



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2004-37
ОТФ

М.Л. Некрасов

**К ВЫСОКОТОЧНОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАССЫ
 t -КВАРКА ПО $M_{B\ell}$ -РАСПРЕДЕЛЕНИЮ
В ПОЛУЛЕПТОННЫХ РАСПАДАХ**

Протвино 2004

Аннотация

Некрасов М.Л. К высокоточному определению массы t -кварка по $M_{b\ell}$ -распределению в полулептонных распадах: Препринт ИФВЭ 2004–37. – Протвино, 2004. – 14 с., 6 рис., 2 табл., библиогр.: 20.

Исследуется вопрос о возможной оптимизации метода определения массы t -кварка на ЛHC и будущем линейном коллайдере (LC) по $M_{b\ell}$ -распределению в полулептонных распадах $t \rightarrow b\ell\nu$. Показано, что применение техники высших моментов приводит к эффективному снижению систематических и статистических погрешностей в определении M_t . В случае ЛHC это позволяет более чем в 2 раза повысить точность определения M_t , а в случае LC – приблизиться к точности, ожидаемой в подходе изучения вблизи порогового поведения полного сечения $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$.

Abstract

Nekrasov M.L. Towards Precision Determination of the Top Mass over $M_{b\ell}$ Distribution in Semi-Leptonic Decays: IHEP Preprint 2004–37. – Protvino, 2004. – p. 14, figs. 6, tables 2, refs.: 20.

A problem of possible optimization of the method of determination of the top mass over $M_{b\ell}$ distribution in semi-leptonic decays $t \rightarrow b\ell\nu$ on LHC and a future linear collider (LC) is explored. It is shown that one can decrease the systematic and statistical errors in M_t determination by considering the higher moments over the distribution. In the case of LHC this allows one to reduce more than in twice the errors, and in the case of LC to approach to precision expected at studying the near-threshold behavior of the total cross-section $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$.

Введение

Высокоточное определение массы t -кварка является важнейшей задачей исследований на коллайдерах следующего поколения [1,2,3,4]. Будучи фундаментальным параметром теории, масса t -кварка достаточно жестко связана со значениями других ее фундаментальных параметров (вследствие степенного характера вкладов M_t в поправки к наиболее точно измеряемым наблюдаемым). Это дает возможность на основе независимого определения M_t осуществить проверку стандартной модели и/или отобрать возможные сценарии ее расширения.

Значительный прогресс в этом направлении ожидается в связи с исследованиями на ЛНС, где предполагается достичь точность определения M_t порядка 1-2 ГэВ [1]. Поскольку ЛНС допускает генерацию очень большого числа t -кварков, для повышения точности определения M_t более всего критическим является снижение систематических погрешностей. Анализ [1] показывает, что с точки зрения оптимизации ошибок наиболее перспективным является метод [5], основанный на изучении распределения по инвариантной массе наблюдаемых продуктов полулептонного распада $t \rightarrow bW \rightarrow b\ell\nu$, а именно, по инвариантной массе заряженного лептона ℓ и J/ψ -мезона, рождающегося в распадах b -кварка. Введение определенных кинематических обрезаний позволяет получить в этом канале очень чистые состояния с точки зрения экспериментальной регистрации. В результате, систематическая погрешность определения M_t , оцененная в [5] методом MC моделирования, составила рекордно низкую величину 0.6-0.8 ГэВ при статистической погрешности ~ 1 ГэВ за 4 года работы ЛНС. Это является лучшим результатом среди полученных другими методами [1].

В случае линейного коллайдера (LC) [2,3,4] наиболее перспективный способ высокоточного определения M_t основывается на изучении вблизи порогового поведения полного сечения $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$. В этой области вследствие быстрого роста сечения, усиленного резонансными эффектами за счет сильного t - \bar{t} -взаимодействия, поведение сечения оказывается очень чувствительным к значению массы t -кварка. В результате, масса t может быть измерена, по крайней мере, в принципе, с очень высокой точностью. Серьезной проблемой в этом подходе являются теоретические расчеты поведения сечения вблизи порога. В настоящее время в ее решении достигнут существенный прогресс, основанный на применении метода суммирования КХД вкладов путем решения уравнения Липпмана-Швингера для функции Грина, описывающей on-shell рождение $t\bar{t}$ [6]. (Эффекты конечной ширины в

этом подходе учитываются путем введения компенсирующего фактора при вычислении фазового объема и путем введения мнимой добавки в знаменатели пропагаторов t -кварков. Тем не менее, на уровне амплитуды вылетающие t -кварки учитываются on-shell.) Теоретическая погрешность определения массы t -кварка этим методом в итоге составляет 100–200 МэВ [7,8] ¹ при экспериментальной погрешности, сильно коррелирующей с ошибкой α_s , в районе 20 МэВ [10].

Альтернативные способы определения M_t основываются на полном или частичном восстановлении кинематики событий рождений t -кварков. В основных чертах они являются общими в случаях LC и адронных коллайдеров. Однако точность в случае LC достигается много большая. Например, в e^+e^- -столкновениях при $\sqrt{s} = 500$ ГэВ систематические погрешности определения M_t методом полного восстановления событий $t\bar{t}$ в случае адронных и полулептонных каналов распадов составляют 340 и 250 МэВ соответственно [11] при статистических погрешностях порядка 100 МэВ за 1–2 года работы LC [12]. С учетом того, что далеко за порогом следует ожидать много большей точности теоретических расчетов, чем в области вблизи порога, результирующая погрешность в таких экспериментах получается близкой к ожидаемой в эксперименте по изучению околорогового поведения полного сечения.

