либо общим физическим положением. Дело в том, что трансформационные свойства этих величин различны. Но интуиция — великая вещь, если она точно ведет к цели. В данном случае так и было. Надо отметить, что общие физические уравнения, как правило, не выводятся, они, используя опытные данные, общие физические положения и интуицию, скорее угадываются. Поэтому иногда трудно логически объяснить, как они получены автором.

На основании (60) легко найти след величины t_σ^λ

$$t = t_\lambda^\lambda = \frac{1}{\varkappa} g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta, \tag{62}$$

и переписать уравнение Эйнштейна (61) в форме

$$\partial_\alpha(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha) = -\varkappa\Big(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda\, t\Big). \tag{63}$$

Отсюда видно, что в уравнении (63) отсутствует симметрия между величинами T_σ^λ и t_σ^λ. Легко увидеть, что эта симметрия очень просто восстанавливается. К этому мы приступим ниже. Определим на основании (63) законы сохранения. Для этой цели найдем след уравнений

$$\partial_\alpha(g^{\nu\beta}\Gamma_{\nu\beta}^\alpha) = -\varkappa(T - t). \tag{64}$$

Умножим обе части уравнения (64) на $\frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda$ и полученное выражение вычтем из (63):

$$\partial_\alpha\Big(g^{\nu\lambda}\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda\, g^{\nu\beta}\Gamma_{\nu\beta}^\alpha\Big) = -\varkappa\Big(T_\sigma^\lambda + t_\sigma^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\sigma^\lambda\, T\Big). \tag{65}$$

Легко убедиться, что имеют место равенства

$$\partial_\lambda \partial_\alpha (g^{\nu\lambda} \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}) = \frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\alpha \partial_\sigma g^{\alpha\lambda}, \tag{66}$$

$$\partial_\lambda \partial_\alpha \delta^\lambda_\sigma g^{\nu\beta} \Gamma^\alpha_{\nu\beta} = \partial_\lambda \partial_\alpha \partial_\sigma g^{\alpha\lambda}. \tag{67}$$

Используя эти равенства, из уравнения (65) находим

$$\partial_\lambda (T^\lambda_\sigma + t^\lambda_\sigma) = \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma \partial_\lambda T, \tag{68}$$

аналогично можно найти, используя (58), соотношение

$$\partial_\lambda T^\lambda_\sigma + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \partial_\sigma g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma \partial_\lambda T\,. \tag{69}$$

Отсюда очевидно, что уравнение (63) не обеспечивает выполнение законов сохранения, и в соотношении (68) также отсутствует симметрия между T^λ_σ и t^λ_σ. Для восстановления симметрии в (63) и (68) и выполнения законов сохранения необходимо просто осуществить замену

$$T^\lambda_\sigma \to T^\lambda_\sigma - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma T\,, \tag{70}$$

согласно (70) след тензора $T_{\mu\nu}$ изменяется следующим образом:

$$T \to -T\,. \tag{71}$$

Заметим, что осуществление симметризации не требует каких-либо предположений о строении вещества. Проведя эту операцию, мы получим новые гравитационные уравнения

$$\partial_\alpha (g^{\nu\lambda} \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}) = -\varkappa \big\{ (T^\lambda_\sigma + t^\lambda_\sigma) - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma (T + t) \big\}. \tag{72}$$

Такая же операция замены в (68) и (69) приводит к восстановлению законов сохранения

$$\partial_\lambda (T^\lambda_\sigma + t^\lambda_\sigma) = 0, \tag{73}$$

аналогично

$$\partial_\lambda T^\lambda_\sigma + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \partial_\sigma g^{\mu\nu} = 0\,. \tag{74}$$

Формулы (73) и (74) возникли только из новых уравнений (72).

В дополнении к статье 34 [9] Эйнштейн в статье 35 [9] делает следующий шаг, и уравнения гравитации выбирает в форме

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu}\,, \tag{75}$$

общековариантной относительно произвольных координатных преобразований. Он снимает требование $\sqrt{-g} = 1$. В системе координат $\sqrt{-g} = 1$ эти уравнения сводятся к уравнениям (52). Но поскольку, как было видно, уравнение (52) не обеспечивало симметрии между T^λ_σ и t^λ_σ, а также наличие законов сохранения, и для симметризации возникла операция замены (70) и (71), то естественно осуществить эту операцию замены и в исходных уравнениях (75). Таким путем мы получаем новые уравнения гравитации

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \tag{76}$$

Именно эти уравнения позднее, спустя несколько дней получит Эйнштейн и опубликует в статье 37 [9]. Отметим, что уравнение сохранения (73) Эйнштейн находил и при наличии уравнений гравитации (63). Именно это обстоятельство, по-видимому, его полностью удовлетворило, поэтому он не обратил внимания на нарушение симметрии между T^λ_σ и t^λ_σ в уравнениях (63).

