ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2004–27
ОТФ

Р.Г. Джафаров,[1] В.Е. Рочев

ДВЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ — ДВЕ РАЗНЫЕ МОДЕЛИ НАМБУ–ИОНА-ЛАЗИНИО

Протвино 2004

[1] Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Джафаров Р.Г., Рочев В.Е. Две регуляризации — две разные модели Намбу–Иона-Лазинио : Препринт ИФВЭ 2004–27. – Протвино, 2004. – 15 с., 4 табл., библиогр.: 14.

Проведено сравнение модели Намбу – Иона-Лазинио с регуляризацией 4-мерным обрезанием и модели Намбу – Иона-Лазинио с размерно-аналитической регуляризацией. Показано, что они представляют собой, по существу, две различные модели взаимодействия легких кварков.

В приближении среднего поля различие проявляется в поведении скалярной амплитуды в пороговой области. В отличие от регуляризации 4-мерным обрезанием, где вблизи порога можно выделить полюсной член, соответствующий сигма-мезону, в размерно-аналитической регуляризации особенность скалярной амплитуды является неполюсной, а при некотором значении параметра регуляризации и вовсе исчезает.

Еще существеннее различие двух моделей в следующем за главным порядке разложения среднего поля. Вычисление мезонных вкладов в кварковый киральный конденсат и динамическую массу кварка показывают, что эти вклады, несмотря на свою относительную малость, могут дестабилизировать модель Намбу – Иона-Лазинио с регуляризацией 4-мерным обрезанием. В модели с размерно-аналитической регуляризацией, напротив, происходит стабилизация, выражающаяся в том, что значения параметра регуляризации сдвигаются в область стабильности, где сами эти вклады уменьшаются.

Abstract

R.G. Jafarov, V.E. Rochev Two regularizations – two different models of Nambu–Jona-Lasinio : IHEP Preprint 2004–27. – Protvino, 2004. – p. 15, tables 4, refs.: 14.

Two variants of the Nambu–Jona-Lasinio model – the model with 4-dimensional cutoff and the model with dimensionally-analytical regularization – are systematically compared. It is shown that they are, in essence, two different models of light-quark interaction. In the mean-field approximation the distinction becomes apparent in a behavior of scalar amplitude near the threshold. For 4-dimensional cutoff the pole term can be extracted, which corresponds to sigma-meson. For dimensionally-analytical regularization the singularity of the scalar amplitude is not pole, and this singularity is quite disappeared at some value of the regularization parameter.

Still more essential distinction of these models exists in the next-to-leading order of mean-field expansion. The calculations of meson contributions in the quark chiral condensate and in the dynamical quark mass demonstrate, that these contributions though their relatively smallness can destabilize the Nambu–Jona-Lasinio model with 4-dimensional cutoff. On the contrary, the Nambu–Jona-Lasinio model with dimensionally-analytical regularization is stabilized with the next-to-leading order, i.e. the value of the regularization parameter shifts to the stability region, where these contributions decrease.

Введение

Модель Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [1] с кварковыми полями [2] является одной из наиболее успешных эффективных моделей квантовой хромодинамики легких адронов в непертурбативной области (см., например, обзоры [3] и [4] и цитируемую там литературу).

Поскольку в основе модели НИЛ лежит неперенормируемое четырехфермионное взаимодействие, то весьма существенным моментом применения модели является регуляризация. В литературе уже высказывалось мнение о том, что модель НИЛ в разных регуляризациях может приводить к разным физическим результатам. Но в применении к наиболее употребительным регуляризациям модели НИЛ (таким, например, как регуляризация четырехмерным обрезанием в евклидовом пространстве импульсов в сравнении с регуляризацией "собственного времени" Фока-Швингера или регуляризацией Паули-Вилларса) это утверждение не означает сколько-нибудь принципиального различия в описании основных эффектов в рамках главного приближения модели. В следующем за главным порядке, включающем в себя мезонные вклады в киральный конденсат и поправки к пропагатору кварка, эти различия проявляются отчетливее (см., например, [5] - [7]), но и тут они не меняют существенно физического содержания модели . Существует, однако, регуляризация модели НИЛ, в которой физические эффекты отличаются от эффектов классического варианта модели, основанного на регуляризации 4-мерным обрезанием, уже на уровне двухчастичных амплитуд. Это размерная регуляризация, рассматриваемая как вариант аналитической регуляризации. Традиционная трактовка размерной регуляризации как выхода в D-мерное пространство в применении к модели НИЛ наталкивается на весьма существенную трудность: параметр регуляризации, т.е. величина отклонения от физической размерности пространства, в этой эффективной модели входит в выражения для наблюдаемых величин, что делает весьма затруднительной интерпретацию результатов. В альтернативной трактовке размерной регуляризации как варианта аналитической все вычисления производятся в четырехмерном евклидовом пространстве, а параметр регуляризации трактуется как степень весовой функции, регуляризирующей расходящиеся интегралы.[1] Такая трактовка размерной регуляризации была развита для модели НИЛ

[1] Мы будем называть эту регуляризацию размерно-аналитической. Отметим, что в применении к перенормируемым моделям этот вариант размерной регуляризации приводит к тем же результатам, что и обычная трактовка.

в приближении среднего поля в работе [8]. В работе [9] в рамках этой регуляризации были вычислены мезонные вклады в киральный конденсат. Подчеркнем, что при такой трактовке размерной регуляризации параметр регуляризации вовсе не является отклонением от физической размерности пространства. Возможная трактовка этого параметра (см. [9]) состоит в понимании его как степени некоторого эффективного влияния глюонов на четырехфермионное самодействие кварков модели НИЛ.

В предлагаемой работе мы проводим систематическое сравнение SU(2)-модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией с классическим вариантом модели НИЛ, в котором используется регуляризация четырехмерным обрезанием.