С учетом этих результатов актуальным также становится вопрос о точности определения M_t путем анализа $M_{b\ell}$ -распределения в полулептонных распадах $t \rightarrow b\ell\nu$. В применении к LC этот метод предварительно рассматривался в [13] (см. также [3]). Однако оценка ожидаемых погрешностей до сих пор получена не была. Таким образом, вопрос о целесообразности применения данного метода к исследованиям на LC пока остается открытым.

Одна из целей настоящей работы заключается в восполнении этого пробела. Далее мы получим оценку ожидаемых погрешностей определения M_t в случае LC в подходе работы [5]. Однако, в отличие от [5], в определение инвариантной массы, по которой будем изучать распределение, мы включим вместо J/ψ всю струю b -кварка. Такой подход применялся в [13] и отчасти в [14], и в случае LC вследствие относительной чистоты конечных состояний его прямое применение может быть оправданным.

Однако главное соображение, по которому мы будем придерживаться указанного подхода, заключается в том, что распределение $M_{b\ell}$ в любом случае “проявляется” на определенном внутреннем этапе анализа, непосредственно предшествующем определению M_t . Следовательно, анализ данных можно осуществить после приведения их к виду $M_{b\ell}$ -распределения. Возникающие при этом систематические погрешности в $M_{b\ell}$ -распределении являются главным источником образования систематических погрешностей определения M_t . Указанный подход позволит нам единым образом подойти к анализу данных в случаях LHC и LC, и исследовать с этих позиций вопрос о возможной оптимизации алгоритма извлечения M_t из массива данных. Исследование вопроса о возможной оптимизации метода определения M_t является основной целью настоящей работы.

В следующем разделе мы детализируем постановку исследуемой проблемы. В разделах 2 и 3 формулируем модель, в рамках которой определяем погрешности ΔM_t . Значения

¹ Данная оценка соответствует достигнутому уровню точности суммирования КХД вкладов. Однако остается неясным вопрос о погрешности самого метода вычислений, использующего on-shell амплитуду для вылетающих t -кварков. Напомним, что в случае парного рождения W бозонов приближение подобного рода (DPA) оказалось непригодным для описания сечения вблизи порога — см., например, [9] и указанную там литературу.

параметров модели фиксируем в разделе 4, и там же определяем количественные результаты для ΔM_t . Обсуждение полученных результатов, а также обсуждение сопутствующих теоретических вопросов, связанных с высокоточным определением M_t , мы проводим в заключительном разделе 5.

1. Постановка задачи

Мы рассматриваем процессы

$$e^+ e^- (q\bar{q}, gg) \rightarrow t\bar{t} \rightarrow bW bW \rightarrow b\nu bq_1 q_2 \rightarrow \{b\text{-jet} + \ell\} + \{3\text{jet}\}, \quad (1)$$

в которых струя b -кварка, лептон $\ell = \{e, \mu\}$ и невидимое в конечном состоянии нейтрино образовались в результате распада одного из t -кварков, а остальные 3 струи — в результате адронных распадов другого t -кварка. В эксперименте регистрируются указанные выше конечные состояния и измеряется распределение

$$F(q) = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dq}. \quad (2)$$

Здесь σ — сечение процесса (1); $q \equiv M_{b\ell}$ — инвариантная масса системы $b\text{-jet} + \ell$ (см. замечание в конце предыдущего раздела).

Для моделирования результатов эксперимента мы воспользуемся следующими предположениями. Прежде всего будем считать, что существует приемлемая модель для оценки вклада фоновых процессов, остающихся после введения необходимого набора кинематических обрезаний². Тем самым мы полагаем, что существует приемлемый способ выделения сигнала из массива данных. (Выделение сигнала, разумеется, сопровождается появлением специфических систематических погрешностей.) Далее, сигнальный процесс мы аппроксимируем борновским выражением для сечения, и отождествляем $b\text{-jet}$ с b -кварком. Наконец, основываясь на результатах работы [5], мы игнорируем эффекты конечной ширины t -кварка. В этом приближении величина $\sigma^{-1} d\sigma/dq$ равна $\Gamma^{-1} d\Gamma/dq$, где Γ — парциальная ширина распада $t \rightarrow b\nu$. (Тем самым распределение F становится независимым от исследуемого процесса.)

Прямые вычисления приводят к следующему выражению для распределения парциальной ширины:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{t \rightarrow b\nu}}{dq^2} = & \frac{G_F^2 |V_{tb}|^2 M_W^4}{16\pi^3 M_t^3} \left\{ q^2 - \Lambda^2 - M_W^2 + \left(\frac{\Lambda^2 - M_W^2}{2} - q^2 \right) \ln \frac{(\Lambda^2 - q^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2}{M_W^4 + M_W^2 \Gamma_W^2} \right. \\ & \left. + \frac{(\Lambda^2 - q^2)(q^2 + M_W^2) + M_W^2 \Gamma_W^2}{M_W \Gamma_W} \left[\arctan \left(\frac{\Lambda^2 - q^2}{M_W \Gamma_W} \right) + \arctan \left(\frac{M_W}{\Gamma_W} \right) \right] \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda^2 = M_t^2 - M_W^2$, и мы пренебрегли массами лептона ℓ и b кварка³. Соответственно, кинематически разрешенными значениями q являются $0 \leq q \leq M_t$.