Однако его путь получения законов сохранения привел к тому, что выбор системы координат $\sqrt{-g} = 1$ стал возможен только при обращении следа тензора материальных систем в нулевое значение. Эйнштейн в это время, вместо того чтобы восстановить симметрию вышеуказанным ((70) и (71)) путем, избирает другой, более радикальный, путь. В статье 35 [9] он выдвигает новую физическую идею, что *"в действительности, положительна лишь величина $T^\mu_\mu + t^\mu_\mu$, а T^μ_μ обращается в нуль"*. Такой подход также восстанавливал симметрию, однако, хотя он и был достаточно радикальным, но как оказалось, не плодотворным. Поэтому эта идея просуществовала недолго.

Несколько позднее Эйнштейн вернулся к своей старой идее о симметрии и получил в статье 37 [9] уравнения гравитационного поля (76). При этом он отмечает: ***"Как нетрудно видеть, наш добавочный член приводит к тому, что тензоры энергии гравитационного поля и материи входят в уравнение (9) одинаковым образом".*** В этом высказывании имеется **неточность. В общей теории относительности не существует тензора энергии гравитационного поля**. Но как интуитивное соображение Эйнштейна оно прямо вело его к цели.

Мы видим, что путь, которым шел Эйнштейн, неминуемо вел к тем же уравнениям, которые получал и Гильберт. Совершенно очевидно, что Эйнштейн получил их независимо и, более того, он их выстрадал, поскольку шел к ним несколько лет.

Для уяснения того, что написано выше, немаловажное значение может иметь весьма оживленная переписка между Гильбертом и Эйнштейном, происходившая как раз в период их работы над уравнениями гравитационного поля. Именно она свидетельствует, что никакой ***"радикально иной"*** точки зрения, чем стандартная, в принципе, не может быть.

3. Переписка Эйнштейна с Гильбертом [17]

Берлин, 7 ноября 1915 г. Эйнштейн — Гильберту

"С ближайшей почтой посылаю Вам корректуру работы, в которой я модифицировал уравнение гравитации после того, как четыре недели назад я обнаружил, что мои аргументы были ошибочны. Коллега Зоммерфельд пишет мне, что Вы тоже нашли волос в моем супе, так что он Вам совершенно противен. Мне интересно, понравится ли Вам это новое решение. С сердечным приветом. Когда я могу надеяться на механико-историческую неделю в Геттингене? Я очень жду этого."

Берлин, 12 ноября 1915 г. Эйнштейн — Гильберту

*"Сердечно благодарю Вас за Ваше дружеское письмо. В проблеме снова наметился прогресс. Именно, посредством постулата $\sqrt{-g} = 1$ обеспечивается **общая** ковариантность; тензор Римана непосредственно дает уравнения гравитации. Если моя настоящая модификация (которая не меняет уравнений) оправдана, тогда гравитация должна играть фундаментальную роль в геометрии. Любопытство мешает мне работать! Я посылаю Вам два экземпляра работы прошлого года. У меня самого – только два пригодных экземпляра. Если еще кто-нибудь хочет иметь эту работу, он может купить ее за 2 марки (как оттиск из академии)."*