В разделах 1 и 2 приведены результаты главного приближения для кирального конденсата и двухчастичных амплитуд. Здесь различие проявляется в скалярной амплитуде. В регуляризации 4-мерным обрезанием и других подобных ей регуляризациях скалярная амплитуда содержит сингулярность полюсного типа, интерпретируемую как сигма-мезон с массой $2m$, где m – масса кварка. В размерно-аналитической регуляризации, однако, сингулярность имеет неполюсной характер (а при некоторых значениях параметра регуляризации эта сингулярность и вовсе исчезает), и эта трактовка представляется несостоятельной. Отметим, что интерпретация особенности скалярной амплитуды в модели НИЛ как частицы наталкивается на известные трудности при сопоставлении с физическим спектром скалярных мезонных резонансов (см., например, [10]).

Основное различие проявляется в следующем за главным порядке разложения среднего поля, поэтому основными результатами являются вычисления, проделанные в этом порядке в разделе 3. Помимо поправок к киральному конденсату, нами здесь вычислены также поправки к массе кварка в обеих регуляризациях. При этом, в отличие от работы [9], где для скалярной амплитуды в размерно-аналитической регуляризацией было использовано полюсное приближение, мы использовали здесь более точное приближение главной сингулярности. В обеих регуляризациях основным вкладом в киральный конденсат первого порядка является вклад псевдоскалярной амплитуды (пиона). Но в размерно-аналитической регуляризации этот вклад того же знака, что и главный, а в регуляризации 4-мерным обрезанием – противоположного. Это различие является определяющим при решении вопроса об устойчивости модели относительно квантовых флюктуаций, вызываемых мезонными амплитудами. В разделе 4 проведена фиксация параметров модели с учетом мезонных поправок. При этом оказывается, что совпадение знака мезонных вкладов со знаком главного приближения в модели с размерно-аналитической регуляризацией обеспечивает устойчивость модели относительно квантовых флюктуаций. В модели с регуляризацией 4-мерным обрезанием напротив, такие поправки, имеющие противоположный знак, могут приводить к дестабилизации. Эта дестабилизация проявляется в том, что само существование набора параметров модели оказывается критически зависящим от значения кирального конденсата c: при $|c| \leq 230$ МэВ система уравнений для параметров модели не имеет решения. Таким образом, $SU(2)$-модель НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием оказывается в опасной зоне нестабильности относительно квантовых флюктуаций, причем простая оценка показывает, что для $U(3)$-модели ситуация может только ухудшиться. Этот наш результат в известной мере перекликается с утверждением работы [11] (вызвавшей активную дискуссию [7], [12]), в которой применимость модели НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием к описанию явления динамического нарушения киральной симметрии ставится под сомнение. Таким образом, мы можем утверждать, что модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией и модель НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием представляют собой, по существу, две различные модели взаимодействия легких кварков в непертурбативной области.

1. Главный порядок и киральный конденсат

Мы рассматриваем модель НИЛ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\hat{\partial}\psi + \frac{g}{2}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau^a\psi)^2\right]. \tag{1}$$

Здесь $\psi \equiv \psi_j^{\alpha,c}$, где $\alpha = 1,2,3,4$ – дираковский спинорный индекс, $c = 1,\ldots,n_c$ – цветовой индекс, $j = 1,2$ – изотопический (ароматный) индекс; τ^a – генераторы группы $SU(2)$ (матрицы Паули), $a = 1,2,3$. Эта модель обладает киральной симметрией группы $SU_V(2)\times SU_A(2)$.

Разложение среднего поля в формализме билокального источника [13] для этой модели строится по схеме, изложенной в работе [9].

В главном приближении единственной связной функцией является пропагатор кварка

$$S^{(0)}_{cd,jk} = \delta_{cd}\delta_{jk}(m - \hat{p})^{-1}, \tag{2}$$

где динамическая масса кварка m есть решение уравнения самосогласования

$$1 = -8ign_c \int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - q^2}. \tag{3}$$

(Здесь и всюду в дальнейшем в интегрирование по импульсному пространству включаем фазовый фактор: $d\tilde{q} \equiv d^4q/(2\pi)^4$.)

Основным параметром порядка, определяющим степень динамического нарушения киральной симметрии (ДНКС), является величина

$$\chi =< 0|\bar{\psi}\psi|0 >= i\,\mathrm{tr}\,S(x)|_{x\to 0},$$

где след берется по всем дискретным индексам. Легко видеть, что в главном порядке из формул (2) и (3) следует

$$\chi^{(0)} = i\,\mathrm{tr}\,S^{(0)}(x)|_{x\to 0} = -\frac{m}{g}. \tag{4}$$

Эта формула не зависит от регуляризации.

Кварковый киральный конденсат c определяется для каждого аромата в отдельности и в рассматриваемом нами киральном пределе есть

$$c = \left(\frac{\chi}{2}\right)^{1/3}. \tag{5}$$

Интеграл в уравнении (3) является расходящимся и должен пониматься как некоторая регуляризация. В евклидовом пространстве импульсов уравнение (3) принимает вид

$$1 = \frac{gn_c}{2\pi^2}\int \frac{q_e^2 dq_e^2}{m^2 + q_e^2}.$$

Введем в подынтегральное выражение весовую функцию $w(q_e^2)$, вид которой будет определять выбор регуляризации. Для 4-мерного обрезания весовая функция выбирается в виде

$$w_\Lambda(q_e^2) = \theta(\Lambda^2 - q_e^2), \tag{6}$$

и уравнение (3) принимает вид

$$1 = \kappa_\Lambda \left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \log(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2})\right), \tag{7}$$

где $\kappa_\Lambda = gn_c\Lambda^2/2\pi^2$. Это соотношение в точности соответствует классическому результату работы [1].