²В случае ЛНС необходимый набор кинематических обрезаний описан в [5]. Там же указаны фоновые процессы, остающиеся после обрезаний. В случае ЛС подобное описание дано в [11,12]. На данном этапе мы не вводим в рассмотрение кинематические обрезания. Однако учтем их впоследствии при получении количественных оценок.

³Влияние массы b -кварка на распределение $F(q)$ заметно в области малых q , но на значении высших моментов, рассматриваемых в настоящей работе, оно практически не сказывается.

На рис. 1 изображено соответствующее (3) распределение $F(q)$ при $M_t = 170, 175$ и 180 ГэВ, откуда виден характер зависимости $F(q)$ от значения M_t . Сравнивая экспериментальное распределение $F(q)$ с семейством теоретических кривых, мы таким образом можем определить значение M_t .

В практическом отношении удобно сравнивать интегральные параметры, извлеченные из кривых. В работе [5], например, значение M_t определялось по положению среднего значения (максимума) аппроксимирующей гауссовой кривой, в работах [13,14] — по среднему значению q по распределению. В настоящей работе мы рассматриваем метод определения M_t по высшим моментам $\langle q^n \rangle$. В сущности, этот метод базируется на сравнении экспериментальной кривой $q^n F(q)$ с семейством соответствующих теоретических кривых.

Включение фактора q^n , как мы убедимся ниже, позволит серьезно повысить точность определения M_t . Причиной этого является соединение двух следующих обстоятельств. Во-первых, с ростом n значение $\langle q^n \rangle$ все в большей мере определяется поведением распределения в переходной области, сосредоточенной между положением максимума $F(q)$ и хвостом при больших q , при которых наступает режим исчезающе малых значений распределения. (Имеется в виду область $\Lambda < q < M_t$, в которой теоретическое распределение $F(q)$ стремится к нулю при $\Gamma_W \rightarrow 0$.) Во-вторых, как это видно из рис. 1, поведение $F(q)$ в указанной области в наибольшей мере чувствительно к значению M_t . Отсюда следует, что с ростом n должна повышаться чувствительность $\langle q^n \rangle$ к значению M_t . В результате, можно ожидать повышения точности определения M_t .

Согласно общему определению, момент n -ой степени нормированного на 1 распределения равен

$$\langle q^n \rangle = \int_0^{M_t} dq q^n F(q). \quad (4)$$

В качестве верхнего предела интегрирования здесь стоит параметр M_t , означающий верхнюю границу кинематически разрешенной области. Однако M_t одновременно является параметром, подлежащим определению. Во избежание связанного с этим неудобства мы переопределим распределение и моменты.

В качестве верхнего предела интегрирования далее всюду (если не оговорено особо) будем рассматривать наперед заданное значение M , близкое к M_t . Соответственно, распределение $F(q)$ будем считать перенормированным таким образом, чтобы было обеспечено равенство 1 его нулевого момента. Значение $\langle q^n \rangle$ при $n \geq 1$ в результате такого переопределения практически не изменится (при не слишком больших n) в силу исчезающей малости распределения F в районе хвоста при больших q .

Итак, резюмируем: массу t -кварка в рассматриваемом подходе мы определяем как решение уравнения

$$\langle q^n \rangle = \langle q^n \rangle_{\text{exp}}, \quad (5)$$

в правой части которого стоит момент, вычисленный (при заданном M) исходя из экспериментальных данных, а в левой части — из теоретически определенного распределения, зависящего от значения параметра M_t . Пусть при заданном n решением уравнения (5) является $M_t = M_{t(n)}$. Тогда погрешность решения оценивается как

$$\Delta M_{t(n)} = \Delta \langle q^n \rangle_{\text{exp}} \left/ \frac{d \langle q^n \rangle}{d M_t} \right|_{M_t = M_{t(n)}}. \quad (6)$$

Важнейшим в данном подходе является вопрос о выборе оптимального значения n , при котором минимизируется $\Delta M_{t(n)}$. Поскольку величина $d\langle q^n \rangle / dM_t$ в силу (3) нам фактически известна, проблема сводится к определению статистических и систематических погрешностей, приводящих к результирующей погрешности $\Delta\langle q^n \rangle_{\text{exp}}$.

2. Статистические погрешности

Статистические погрешности моментов мы определим, основываясь на предположении о том, что усредненные (по ансамблю) экспериментальные данные описываются теоретическим выражением $F(q) = \Gamma^{-1} d\Gamma/dq$, определенным с помощью формулы (3) при $M_t = 175$ ГэВ.