Геттинген, 13 ноября 1915 г. Гильберт — Эйнштейну

"Собственно я хотел лишь дать приемлемое для физиков изложение связи между физическими константами прежде, чем давать мое аксиоматическое решение Ваших великих проблем. Но если Вы так заинтересованы, то я мог бы в следующий вторник, послезавтра (т. е. 16) изложить мою теорию во всех деталях. Я нахожу ее математически идеальной, хотя расчеты не вполне прозрачны, и, строго говоря, не соответствуют аксиоматическому методу. Как следствие одной общей математической теоремы, электродинамические уравнения (в основном максвелловы) являются математическими следствиями уравнений гравитации, так что гравитация и электродинамика фактически неразделимы. Более того, мое выражение для энергии: $E = \Sigma(e_s T^s + e_{ih} t^{ih})$ дает основу для дальнейшего и является общим инвариантом, и отсюда из очень простой аксиомы следуют недостающие 4 "пространственно- временные" уравнения $e_s = 0$. В высшей степени приятным было уже обсуждавшееся с Зоммерфельдом открытие, что отсюда получается обычная электрическая энергия, если абсолютный инвариант дифференцировать по гравитационным потенциалам и потом положить $g = 0, 1$. Прошу Вас приехать, хотя бы только на вторник. Вы можете приехать сюда к 3 или 6 1/2 . Заседание математического общества происходит в 6 часов в конференц-зале. Моя жена и я будем очень рады, если Вы разместитесь у нас. Будет еще лучше, если Вы приедете уже в понедельник, так как в понедельник в 6 часов мы проводим в Физическом институте физический коллоквиум. С наилучшими пожеланиями и в надежде на то, что скоро увидимся. Насколько я понимаю Вашу новую работу, Ваше решение совершенно отличается от моего, тем более, что у меня e_s должны также с необходимостью содержать электрический потенциал."

Берлин, 15 ноября 1915 г. Эйнштейн — Гильберту

"Ваше исследование меня очень интересует, тем более, что я часто ломал голову над тем, чтобы перебросить мост между гравитацией и электромагнетизмом. Замечания, которые Вы делаете в Ваших письмах, дают основания ожидать чего-то великого. Однако я должен сейчас отказаться от поездки в Геттинген и набраться терпения до той поры, пока я смогу изучить Вашу систему из напечатанной работы; я очень переутомился и сверх того измучен болями в желудке. Пошлите мне, пожалуйста, если можно, экземпляр корректуры Вашего исследования, дабы удовлетворить мое нетерпение. С наилучшими пожеланиями и сердечной благодарностью Вам и Вашей супруге."

16 ноября 1915 г. Д. Гильберт сделал доклад. Об этом автор статьи [18] пишет: *" В названии лекции Гильберта, прочитанной в Математическом Обществе Геттингена 16 ноября стоял титул «Основные уравнения физики». Это было также название сообщения, с которым Гильберт сделал заявку на доклад в письменном приглашении, циркулирующем среди членов Академии в период с 15 ноября до заседания 20 ноября"*. Он также отмечает: *"Приглашение на заседание 20 ноября было выпущено 15 ноября и, как всегда, распространено среди участников, чтобы получить подтверждение об их участии и дать возможность сделать заявку на сообщение, которое они собирались представить на заседании. В это приглашение Гильберт вписал: «Hilbert. Lect. vor in die Nachrichten: Grundgleichungen der Physik»"*.

"В ответ на просьбу Эйнштейна", как пишет автор статьи [18], ***"Д. Гильберт сообщил о своих результатах в письме к Эйнштейну****, которое, к сожалению, потеряно. Он, вероятно, послал Эйнштейну рукопись своей лекции в Математическом Обществе Геттингена или ее тезисы"*.

Берлин, 18 ноября 1915 г. Эйнштейн — Гильберту

“Система, приведенная Вами, точно согласуется, насколько я могу видеть, с тем, что я получил в течение последних недель и направил в Академию (выделено нами. – Авторы). *Трудность состоит не в том, чтобы найти общековариантные уравнения для $g_{\mu\nu}$; это легко получается с помощью тензора Римана. Действительно же, трудно было понять, что эти уравнения дают простое и естественное обобщение закона Ньютона. Это впервые мне удалось сделать в последние недели (я посылал Вам мое первое сообщение), тогда как единственно возможные общековариантные уравнения, которые теперь оказываются правильными, рассматривались уже 3 года назад вместе с моим другом Гроссманом. Только с тяжелым сердцем отказались мы тогда от них, так как физические соображения в пользу их несовместимости с законом Ньютона показались мне тогда убедительными. Самое главное — что эта трудность теперь преодолена. Я сегодня направляю в Академию работу, в которой я, исходя из общей теории относительности, и без дополнительных гипотез получил количественно открытое Леверье смещение перигелия Меркурия. До сих пор это не удавалось ни одной теории гравитации. Желаю Вам всего наилучшего”.*

Таково содержание ответного письма А. Эйнштейна. Не существует аргументов более весомых в этом вопросе, чем слова в письме самого Эйнштейна: ***“Система, приведенная Вами, точно согласуется, насколько я могу видеть, с тем, что я получил в течение последних недель и направил в Академию”.*** Более точного свидетельства, в принципе, не может быть, но именно это свидетельство, по существу, осталось в стороне у авторов [2, 3, 4]. А ведь **одного этого свидетельства А. Эйнштейна в письме от 18 ноября 1915 г. достаточно**, чтобы полностью и навсегда исключить всякие попытки установить ***“радикально иную”*** точку зрения, чем стандартная. Авторы [2, 3] допустили целый ряд других неправильных выводов о работе Гильберта, а поэтому нам пришлось в разделе 1 более детально рассмотреть их сочинение.