Для размерно-аналитической регуляризации весовую функцию выбираем в виде

$$w_\xi(q_e^2) = \frac{1}{\Gamma(1-\xi)} \left(\frac{4\pi M^2}{q_e^2}\right)^{1+\xi}. \tag{8}$$

Интеграл по dq_e^2 от 0 до ∞ сходится при $0 < \xi < 1$, и уравнение (6) в размерно-аналитической регуляризации принимает вид

$$1 = \kappa\Gamma(\xi) \left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right)^{1+\xi}, \tag{9}$$

где $\kappa = gn_cm^2/2\pi^2$. Множители $\frac{1}{\Gamma(1-\xi)}$ и $(4\pi)^{1+\xi}$ в весовой функции (8) вводятся для того, чтобы результат интегрирования в точности соответствовал стандартной прескрипции размерной регуляризации как формальному выходу в D-мерное пространство. При этом размерный параметр M совпадает со стандартным параметром размерной регуляризации. Хотя используемая нами трактовка размерно-аналитической регуляризации, разработанная в работе [8], принципиально отлична от стандартной трактовки и все наши вычисления производятся в обычном 4-мерном пространстве, удобство введения таких коэффициентов заключается в том, что можно использовать для вычислений хорошо известные результаты, полученные в стандартной трактовке. Отметим, что параметр ξ отличен от обычно вводимого параметра ε, такого, что $D = 4-2\varepsilon$. Как легко видеть, они связаны соотношением $\varepsilon = 1+\xi$. Введение этого нового обозначения проделано для того, чтобы избежать ненужных ассоциаций со стандартной трактовкой размерной регуляризации. Кроме того, именно в терминах параметра ξ все последующие формулы модели НИЛ имеют наиболее простой вид.

2. Двухчастичная амплитуда и параметры модели в главном приближении

Двухчастичная амплитуда первого шага A (связная часть ампутированной двухчастичной функции) имеет следующую цветовую и ароматную структуру [9]:

$$A^{cd,jk}_{c'd',j'k'} = \delta^{cd}\delta^{c'd'} \left[\delta_{jk}\delta_{j'k'}A_\sigma + \tau^a_{jk}\tau^a_{j'k'}A_\pi\right]. \tag{10}$$

Здесь A_σ есть скалярная амплитуда, а A_π – псевдоскалярная амплитуда. В импульсном пространстве эти амплитуды модели НИЛ зависят только от одной импульсной переменной p – суммы импульсов кварка и антикварка – и имеют следующий вид [9]:

$$A_\sigma(p) = -\frac{ig}{1 - L_S(p)}, \tag{11}$$

где $L_S(p) = ig \int d\tilde{q} \ \mathrm{tr}\, S^{(0)}(p+q) S^{(0)}(q)$ – скалярная кварковая петля, и

$$A_\pi(p) = \frac{ig}{1 + L_P(p)}, \tag{12}$$

где $L_P(p) = ig \int d\tilde{q} \ \mathrm{tr}\, S^{(0)}(p+q)\gamma_5 S^{(0)}(q)\gamma_5$ – псевдоскалярная кварковая петля.

Используя тождества

$$\frac{m^2 + q^2 + (pq)}{(m^2 - (p+q)^2)(m^2 - q^2)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{m^2 - q^2} - \frac{1}{m^2 - (p+q)^2} + \frac{4m^2 - p^2}{(m^2 - (p+q)^2)(m^2 - q^2)}\right),$$

$$\frac{m^2 - q^2 + (pq)}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - q^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^2 - q^2} + \frac{1}{m^2 - (p-q)^2} + \frac{p^2}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - q^2)}\right)$$

и уравнение самосогласования (3), нетрудно получить для A_σ и A_π следующие представления:

$$A_\sigma(p) = \frac{1}{4n_c I_0(p^2)(4m^2 - p^2)}, \tag{13}$$

$$A_\pi(p) = \frac{1}{4n_c I_0(p^2) p^2}. \tag{14}$$

Здесь

$$I_0(p^2) = \int d\tilde{q} \frac{1}{(m^2 - (p+q)^2)(m^2 - q^2)}. \tag{15}$$

Интеграл I_0 вычисляется по вышеприведенным правилам. Переходя в евклидову метрику, вводя стандартную фейнмановскую параметризацию и сдвигая импульсную переменную (что возможно в силу трансляционной инвариантности процедуры, см. [8]), мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами, далее мы вводим под интеграл весовую функцию (6) (для 4-мерного обрезания) либо (8) (для размерно-аналитической регуляризации) и вычисляем интеграл по dq_e^2. Для размерно-аналитической регуляризации (DAR) мы получаем результат, который снова в точности соответствует результату интегрирования с формальным переходом в D-мерное пространство:

$$I_0^{DAR}(p^2) = \frac{i(4\pi)^{1+\xi}\Gamma(1+\xi)}{(4\pi)^2} \int_0^1 du \left(\frac{M^2}{m^2 - u(1-u)p^2}\right)^{1+\xi}.$$

Интеграл по dq_e^2 сходится при $-1 < \xi < 1$. С учетом уравнения самосогласования (9) мы получим окончательно

$$I_0^{DAR}(p^2) = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{\xi}{\kappa} \int_0^1 du \left(1 - u(1-u)\frac{p^2}{m^2}\right)^{-1-\xi} = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{\xi}{\kappa} F(1+\xi, 1; 3/2; \frac{p^2}{4m^2}), \tag{16}$$

где $F(a,b;c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Для регуляризации 4-мерным обрезанием (FDC) мы получаем соответственно

$$I_0^{FDC}(p^2) = \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 du\Big[\log\Big(1+\frac{\Lambda^2}{m^2-u(1-u)p^2}\Big) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2-u(1-u)p^2}\ \Big]. \qquad (17)$$