Допустим, что размер i -го бина, в пределах которого определяется элемент распределения, равен δq_i , и что в среднем в нем регистрируется \overline{N}_i событий. Тогда имеем

$$F(q_i)\delta q_i = \overline{N}_i / \overline{N}. \quad (7)$$

Здесь \overline{N} означает полное число зарегистрированных событий в среднем. Далее мы не делаем различия между \overline{N} и измеренным в данном эксперименте значением $N = \sum_i N_i$. Экспериментально измеренный момент $\langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ равен

$$\langle q^n \rangle_{\text{exp}} = \sum_i q_i^n \frac{N_i}{N}. \quad (8)$$

В силу (7) среднее значение $\langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ может быть определено по формуле (4). Поскольку N_i распределено по Пуассону с параметром \overline{N}_i , для дисперсии $\langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ справедлива оценка

$$D\langle q^n \rangle_{\text{exp}} = \sum_i q_i^{2n} \frac{\overline{N}_i}{N^2} \equiv \frac{1}{N} \langle q^{2n} \rangle. \quad (9)$$

Отсюда вытекает следующая формула для статистической погрешности $\langle q^n \rangle_{\text{exp}}$:

$$\Delta^{\text{stat}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{1}{N} \langle q^{2n} \rangle}. \quad (10)$$

Представление о поведении $\Delta^{\text{stat}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ дает сплошная кривая линия на рис. 2, описывающая отношение $\Delta^{\text{stat}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}} / \langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ в зависимости от n при $N = 4000$ (соответствует случаю ЛНС, см. раздел 4). Из рисунка видно, что отношение растет с увеличением n . Это объясняется тем, что положение максимума $q^n F(q)$ сдвигается (вправо) с ростом n от положения максимума $F(q)$, в результате чего статистическая достоверность $\langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ снижается.

Другое важное свойство состоит в смене режима роста отношения, начиная со значений $n \approx 15$. Объясняется это тем, что с ростом n начинает проявляться хвост распределения $F(q)$ в области больших q . Данное объяснение исчерпывающе иллюстрируется представленными на рис. 3 кривыми.

С возникновением исчезающих вкладов хвоста распределения, очевидно, снижается эффективность прямого применения метода моментов. Ситуацию можно исправить, если в интеграле для моментов обрезать нежелательную область значений q . Положение точки

обрезания следует выбрать таким образом, чтобы, с одной стороны, максимально сохранить статистическую значимость выборки событий, а с другой стороны, отмежеваться от второго (нефизического) пика, возникающего при больших n в районе хвоста распределения $q^n F(q)$, см. рис. 3. Искомая точка, очевидно, должна находиться в районе локального минимума, расположенного между двумя пиками (если второй пик возникает). Из рис. 3 следует, что при $n \approx 40$ указанная точка отстоит на расстоянии примерно двух полуширин, считая от положения максимума $q^n F(q)$. Полагая $\Lambda_n = \min\{q_{n, \text{extr}} + 2\Gamma_{n, \text{right}}, M\}$ ⁴, где $q_{n, \text{extr}}$ — положение максимума $q^n F(q)$; $\Gamma_{n, \text{right}}$ — полуширина справа, приходим к следующему определению эффективного момента:

$$\langle q^n \rangle^{\text{eff}} = \int_0^{\Lambda_n} dq q^n F(q) / \int_0^{\Lambda_n} dq F(q). \quad (11)$$

Значение параметра обрезания в экспериментально определенном $\langle q^n \rangle_{\text{exp}}^{\text{eff}}$ должно быть тем же самым. Статистическая погрешность $\Delta^{\text{stat}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}}^{\text{eff}}$ в итоге определяется по формуле (10), в которой вместо $\langle q^{2n} \rangle$ подставляется эффективный момент $\langle q^{2n} \rangle^{\text{eff}}$. Однако определение параметра обрезания в $\langle q^{2n} \rangle$ и $\langle q^{2n} \rangle^{\text{eff}}$ в данном случае должно быть дано с подстановкой Λ_n , а не Λ_{2n} , что непосредственно следует из вывода формулы (10). Данное обстоятельство делает нетривиальной процедуру оптимального выбора точки обрезания.

Поведение $\Delta^{\text{stat}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}}^{\text{eff}} / \langle q^n \rangle_{\text{exp}}^{\text{eff}}$ в зависимости от n обозначено пунктирной кривой на рис. 2. Из рисунка следует, что переход к эффективным моментам не привносит заметных изменений вплоть до $n \approx 15$, а при более высоких n достигается стабилизация режима роста погрешности. Подобное поведение наблюдается в случае без перехода к эффективным моментам, но в пределе $\Gamma_W \rightarrow 0$, в котором хвост в распределении тождественно зануляется.

3. Систематические погрешности

Рассмотрим теперь систематические погрешности моментов. Начнем с того, что определим основные причины их возникновения. Исходить будем из результатов работы [5], в которой в случае ЛНС методом МС моделирования были определены главные источники возникновения систематических погрешностей в $M_{J/\psi\ell}$ -распределении. Таковыми оказались неопределенности в фрагментации b -кварка (включая пертурбативную и непертурбативную фазы фрагментации) и неопределенности в фоновых процессах. Поскольку при определении $M_{b\ell}$ -распределения, исходя из данных, в качестве последних выступает, в сущности, $M_{J/\psi\ell}$ распределение, эти же причины возникновения систематических погрешностей должны проявиться как главные и при определении $M_{b\ell}$ -распределения. В случае ЛС мы ожидаем аналогичную картину возникновения систематических погрешностей.

Итак, рассмотрим сначала погрешности, связанные с неопределенностями в фрагментации b -кварка. Для краткости обозначим эти погрешности как погрешности первого (I) типа. На уровне $M_{b\ell}$ -распределения они должны проявиться как неточности в определении номеров бинов, с которыми сопоставляются измеренные числа N_i . В терминах непрерывных переменных они описываются как неточности Δq в определении значений q .