Предположим все же, что Эйнштейн получил от Гильберта уравнения гравитации в форме (12), т.е.

$$[\sqrt{g}\,R]_{\mu\nu} = -\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}}\,, \tag{77}$$

Невероятно, чтобы Эйнштейн согласился с тем, что **эти уравнения** согласуются **с его уравнениями**

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{78}$$

в которые явно входит тензор Риччи. Чтобы согласиться, что уравнения (77) совпадают с его уравнениями (78), Эйнштейну необходимо было бы вычислить производные

$$\frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g^{\mu\nu}},\quad \frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g^{\mu\nu}_{k}},\quad \frac{\partial\sqrt{g}\,R}{\partial g^{\mu\nu}_{k\ell}}\,.$$

Однако он их в это время не вычислял. Об этом позднее в письме к Г.А. Лоренцу от 19 января 1916 г. он писал: *“Я уклонился от несколько утомительного вычисления $\partial R/\partial g^{\mu\nu}, \partial R/\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}$, установив тензорные уравнения непосредственно. Но другой способ, конечно, работает и даже более элегантен математически”.*

Невероятно также, чтобы Гильберт, зная, что в уравнения Эйнштейна входит тензор Риччи (об этом он был извещен в письме Эйнштейна от 7 ноября), мог послать ему свои уравнения в форме (77). Несомненно, что Эйнштейн получил от Гильберта уравнения в форме

$$\sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = -\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{79}$$

поскольку Гильберту не представляло труда из общих соображений, практически без вычислений, как это мы ранее видели, найти равенство

$$[\sqrt{g}\, R]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right).$$

В письме Гильберту от 18 ноября Эйнштейн пишет: ***“Система, приведенная Вами, точно согласуется, насколько я могу видеть, с тем, что я получил”.*** В этом легко убедиться, сравнивая уравнения (78) и (79). Слова Эйнштейна ***“насколько я могу видеть”***, по-видимому, были вызваны тем, что в статье Гильберта плотность тензора энергии-импульса была определена следующим образом:

$$\frac{\partial\sqrt{g}\, L}{\partial g^{\mu\nu}},$$

где L — функция переменных $g^{\mu\nu}, q_\sigma$ и $q_{\sigma\nu}$. Это определение было новым и для Эйнштейна еще неизвестным. Чтобы понять суть его, необходимо было время. Но ответ на письмо Гильберта Эйнштейн дал немедленно. Позднее в статье 42 [9] Эйнштейн будет пользоваться именно таким определением плотности тензора энергии-импульса. В этой статье он так же, как Гильберт, введет функцию $\mathfrak{M}$ от переменных $g^{\mu\nu}, q_{(\rho)}, q_{(\rho)\alpha}$ и запишет плотность тензора энергии-импульса в виде

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = -\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}}.$$

Поэтому невозможно понять, на основании чего авторы [3] пытаются утверждать совсем обратное: *“Новое выражение для энергии, которое Гильберт теперь перенял у Эйнштейна ... ”* Как мы только что видели, это совсем не так. Именно Эйнштейн перенял определение плотности тензора энергии-импульса у Гильберта и использовал его в статье 42 [9].

Далее авторы [3] заключают: *"Эйнштейновское обобщение вывода Гильберта сделало возможным рассматривать последний просто как вывод, представляющий проблематичный специальный случай”.*

Все это неправильно. Метод Гильберта — общий, он позволяет получить уравнения гравитации, не предполагая конкретного вида функции Лагранжа материальной системы L. Поэтому никакого обобщения вывода Гильберта не было и не могло быть. Другое дело, что затем Гильберт свой метод применил к конкретному случаю теории Ми.