Полученные выражения для конденсата и двухчастичных амплитуд позволяют фиксировать значения параметров модели в главном приближении разложения среднего поля. Для этой цели мы используем не зависящие от регуляризации формулы (4), (5) и формулу для распадной константы пиона в модели НИЛ (см. [3]):

$$f_\pi^2 = -4in_c m^2 I_0(0). \qquad (18)$$

Для размерно-аналитической регуляризации из (16) получаем

$$I_0^{DAR}(0) = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{\xi}{\kappa}, \qquad (19)$$

а для 4-мерного обрезания из (17):

$$I_0^{FDC}(0) = \frac{i}{(4\pi)^2}\Big[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2}\Big]. \qquad (20)$$

Соответственно мы получаем в размерно-аналитической регуляризации весьма простую формулу

$$(f_\pi^2)^{DAR} = \frac{\xi}{2g}. \qquad (21)$$

В 4-мерном обрезании аналогичная формула имеет вид

$$(f_\pi^2)^{FDC} = \frac{3m^2}{4\pi^2}\Big[\log(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}) - \frac{\Lambda^2}{m^2+\Lambda^2}\Big]. \qquad (22)$$

Эти формулы вкупе с формулами для конденсата (4)-(5) и уравнением самосогласования (уравнение (9) для размерно-аналитической регуляризации и уравнение (7) для 4-мерного обрезания) позволяют нам определить значения основных параметров модели.

Для распадной константы пиона мы выбираем значение $f_\pi = 93$ МэВ. Киральный кварковый конденсат c не является непосредственно измеримой величиной, и мы будем определять набор параметров для нескольких наиболее характерных значений этой величины. В размерно-аналитической регуляризации, кроме того, необходимо фиксировать также значение величины M ("точки вычитания"). В работе [9] мы использовали для этой цели значение ширины распада $\pi^0 \to 2\gamma$. Анализ результатов этой работы показывает, что в весьма широком диапазоне значений конденсата значение величины M практически неизменно и составляет $M \approx 100$ МэВ. Поэтому в данной работе мы будем полагать $M = 100$ МэВ.

Результаты фиксации параметров модели в главном приближении (при $n_c = 3$) даны в табл. 1 (размерно-аналитическая регуляризация) и в табл. 2 (4-мерное обрезание).

Таблица 1. Параметры модели в главном порядке (размерно-аналитическая регуляризация): киральный конденсат c, динамическая масса кварка m, параметр регуляризации ξ и безразмерная константа связи κ.

c (МэВ)	m (МэВ)	ξ	$\kappa = 3gm^2/2\pi^2$
-210	347	0.325	0.344
-220	350	0.285	0.307
-230	355	0.252	0.279
-240	360	0.225	0.256
-250	366	0.203	0.239

Таблица 2. Параметры модели в главном порядке (регуляризация 4-мерным обрезанием): киральный конденсат c, динамическая масса кварка m, параметр регуляризации Λ и безразмерная константа связи κ_Λ.

c (МэВ)	m (МэВ)	Λ (МэВ)	$\kappa_\Lambda = 3g\Lambda^2/2\pi^2$
-210	423	733	1.86
-220	323	791	1.448
-230	276	873	1.315
-240	253	947	1.240
-250	236	1029	1.187

Как видно из этих таблиц, значение основного параметра – массы кварка m – в модели с 4-мерным обрезанием гораздо чувствительнее к значению кирального конденсата, чем в модели с размерно-аналитической регуляризацией. В то же время следует отметить, что каких-либо принципиальных отличий в этих вариантах модели НИЛ на уровне главного приближения для пропагатора кварка и двухчастичных амплитуд не наблюдается, за исключением поведения скалярной амплитуды A_σ в пороговой области. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Псевдоскалярная амплитуда A_π естественным образом ассоциируется с пионом, который в пределе киральной симметрии является безмассовым голдстоуновским возбуждением, связанным с динамическим нарушением киральной симметрии в рассматриваемой модели. В обеих рассматриваемых регуляризациях мы можем рассматривать как пропагатор пиона полюсное приближение для A_π, соответствующее главной сингулярности псевдоскалярной амплитуды:

$$A_\pi^{pole}(p) = \frac{1}{4n_c I_0(0) p^2}, \tag{23}$$

где $I_0(0)$ определяется формулами (19) для размерно-аналитической регуляризации и (20) для 4-мерного обрезания соответственно.

Со скалярной амплитудой ситуация иная. Функция $I_0(p^2)$ как для размерно-аналитической регуляризации, так и для 4-мерного обрезания, имеет разрез с началом в точке $p^2 = 4m^2$. Для 4-мерного обрезания, тем не менее, можно определить пропагатор скалярного сигма-мезона как