⁴На самом деле, оптимальное положение точки обрезания достаточно сложным образом зависит от степени n . Реально мы здесь рассматриваем упрощенный алгоритм, связывая положение точки обрезания с заданным числом отступов полуширины.

Предположим, что Δq достаточно мало для того, чтобы можно было пренебречь нелинейными эффектами. Тогда имеем следующую оценку:

$$\Delta^{\text{sys-I}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}} = \int_0^M dq [q^n F(q)]' \Delta q. \quad (12)$$

Здесь штрих означает производную по q . Для эффективного момента $\langle q^n \rangle_{\text{exp}}^{\text{eff}}$ оценка систематической погрешности I имеет аналогичный вид — с заменой верхнего предела интегрирования на Λ_n и делением результата на нормировочный фактор, указанный в (11). (Нормировочный фактор не варьируется, поскольку он имеет смысл полного числа событий, учитываемых при определении эффективного момента.)

Определение Δq проведем с помощью следующего рассуждения. Вспомним, что инвариантная масса q^2 является удвоенным скалярным произведением 4-импульсов (струи) b -кварка и лептона ℓ . Следовательно, в какой-либо системе отсчета, например в лабораторной системе, величину q^2 можно представить в виде $q^2 = E_b \cdot K$, где E_b — энергия b -кварка; K — фактор, пропорциональный энергии лептона, содержащий также вклады угловых переменных. Путем вычисления дифференциала получим $\Delta q = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta E_b}{E_b} + \frac{\Delta K}{K} \right) q$, где ΔE_b и ΔK — неопределенности соответствующих величин. Более точная оценка определяется суммой в квадратурах. Таким образом, мы приходим к выводу о линейной зависимости Δq от q вида

$$\Delta q = r q, \quad r = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta E_b}{E_b} \right)^2 + \left(\frac{\Delta K}{K} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь систематические погрешности, возникающие вследствие неопределенностей, остающихся после вычитания фоновых процессов. Обозначим их символом II. Неопределенности этого типа проявляются как погрешности в абсолютной величине функции распределения. Следовательно, их можно описать как аддитивные вклады δF в функцию F . Предположим, что они определены таким образом, чтобы нормировка F оставалась неизменной. Тогда получим следующую формулу для соответствующей погрешности моментов:

$$\Delta^{\text{sys-II}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}} = \int_0^M dq q^n \delta F(q). \quad (14)$$

В случае эффективных моментов $\langle q^n \rangle_{\text{exp}}^{\text{eff}}$ погрешность типа II определяется аналогичной формулой с точностью до модификаций, указанных после формулы (12).

Функцию $\delta F(q)$ мы далее определяем в предположении, что она обращается в нуль на границах фазового пространства и с переходом от малых q к большим q один раз меняют свой знак (приводя тем самым к максимальному сдвигу среднего значения q). Простейшей функций, удовлетворяющей этим требованиям, является полином третьей степени

$$\delta F = h \times q (q - M/2) (q - M). \quad (15)$$

Параметр h в формуле (15) определяет амплитуду погрешности и подлежит дополнительному определению.

4. Численные результаты

Далее мы используем следующие значения параметров, имеющих в нашем анализе смысл глобальных:

$$M_W = 80.425 \text{ ГэВ}, \quad \Gamma_W = 2.124 \text{ ГэВ}, \quad M_t = M = 175 \text{ ГэВ}. \quad (16)$$

Остающиеся параметры N , r и h в разных условиях принимают разные значения. Напомним, что N имеет смысл величины репрезентативной выборки событий, r задает погрешность определения инвариантной массы, h — амплитуду погрешностей, возникающих после вычитания фоновых процессов.

Применительно к ЛHC значения параметров N , r и h мы можем определить полностью следуя работе [5]. Размер репрезентативной выборки, по которой определялось $M_{J/\psi\ell}$ распределение, в этой работе составил $N = 4000$ (с учетом кинематических обрезаний и из расчета 4 лет работы ЛHC). Это же значение мы приписываем N в нашей работе. Значения параметров r и h можно извлечь из свойств $M_{J/\psi\ell}$ распределения. Воспользуемся тем, что $\Delta^{\text{sys}}\langle M_{J/\psi\ell} \rangle = +0.3/-0.4$ ГэВ, а извлеченная из этого результата погрешность определения M_t составила $+0.6/-0.8$ ГэВ [5]. Исходя из второго факта, путем прямых вычислений получим $\Delta^{\text{sys}}\langle q \rangle_{\text{exp}} = +0.47/-0.62$ ГэВ. Сопоставляя этот результат с указанной выше оценкой $\Delta^{\text{sys}}\langle M_{J/\psi\ell} \rangle$, получаем фактор 1.6 по шкале энергий, позволяющий сравнить характеристики $M_{J/\psi\ell}$ распределения с соответствующими характеристиками распределения $M_{b\ell}$. В частности, поскольку систематическая ошибка II определения среднего значения $M_{J/\psi\ell}$ составила $\lesssim 0.15$ ГэВ [5], с учетом фактора 1.6 получим $\Delta^{\text{sys-II}}\langle q \rangle_{\text{exp}} \lesssim 0.24$ ГэВ. Отсюда с помощью (14), (15) находим $h \simeq 1.7 \times 10^{-10}$. Зная $\Delta^{\text{sys}}\langle q \rangle_{\text{exp}}$ и $\Delta^{\text{sys-II}}\langle q \rangle_{\text{exp}}$, далее получаем $\Delta^{\text{sys-I}}\langle q \rangle_{\text{exp}} = +0.41/-0.57$. Отсюда и из формулы (12) следует $r = 0.004-0.006$.