Как мы уже отмечали в разделе 1, преобразования (77) к виду (79) для Гильберта не представляли никакого труда. Именно для этого и понадобилась теорема III, которая доказана Гильбертом. Поэтому гранки, в которых имеются пропуски, не могут свидетельствовать о том, что Гильберт не записал уравнения гравитационного поля в форме (79).

Заключение

Проведенный в разделах 1 и 2 анализ показывает, что Эйнштейн и Гильберт независимо открыли уравнения гравитационного поля. Их пути были различны, но эти пути вели точно к одной цели. Так что никто ни у кого не “подсмотрел”. Поэтому никакого *“запоздалого решения в споре Гильберта – Эйнштейна”*, о котором пишут авторы [2], в принципе, не должно быть. Впрочем, и спора-то Гильберта с Эйнштейном никогда не было. Все предельно ясно: **оба автора сделали все для того, чтобы их имена были вместе в названии уравнений гравитационного поля**. Но общая теория относительности есть теория Эйнштейна.

Авторы выражают благодарность за ценные обсуждения работы С.С. Герштейну и Н.Е. Тюрину.

Список литературы

[1] J. Earman and C. Glymour. *Einstein and Hilbert: Two Months in the History of General Relativity* (Archive for History of Exact Sciences) **19**, 291 (1978).

[2] L. Corry, J. Renn and J. Stachel. *Belated Decision in the Hilbert–Einstein Priority Dispute* (Science) **278**, 1270 (1997).

[3] J. Renn and J. Stachel. Hilbert's Foundation of Physics: From a Theory of Everything to a Constituent of General Relativity. *Preprint of Max-Planck-Institut für Wissen-schaftsgeschichte* N 118 (1999).

[4] В.П. Визгин. *Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы) УФН* **171** N 12, 1360; 1358 (2001).

[5] A. Einstein. *Sitz.-Ber. Preu. Ak. der Wiss.* **48**, 844 (1915).

[6] D. Hilbert. *Die Grundlagen der Physik* (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen) **3**, 395 (1915);
Перевод на русский см. в сборнике *"А. Эйнштейн и теория гравитации"* (М.: Мир, 1979).

[7] C.J. Bjerknes. *Anticipations of Einstein* (XTX INC., Downers Growe, Illinois) (2003).

[8] A. Einstein, M. Grossmann. *Entwurf einer Verallgemeinerten Relativäts-theorie und Theorie der Gravitation.* (Z. Math. und Phys.) **62**, 225 (1913).

[9] А. Эйнштейн. *Собрание научных трудов.* (М.: Наука **I**, 1965; – М.: Наука **II**, 1966).

[10] А. Пайс. *Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна.* (М.: Наука, 1989), перевод с англ. под ред. ак. А.А. Логунова;
A. Pais. *The Science and the Life of Albert Einstein.* (Oxford University Press) (1982).

[11] D. Hilbert. *Math. Annalen.* **92**, 1 (1924).

[12] В.А. Фок. *О движении конечных масс в общей теории относительности.* ЖЭТФ **9**, (4) 375 (1939).

[13] В. Паули. *Теория относительности.* (М.: Наука, 1983).

[14] Дж.Л. Синг. *Общая теория относительности.*– М.: Изд. ИЛ. 1963, с. 164, перевод с англ. под ред. А.З. Петрова;
J.L. Synge. *Relativity: The General Theory.* (North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1960).

[15] С.И. Блинников, М.И. Высоцкий, Л.Б. Окунь. *Скорости $c/\sqrt{3}$ и $c/\sqrt{2}$ в общей теории относительности. УФН.* **173**, N 10 (2003).

[16] D. Hilbert. *Die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilung).* (Nachr.Ges.Wiss. Göttingen) **1**, 53 (1917) .

[17] A. Einstein. *The Collected Papers of Albert Einstein. The Berlin Years: Correspondence 1914-1918.* (Eds. R. Schulmann et al. Princeton. N.Y. Princeton Univ. Press.) (1998).

[18] T. Sauer. *The Relativity of Discovery: Hilbert's First Note on the Foundations of Physics.* (Archive for History of Exact Sciences.) **53** 529-575 (1999).

Рукопись поступила 28 января 2004 г.

А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили, В.А. Петров
Как были открыты уравнения Гильберта-Эйнштейна?.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В. Ежела.

Подписано к печати .01.2004. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 2,87. Уч.-изд.л. 2,3. Тираж 160. Заказ 192.
Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2004–7, И Ф В Э, 2004