$$A_\sigma^{pole}(p) = \frac{1}{4n_c I_0(4m^2)(4m^2 - p^2)}, \tag{24}$$

поскольку
$$I_0^{FDC}(4m^2) = \frac{i}{(4\pi)^2}\Big[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2} + \frac{\Lambda}{m}\arctan\frac{m}{\Lambda}\Big]$$
— конечная величина. По-иному обстоит дело в размерно-аналитической регуляризации. Величина $I_0^{DAR}(4m^2)$ конечна лишь при $\xi < -1/2$:
$$I_0^{DAR}(4m^2)|_{\xi<-1/2} = -\frac{i}{8gn_c m^2}\frac{\xi}{1+2\xi}.$$
Для того, чтобы интерпретировать сигма-мезон как частицу в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией, мы можем сделать следующее: поскольку в области $-1 < \xi < -1/2$ интеграл I_0 сходится, мы можем использовать вышеприведенное значение в точке $p^2 = 4m^2$ как отправную точку для аналитического продолжения по параметру ξ полюсной части амплитуды в область физических значений $0 < \xi < 1$. Тогда пропагатор сигма-мезона в размерно-аналитической регуляризации будет иметь следующий вид:
$$(A_\sigma^{pole}(p))^{DAR} = \frac{2igm^2(1+2\xi)}{(4m^2-p^2)\xi}. \tag{25}$$
Это выражение использовалось для вычисления вклада сигма-мезона в киральный конденсат в работе [9]. Конечно, такая процедура определения пропагатора сигма-мезона выглядит несколько искусственной. Более последовательной процедурой представляется выделение главной сингулярной части амплитуды в области физических значений параметра регуляризации ξ. Для псевдоскалярной амплитуды выделение главной сингулярности в окрестности точки $p^2 = 0$ приводит к тому же результату (23), т.е. пион в размерно-аналитической регуляризации имеет все свойства обычной наблюдаемой частицы. Для скалярной амплитуды это не так. При $p^2 \to 4m^2$ в области $0 < \xi < 1$:
$$I_0^{DAR} \cong \frac{i\sqrt{\pi}\Gamma(\xi+1/2)}{16gn_c m^2\Gamma(\xi)} \cdot \left(\frac{4m^2}{4m^2-p^2}\right)^{\xi+1/2},$$
и, соответственно, главной сингулярностью (LS) скалярной амплитуды, т.е. главным членом разложения по степеням $4m^2-p^2$, является выражение
$$(A_\sigma^{LS})^{DAR} \cong -\frac{ig\Gamma(\xi)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\xi+1/2)} \cdot \left(\frac{4m^2}{4m^2-p^2}\right)^{1/2-\xi}. \tag{26}$$
Таким образом, главный сингулярный член скалярной амплитуды в модели с размерно-аналитической регуляризацией имеет принципиально иное поведение, чем в модели с 4-мерным обрезанием. Вместо полюсного члена, который естественно интерпретировать как пропагатор сигма-частицы, мы имеем в размерно-аналитической регуляризации степенное поведение с показателем, зависящим от параметра регуляризации ξ. Более того, как было отмечено в [14], из выражения (16) для I_0^{DAR} следует, что при значении параметра $\xi = 1/2$ благодаря соотношению
$$F(3/2,1;3/2;\frac{p^2}{4m^2}) = \frac{4m^2}{4m^2-p^2}$$

происходит сокращение вкладов в двухчастичную амплитуду, и при этом значении параметра регуляризации мы получаем для амплитуд очень простые выражения:

$$A_\pi = ig - \frac{4igm^2}{p^2}, \quad A_\sigma = -ig, \tag{27}$$

т.е. при $\xi = 1/2$ скалярная амплитуда вовсе не имеет особенности – сигма-мезон исчезает! (Подчеркнем, что результат (27) является точным следствием формул (13), (14), (16) без каких-либо приближений типа вышеприведенного приближения главной сингулярности.) Таким образом, мы приходим к выводу, что в размерно-аналитической регуляризации при физических значениях параметра скалярная амплитуда A_σ модели НИЛ не содержит полюсного члена, который можно интерпретировать как физический скалярный мезон.

3. Мезонные вклады в киральный конденсат и в пропагатор кварка

Уравнения первого шага разложения среднего поля (см. [9]) определяют поправки к пропагатору кварка. Массовый оператор первого порядка $\Sigma^{(1)} = S_0^{-1} \star S^{(1)} \star S_0^{-1}$, где $S^{(1)}$ – поправка первого порядка к пропагатору кварка, определяется в x-пространстве уравнением

$$\Sigma^{(1)}(x) = S^{(0)}(x)A_\sigma(x) + 3S^{(0)}(-x)A_\pi(x) + ig\delta(x)\,\mathrm{tr}\,S^{(1)}(0). \tag{28}$$

Вводя безразмерные массовые функции 1-го порядка $a^{(1)}$ и $b^{(1)}$:

$$\Sigma^{(1)} \equiv a^{(1)}\hat{p} - b^{(1)}m, \tag{29}$$

а также киральный конденсат первого порядка

$$\chi^{(1)} = i\mathrm{tr}S^{(1)}(0) \tag{30}$$

и отношение конденсата первого порядка к конденсату главного приближения

$$r \equiv \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}},$$

мы получим из (28) выражения для $a^{(1)}$ и $b^{(1)}$ в импульсном пространстве:

$$p^2a^{(1)}(p^2) = \int d\tilde{q}\frac{p^2-(pq)}{m^2-(p-q)^2}[A_\sigma(q) - 3A_\pi(q)], \tag{31}$$

$$b^{(1)}(p^2) = r - \int \frac{d\tilde{q}}{m^2-(p-q)^2}[A_\sigma(q) + 3A_\pi(q)]. \tag{32}$$

Из формул (31) и (32) следует, что поправки к пропагатору состоят из двух частей: пионные поправки, обусловленные псевдоскалярной амплитудой A_π и вклады, обусловленные скалярной амплитудой A_σ: $a^{(1)} = a_\pi^{(1)} + a_\sigma^{(1)}$; $b^{(1)} = b_\pi^{(1)} + b_\sigma^{(1)}$.