При вычислениях ниже мы будем использовать среднее значение $r = 0.005$. Точно такое же значение r вытекает из формулы (13) с учетом 1%-ной точности определения энергии струи b -кварка, ожидаемой на ЛHC [1]. (Погрешность ΔK в формуле (13) считаем несущественной на фоне погрешности ΔE_b .) Совпадение результатов, полученных двумя независимыми способами, свидетельствует о надежности как самой модели, так и значений ее параметров.

Зная N , r и h , мы можем определить $\Delta^{\text{stat}}\langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ и $\Delta^{\text{sys-I,II}}\langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ при любом n , а также и соответствующие значения статистических и систематических погрешностей $\Delta^{\text{stat}}M_{t(n)}$ и $\Delta^{\text{sys-I,II}}M_{t(n)}$. Зависимость последних величин от n показана сплошными линиями на рис. 4, 5 и 6. Пунктирными линиями там же указаны погрешности, полученные методом эффективных моментов. (Излом пунктирной линии на рис. 5 связан со сменой знака $\Delta^{\text{sys-I}}\langle q^n \rangle_{\text{exp}}^{\text{eff}}$, возникающего вследствие интерференции граничных вкладов в интеграле (12) после замены верхнего предела на Λ_n .)

В табл. 1 представлены численные результаты при наиболее важных значениях n , дающих представление о поведении погрешностей. Там же указаны просуммированные в квадратуре погрешности $\Delta^{\text{sys}}M_{t(n)}$ и $\Delta M_{t(n)}$. Следует отметить, что при $n = 1$ указанные в табл. 1 систематические погрешности практически совпадают с полученными в работе [5]. В сущности, так и должно было получиться, поскольку определение соответствующих параметров модели мы провели на основании сравнения первых моментов погрешностей.

Таблица 1. Статистические, систематические I, II и просуммированные в квадратуре систематические погрешности в единицах ГэВ в случае ЛНС при разных значениях степеней моментов n . В последней колонке указана сумма статистических и систематических погрешностей. В скобках даны значения, полученные методом эффективных моментов (если они не совпадают с результатами базового метода).

n	$\Delta^{\text{stat}} M_{t(n)}$	$\Delta^{\text{sys-I}} M_{t(n)}$	$\Delta^{\text{sys-II}} M_{t(n)}$	$\Delta^{\text{sys}} M_{t(n)}$	$\Delta M_{t(n)}$
1	2.065 (2.066)	0.618	0.299 (0.297)	0.687 (0.686)	2.176
5	0.619 (0.622)	0.131 (0.127)	0.195 (0.171)	0.235 (0.214)	0.662 (0.657)
10	0.451 (0.454)	0.067 (0.056)	0.195 (0.133)	0.206 (0.144)	0.496 (0.476)
15	0.409 (0.404)	0.045 (0.026)	0.238 (0.118)	0.242 (0.121)	0.475 (0.422)
20	0.415 (0.385)	0.034 (0.005)	0.318 (0.112)	0.320 (0.112)	0.524 (0.401)
30	0.585 (0.378)	0.024 (0.030)	0.628 (0.108)	0.628 (0.112)	0.859 (0.394)

Для случая ЛС в нашем распоряжении, к сожалению, нет результатов, основываясь на которых мы могли бы подобным образом определить значения параметров модели. Поэтому для их определения мы воспользуемся в некотором смысле косвенными методами. Значение N определим с помощью следующего рассуждения. Для определенности считаем, что измерения осуществляются при $\sqrt{s} = 500$ ГэВ [2,3,4]. При такой энергии полное сечение $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ составляет приблизительно 0.6 pb. Следовательно, при интегральной светимости 300 fb^{-1} , соответствующей 1–2 годам работы ЛС, имеем 180 000 событий $t\bar{t}$. Поскольку брэнчинг процесса (1) равен приблизительно 30%, под интересующий нас процесс подпадает 54 000 событий.

Эффективность их регистрации оценим следующим образом. Предположим, что эффективность регистрации W -пары, распадающейся по полулептонному каналу $WW \rightarrow jj \ell \bar{\nu}$, на ЛС будет такой же, как на LEP2, где она составляла приблизительно 80% [15]. Далее, следуя [3], предположим, что b -струи на ЛС будут определяться с эффективностью $\sim 80\%$. Все вместе это дает акцептанс $\sim 50\%$. В итоге, получаем $N = 27 000$.

Значение параметра r определим, воспользовавшись оценкой работы [11] систематической погрешности определения M_t , методом полного восстановления событий полулептонных распадов $t\bar{t}$. Дополнительно воспользуемся наблюдением, что в области верхнего предела разрешенных значений $M_{b\ell}$ нейтрино не дает вклада в инвариантную массу продуктов распада t -кварка. Таким образом, в указанной кинематической области, с одной стороны, определение $M_{b\ell}$ равносильно определению M_t , а с другой стороны неточность определения энергии нейтрино не может повлиять на величину погрешности определения M_t . Оценка последней величины составляет $\Delta M_t = 250$ МэВ [11]. Считая, что она набирается за счет погрешности типа I (тем самым получаем верхнюю оценку), приравниваем Δq этому значению. Полагая далее $\Delta q = rq$, $q = M$, получаем $r = 0.0014$.