Для отношения конденсата первого порядка (30) к конденсату главного приближения (4) мы получаем формулу

$$r = -\frac{g\chi^{(1)}}{m} = -8ign_c\int d\tilde{p}\frac{2p^2a_1-(m^2+p^2)b_1}{(m^2-p^2)^2}. \tag{33}$$

После вычисления поправок к конденсату можно перейти к определению поправок к массе кварка. Обратный пропагатор кварка есть

$$S^{-1} = m - \hat{p} - \Sigma^{(1)} = b(p^2) - a(p^2)\hat{p} = (1 + b^{(1)})m - (1 + a^{(1)})\hat{p}.$$

Если пропагатор S имеет полюс в точке $p^2 = m_r^2$, соответствующий частице с массой m_r, то

$$b(m_r^2) = m_r a(m_r^2).$$

Поскольку по своему смыслу $a^{(1)}$ и $b^{(1)}$ являются малыми добавками, то разлагая $a^{(1)}(m_r^2)$ и $b^{(1)}(m_r^2)$ вблизи точки m, получаем формулу для поправки к массе кварка $\delta m \equiv m_r - m$:

$$\frac{\delta m}{m} \cong b^{(1)}(m^2) - a^{(1)}(m^2). \tag{34}$$

3.1. Вклад пиона

Пионный вклад в пропагатор кварка определяется формулами

$$p^2 a_\pi^{(1)}(p^2) = -3 \int d\tilde{q} \frac{p^2 - (pq)}{m^2 - (p-q)^2} A_\pi(q), \tag{35}$$

$$b_\pi^{(1)}(p^2) = r_\pi - 3 \int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - (p-q)^2} A_\pi(q). \tag{36}$$

Для вычисления мы будем использовать полюсное приближение (23). Вычисление сводится к вычислению интегралов

$$I_0(p^2; m^2, \mu^2) = \int \frac{d\tilde{q}}{(m^2 - (p-q)^2)(\mu^2 - q^2)}, \tag{37}$$

$$I_\nu(p^2; m^2, \mu^2) = \int \frac{q_\nu d\tilde{q}}{(m^2 - (p-q)^2)(\mu^2 - q^2)} \tag{38}$$

при $\mu^2 \to 0$.

Эти интегралы вычисляются по тем же правилам, что и выше (см. гл. 2 и 3). Далее в размерно-аналитической регуляризации пионный вклад дается формулой (33). Интеграл вычисляется в замкнутом виде, и результат имеет крайне простой вид:

$$(r_\pi)^{DAR} = \frac{3}{8 n_c \xi}. \tag{39}$$

(См. также [9], где этот результат получен несколько иным способом.)

Для вычисления пионного вклада в регуляризации 4-мерным обрезанием используем формулы (23) и (20). Далее вклад пиона в конденсат вычисляется по формуле (33). В регуляризации 4-мерным обрезанием результат для r_π не описывается столь простой формулой, как в размерно-аналитической, но вычисление не представляет никаких принципиальных затруднений. Отметим, что, в то время как в размерно-аналитической регуляризации r_π является функцией параметра регуляризации ξ, в регуляризации 4-мерным обрезанием эта величина есть функция отношения $x \equiv \Lambda^2/m^2$:

$$(r_\pi)^{FDC} = r_\pi(\Lambda^2/m^2).$$

Приведем значения величины $(r_\pi)^{FDC}$ для двух характерных значений этого отношения.[2] При $x = 3$ (это значение соответствует значению кирального конденсата главного приближения $c^{(0)} = -210$ МэВ) вычисление дает $(r_\pi)^{FDC} = -0.272$. При $x = 19$ (это значение соответствует значению кирального конденсата главного приближения $c^{(0)} = -250$ МэВ) получаем $(r_\pi)^{FDC} = -0.183$.

Вклад пиона $\delta m_{(\pi)}$ в массу кварка вычисляется по формуле (34). В размерно-аналитической регуляризации мы получаем (с учетом уравнения самосогласования (9) и формулы (39))

$$\left(\frac{\delta m_{(\pi)}}{m}\right)^{DAR} = (r_\pi)^{DAR} - \frac{3}{8n_c\xi} = 0, \tag{40}$$

то есть в размерно-аналитической регуляризации пионная поправка к массе кварка равна нулю.

В регуляризации 4-мерным обрезанием пионная поправка к массе кварка дается формулой

$$\left(\frac{\delta m_{(\pi)}}{m}\right)^{FDC} = (r_\pi)^{FDC} + \frac{3}{n_c} h_\pi(\Lambda^2/m^2), \tag{41}$$

где

$$h_\pi(x) = \frac{\log(1+x)}{8[\log(1+x) - \frac{x}{1+x}]}.$$

Знаки величин $(r_\pi)^{FDC}(x)$ и $h_\pi(x)$ противоположны, поэтому их вклады в δm взаимно сокращаются. Более того, так же, как и для размерно-аналитической регуляризации, пионная поправка к массе кварка равна нулю. Этот результат, в отличие от точного результата (40) размерно-аналитической регуляризации, получен нами путем вычислений в пределах заданной точности входящих величин. Такое совпадение результатов размерно-аналитической регуляризации и регуляризации 4-мерным обрезанием наводит на мысль о том, что равенство нулю пионного вклада в массу кварка является фактом модели НИЛ, не зависящим от регуляризации. Нам, однако, не удалось показать это аналитически.

3.2. Скалярный вклад

Рассмотрим вклад скалярной амплитуды A_σ в конденсат и массу кварка. Согласно (32) и (31), имеем

$$p^2 a_\sigma^{(1)} = \int d\tilde{q} \frac{p^2 - (pq)}{m^2 - (p-q)^2} A_\sigma(q), \tag{42}$$

$$b_\sigma^{(1)} = r_\sigma - \int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - (p-q)^2} A_\sigma(q). \tag{43}$$

Для вычисления этого вклада мы будем использовать приближение главной сингулярности:

$$A_\sigma^{LS} = \frac{1}{4n_c(4m^2 - p^2) I_0(p^2)|_{p^2 \to 4m^2}}.$$

В размерно-аналитической регуляризации такое приближение описывается формулой (26). Далее по формуле (33) получаем величину r_σ. Вычисление дает нам следующие значения

[2]Все приведенные здесь и далее численные значения величин соответствуют физическому значению числа цветов $n_c = 3$.

сигма-вклада в размерно-аналитической регуляризации: при $\xi = 0.25$ получаем $(r_\sigma)^{DAR} = -0.033$; при $\xi = 0.4$ получаем $(r_\sigma)^{DAR} = -0.01$. Мы видим, что сигма-вклад мал по сравнению с пионным вкладом и имеет другой знак, то есть уменьшает общий вклад.[3]

В регуляризации 4-мерным обрезанием приближение главной сингулярности для A_σ совпадает с полюсным приближением (24). Величина r_σ вычисляется по формуле (33). Эта величина так же, как и r_π, в регуляризации 4-мерным обрезанием есть функция отношения $x \equiv \Lambda^2/m^2$:

$$(r_\sigma)^{FDC} = r_\sigma(\Lambda^2/m^2).$$

При $x = 3$ получаем $(r_\sigma)^{FDC} = -0.007$. При $x = 19$ получаем $(r_\sigma)^{FDC} = -0.116$. В отличие от размерно-аналитической регуляризации, знак сигма-вклада в регуляризации 4-мерным обрезанием тот же, что и пионного вклада.

Поправка к массе кварка в размерно-аналитической регуляризации дается формулой

$$\left(\frac{\delta m_{(\sigma)}}{m}\right)^{DAR} = (r_\sigma)^{DAR} - \frac{\cos\pi\xi}{4^{1+\xi} n_c \pi(1/2 - \xi)}. \tag{44}$$

При $\xi = 0.25$ $\delta m^{DAR}_{(\sigma)} = -0.086m$, а при $\xi = 0.4$ $\delta m^{DAR}_{(\sigma)} = -0.056m$. Поскольку пионная поправка к массе кварка в этой регуляризации равна нулю (см. выше), то эти значения дают нам полную поправку к массе кварка в размерно-аналитической регуляризации.

В регуляризации 4-мерным обрезанием поправка к массе кварка есть

$$\left(\frac{\delta m_{(\sigma)}}{m}\right)^{FDC} = (r_\sigma)^{FDC} - \frac{1}{n_c} h_\sigma(\Lambda^2/m^2), \tag{45}$$

где

$$h_\sigma(x) = \frac{4\log(1 + x/4) - \log(1 + x)}{8[\log(1 + x) + \sqrt{x}\arctan\sqrt{\frac{1}{x}}]}.$$

При $x = 3$ $\delta m^{FDC}_{(\sigma)} = -0.022m$; при $x = 19$ $\delta m^{FDC}_{(\sigma)} = -0.158m$.

В заключение этого раздела рассмотрим вопрос о точности проделанных вычислений. Основным приближением, использованным нами при вычислении поправок к конденсату, является приближение главной сингулярности. Рассмотрим вопрос о роли остальных членов. В размерно-аналитической регуляризации оценить их роль помогают простые выражения для амплитуд при $\xi = 1/2$ (см. (27). Напомним, что эти выражения являются точными. Вычисление по формулам (31)–(33) с использованием уравнения самосогласования показывает, что вклад неполюсных членов в киральный конденсат при $\xi = 1/2$ равен нулю. Поскольку значения параметра ξ находятся вблизи этой точки (см. ниже, табл. 3), то мы можем утверждать, что и при $\xi \neq 1/2$ их вклад невелик по сравнению с основным полюсным пионным вкладом.

В регуляризации 4-мерным обрезанием вычисления по точным формулам для амплитуд (13)-(14) также показывают, что приближение главной сингулярности (в данном случае это полюсное приближение как для псевдоскалярной, так и для скалярной амплитуды) дает главный вклад в конденсат. Так, при $x = 3$ вычисление по точным формулам

[3] Отметим, что этот результат качественно тот же, что и в работе [9], где для A_σ было использовано полюсное приближение. Таким образом, выводы работы [9] о роли мезонных вкладов остаются в силе и для более точного приближения главной сингулярности, использованного в настоящей работе.

(13)-(14) дает для пионного вклада $r_\pi = -0.267$, т.е. отличается от результата полюсного приближения (см. выше, раздел 3.1) менее чем на 2%. Для сигма-вклада различие более существенно: вычисление по точным формулам дает $r_\sigma = -0.031$, но поскольку сам этот вклад гораздо меньше пионного, это различие опять-таки практически не влияет на конечный результат.

4. Параметры модели с учетом поправок

Вычисленные в предыдущем разделе поправки к киральному конденсату и массе кварка позволяют нам уточнить параметры SU(2)-модели НИЛ. Мы модифицируем формулу для конденсата следующим образом:

$$\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)} = -\frac{m}{g}(1+r). \tag{46}$$

Формула для f_π (см. (18)) остается прежней, поскольку поправки к амплитуде возникают в следующем (втором) порядке разложения среднего поля. Роль массы кварка будет играть масса m_r:

$$m_r = m + \delta m,$$

где δm определяется формулой (34). Значения параметров модели при $n_c = 3$ для этого улучшенного выбора параметров даны в табл. 3 и 4.

Таблица 3. Параметры модели с учетом поправок первого порядка (размерно-аналитическая регуляризация): киральный конденсат c, динамическая масса кварка m_r, параметр регуляризации ξ и безразмерная константа связи κ.

c (МэВ)	m_r (МэВ)	ξ	$\kappa = 3gm^2/2\pi^2$
-210	326	0.420	0.438
-220	324	0.375	0.394
-230	323	0.340	0.36
-240	323	0.307	0.329
-250	323	0.281	0.304

Таблица 4. Параметры модели с учетом поправок первого порядка (регуляризация четырехмерным обрезанием): киральный конденсат c, динамическая масса кварка m_r, параметр регуляризации Λ и безразмерная константа связи κ_Λ.

c (МэВ)	m_r (МэВ)	Λ (МэВ)	$\kappa_\Lambda = 3g\Lambda^2/2\pi^2$
-240	310	785	1.501
-250	283	819	1.408