Значение h , к сожалению, не удастся определить, на основании результатов работы [11]. Поэтому воспользуемся замечанием работы [5] о том, что при увеличении статистики до значений $N \sim 10^4$ систематическая ошибка II определения среднего значения $M_{J/\psi\ell}$ опускается ниже 0.1 ГэВ. Отсюда с помощью того же метода, что мы использовали ранее, получим $h = 1.1 \times 10^{-10}$.

Зная N , r и h , мы далее находим $\Delta^{\text{stat}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}}$, $\Delta^{\text{sys-I,II}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ и соответствующие значения $\Delta^{\text{stat}} M_{t(n)}$ и $\Delta^{\text{sys-I,II}} M_{t(n)}$. Характер зависимости результатов от n остается

тем же, что был в случае ЛНС, отличия проявляются только в масштабе значений погрешностей. В этой связи в случае ЛС мы показываем результаты на тех же рис.4–6, с указанием лишь нового масштаба погрешностей.

Численные значения при наиболее важных значениях n указаны в табл. 2. Следует отметить, что значение $\Delta^{\text{sys-I}} M_{t(1)}$ в нашем подходе получилось ниже, чем значение $\Delta^{\text{sys}} M_t$, полученное методом полного восстановления событий [11]. На самом деле, противоречия в этом нет, поскольку главные вклады в $\Delta^{\text{sys-I}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ набираются при значениях q строго меньших M , и, кроме того, при этом полностью исключаются неопределенности, связанные с вкладом нейтрино.

Таблица 2. То же, что в табл. 1, для случая ЛС.

n	$\Delta^{\text{stat}} M_{t(n)}$	$\Delta^{\text{sys-I}} M_{t(n)}$	$\Delta^{\text{sys-II}} M_{t(n)}$	$\Delta^{\text{sys}} M_{t(n)}$	$\Delta M_{t(n)}$
1	0.795	0.173	0.194 (0.192)	0.260 (0.258)	0.836
5	0.238 (0.240)	0.037 (0.036)	0.126 (0.111)	0.132 (0.117)	0.272 (0.267)
10	0.174 (0.175)	0.019 (0.016)	0.126 (0.086)	0.128 (0.087)	0.272 (0.196)
15	0.158 (0.156)	0.013 (0.007)	0.154 (0.077)	0.155 (0.077)	0.221 (0.174)
20	0.160 (0.148)	0.010 (0.001)	0.206 (0.072)	0.206 (0.072)	0.261 (0.165)
30	0.225 (0.145)	0.007 (0.008)	0.406 (0.070)	0.406 (0.070)	0.464 (0.161)

5. Обсуждение

Основной результат настоящей работы состоит в обнаружении явления эффективно-го снижения статистических и систематических погрешностей определения M_t по M_{be} распределению в полуплеетонных распадах $t \rightarrow b \ell \nu$ при использовании техники моментов и переходе к их высшим степеням. Оптимальное значение степени с точки зрения минимизации погрешностей достигается в районе $n \approx 15$.

Для определения величины погрешностей M_t в данной работе используется достаточно простая (прозрачная) модель. В случае ЛНС фиксирование ее параметров осуществляется на основании результатов [5], полученных методом МС моделирования. Для одного из параметров параллельно используется независимый метод определения, и он приводит к совпадающему результату (что свидетельствует о надежности рассматриваемой модели). В случае ЛС параметры модели фиксируются скорее косвенными методами, и лишь отчасти с использованием результатов МС моделирования.

Используя найденную зависимость моментов от степени n , мы далее получаем количественные оценки погрешностей при любом значении степени. В частности, при “оптимальном” значении $n \approx 15$ результирующая погрешность ΔM_t в случае ЛНС оказывается близкой к 500 МэВ, а в случае ЛС — к 200 МэВ. (Применение метода эффективных моментов позволяет понизить оценки на 10-20%. Однако далее с ростом n наступает стабилизация результатов, см. рис. 4–6 и табл. 1-2.) В случае ЛНС полученная точность определения M_t более чем в 2 раза превышает точность, достигнутую другими методами [1], в том числе в работе [5] при $n = 1$. В случае ЛС полученная оценка точности приближается к ожидаемой в подходе определения M_t методом изучения вблизи-порогового поведения полного сечения $e^+e^- \rightarrow t\bar{t}$ [7,8].

В связи с результатами о возможности достижения высокой точности определения M_t далее встает вопрос о величине теоретических погрешностей, которые не учитывались в настоящей работе. Вопрос, в сущности, состоит в том, возможно ли осуществление теоретических вычислений с такой точностью, чтобы не были ухудшены полученные оценки погрешностей. Ответ на поставленный вопрос не является однозначным, поскольку для его решения требуются дополнительные уточнения.

С одной стороны, в случае полуплептоновых распадов ${}^5t \rightarrow b\ell\nu$ вовсе не следует ожидать возникновения каких-либо непреодолимых трудностей для осуществления необходимых вычислений. Действительно, величина $\Delta\langle q^n \rangle_{\text{exp}}/\langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ при $n = 15$ в случаях ЛНС и ЛС принимает значения 4.5 и 1.9% соответственно. Исходя из этого, нетрудно определить порядок теории возмущений, вплоть до которого необходимо провести вычисления. Навивный подсчет показывает, что в обоих случаях достаточно ограничиться 1-петлевыми электрослабыми и 2-петлевыми КХД поправками. Поправки для полной ширины t -кварка в указанных порядках уже посчитаны [1]. Поэтому при вычислении в этих же порядках распределения ширины по $M_{b\ell}$ не следует ожидать возникновения непреодолимых трудностей.