В табл. 4 не приведены значения параметров при $c = -210$ МэВ, $c = -220$ МэВ и $c = -230$ МэВ. Это не случайно. Дело в том, что система уравнений для определения параметров, состоящая из уравнения (46), уравнения (22) и уравнения самосогласования (7), не имеет вещественных решений при $f_\pi = 93$ МэВ и при $|c| \leq 230$ МэВ. Это очень важное обстоятельство – в регуляризации 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут дестабилизировать модель НИЛ. Хотя эти вклады относительно невелики (не превышают 25% от вклада главного приближения), но их отрицательный знак приводит к нестабильности всей системы в целом. Ситуация весьма схожа с той, которая отмечена в работе [11]. Отметим, что при увеличении числа ароматов, т.е. для U(n_f)-модели НИЛ (n_f – число ароматов) ситуация может только ухудшиться, поскольку основной псевдоскалярный вклад пропорционален n_f. В то же время для размерно-аналитической регуляризации ситуация принципиально иная. Ввиду совпадения знака мезонных вкладов в конденсат и знака конденсата главного приближения в этой регуляризации происходит стабилизация модели, что хорошо видно из табл. 3: значения массы кварка m_r почти не зависят от значений c, а значения параметра регуляризации ξ увеличиваются по сравнению с соответствующими значениями главного приближения (см. табл. 1) и сдвигаются в область стабильности модели, т.е. в ту область, в которой сами эти вклады уменьшаются.

Заключение

Результаты нашей работы показывают, что модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией существенно отличается от модели НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием по крайней мере в двух аспектах.

Во-первых, это различное поведение скалярной амплитуды в пороговой области. В регуляризации 4-мерным обрезанием вблизи порога можно выделить полюсной член, который обычно ассоциируется со скалярной частицей – сигма-мезоном (отметим, однако, что обоснованные сомнения в возможности такой интерпретации были высказаны еще в работе основоположников модели [1]). В размерно-аналитической регуляризации особенность скалярной амплитуды при физических значениях параметра регуляризации является неполюсной, что, если и не исключает совсем, то делает затруднительной интерпретацию ее как физической частицы.

Но гораздо более важной нам представляется различие в поведении этих моделей относительно квантовых флюктуаций, вызываемых вкладами скалярных амплитуд в киральный конденсат. Как следует из результатов разделов 3 и 4, модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией стабильна относительно таких флюктуаций, в то время как в модели НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации. Конечно, многие физические приложения модели НИЛ связаны исключительно с главным порядком разложения среднего поля (приближением среднего поля), где возможность такой дестабилизации можно просто проигнорировать. Но, с другой стороны, существуют физические приложения модели НИЛ, связанные прежде всего с многокварковыми функциями (такие как, например, пион-пионное рассеяние, барионы и т.п.), в которых пренебрежение мезонными вкладами в пропагатор кварка заведомо некорректно с точки зрения разложения среднего поля, и, следовательно, стабильность основных параметров модели относительно таких вкладов приобретает решающее значение.

Авторы благодарны С.А. Гаджиеву и М.Л. Некрасову за полезные обсуждения. Один из авторов (Р.Г.Д.) выражает благодарность ректору БГУ А.М. Магеррамову за внимание и поддержку.

Список литературы

[1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. // Phys. Rev. **122**, 345 (1961).

[2] T. Eguchi and H. Sugawara. // Phys. Rev. D **10**, 4257 (1974);
K. Kikkawa. // Prog. Theor. Phys. **56**, 947 (1976);
H. Kleinert. In: *Understanding the Fundamental Constituents of Matter*, Ed. A. Zichichi (Plenum Press, N.Y., 1978), p.289;
D. Ebert and M.K. Volkov. // Z. Phys. C **16**, 305 (1983).

[3] S.P. Klevansky. // Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992).

[4] T. Hatsuda and T. Kunihiro. // Phys. Reports **247**, 221 (1994).

[5] E.N. Nikolov et al. // Nucl. Phys. A **608**, 411 (1996).

[6] E. Quack and S.P. Klevansky. // Phys. Rev. C **49**, 3283 (1994).
D. Ebert, M. Nagy and M.K. Volkov. // Yad. Fiz. **59**, 149 (1996).

[7] M. Oertel, M. Buballa and J. Wambach. // Nucl. Phys. A **676**, 247 (2000).

[8] S. Krewald and K. Nakayama. // Ann. of Phys. **216**, 201 (1992).

[9] R.G. Jafarov and V.E. Rochev. // Centr. Eur. J. of Phys. **2**, 367 (2004) [hep-ph/0311339].

[10] W. Ochs. *Plenary talk at "Hadron 03" (Aschaffenburg, Germany)*, hep-ph/0311144

[11] H. Kleinert and B. Van den Bossche. // Phys. Lett. B **474**, 336 (2000).

[12] E. Babaev. // Phys. Rev. D **62**, 074020 (2000);
G. Ripka. // Nucl. Phys. A **683**, 463 (2001).

[13] V.E. Rochev. // J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 3671 (1997);
V.E. Rochev and P.A. Saponov. // Int. J. Mod. Phys. A **13**, 3649 (1998);
V.E. Rochev. // J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 7379 (2000).

[14] V.E. Rochev. *Talk given at XVII International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory ("QFTHEP'2003"), (Samara–Saratov, 4-11 Sept. 2003)*, hep-ph/0312004.

Рукопись поступила 1 июля 2004 г.

Р.Г. Джафаров, В.Е. Рочев
Две регуляризации — две разные модели Намбу–Иона-Лазинио.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Л.Ф. Васильева.

Подписано к печати 05.07.04 Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 1.875. Уч.-изд.л. 1.5. Тираж 130. Заказ 285.
Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2004-27, И Ф В Э, 2004