Однако с другой стороны, решение задачи высокоточного определения массы t -кварка сталкивается с ограничением принципиального характера [20]. Проблема, в сущности, сводится к вопросу о том, о какой именно массе кварка идет речь, когда ставится задача определения ее значения из сравнения с экспериментом. В связи с этим вопросом, к сожалению, существует определенная путаница в литературе. Остановимся поэтому подробнее на его рассмотрении. Напомним прежде всего, что практическое значение имеет только лагранжевая масса, поскольку только она может быть учтена в строгих соотношениях связи с другими фундаментальными параметрами теории, ради проверки которых, собственно, и осуществляется высокоточное определение M_t .

Наиболее представительными вариантами лагранжевой массы являются полюсная масса и $\overline{\text{MS}}$ масса (в зависимости от того, какая используется схема УФ перенормировок). В терминах полюсной массы, поскольку именно она соответствует физической постановке проблемы (если исходить из того, что t -кварк распадается раньше вступления в силу процессов адронизации), определены все существующие алгоритмы восстановления M_t из массива данных. Однако полюсная масса вследствие явления ренормалона не может быть определена из эксперимента с точностью, превышающей величину порядка $O(\Lambda_{QCD})$ [20].

Решение указанного парадокса, по крайней мере в идейном плане, в сущности, было найдено в тех же работах [20]. Суть решения сводится к следующему алгоритму. (Ниже мы излагаем один из возможных его вариантов.) Сначала все вычисления, включая петлевые, делаются с использованием полюсной массы. Затем ее значение определяется из сравнения с данными. Далее, с помощью хорошо известной связи полюсной массы с $\overline{\text{MS}}$ массой (см., например, [1]) определяется $\overline{\text{MS}}$ масса и объявляется, что именно она определена без теоретической погрешности, связанной с вкладами ренормалона, — поскольку вклады ренормалона при выполнении такой последовательности действий сокращаются. Значение полюсной массы, разумеется, далее может быть обратно восстановлено, но при

⁵Мы здесь отталкиваемся от результата работы [5], что в рассматриваемом подходе эффекты нестабильности t -кварков не оказывают заметного влияния на точность определения M_t . Следовательно, с точки зрения теоретических вычислений процесс $e^+e^-(q\bar{q}, gg) \rightarrow t\bar{t} \rightarrow b\ell\nu bq_1q_2$ без потери точности описания может быть сведен к процессу $t \rightarrow b\ell\nu$. (С точки зрения обработки данных такая редукция, разумеется, не может быть правомерной.)

этом в ее определении появляется дополнительная погрешность, обусловленная ренормалоном, та, что присутствует в формуле связи между полюсной и $\overline{\text{MS}}$ массами. (Другими словами, погрешность связи полюсной массы с $\overline{\text{MS}}$ массой относится на счет полюсной массы.) Прямые вычисления, проведенные на конкретных примерах [7,8], демонстрируют эффективность указанного алгоритма.

Таким образом, задача по экспериментальному определению массы t -кварка изначально формулируется в терминах полюсной массы. Однако, на конечном этапе из сравнения с данными извлекается $\overline{\text{MS}}$ масса, а не полюсная масса. Такая постановка проблемы позволяет избежать возникновения теоретических неопределенностей порядка $O(\Lambda_{QCD})$, возникающих вследствие вклада ренормалона.

Возвращаясь непосредственно к результатам настоящей работы, в качестве заключения еще раз отметим, что данная работа в целом имеет характер модельных исследований, поскольку на промежуточных этапах анализа мы прибегаем к упрощающим предположениям, позволяющим минимизировать вычисления. Однако на заключительном этапе количественные оценки даны с учетом реалистических значений параметров. Такой подход не должен сказаться на правомерности выявленных закономерностей. Но количественные оценки должны быть уточнены путем проведения вычислений непосредственно с использованием генераторов событий, надлежащим образом настроенных на исследование рассматриваемых процессов.

Список литературы

- [1] M. Beneke et al. (conveners), A.Ahmadov et al. "Top quark physics", CERN 2000-004 [hep-ph/0003033].
- [2] J.A. Aguilar-Saavedra et al. (ECFA/DESY LC physics working group), "TESLA technical design report Part III", DESY-01-011 [hep-ph/0106315].
- [3] T. Abe et al. (American Linear Collider Working Group) "Linear Collider physics resource book for Snowmass 2001", in Proc. of the APS/DPF/DPB Summer Study on the Future of Particle Physics (Snowmass 2001), ed. N.Graf, SLAC-R-570 [Part 1 - Part 4: hep-ex/0106055 - hep-ex/0106058].
- [4] K. Abe et al. (ACFA linear collider working group) "Particle physics experiments at JLC", KEK-REPORT-2001-11 [hep-ph/0109166].
- [5] A.Kharchilava. Phys.Lett B476 (2000) 73 [hep-ph/9912320].
- [6] V.S.Fadin and V.A.Khose. JETP Lett 46 (1987) 525; Sov.Nucl.Phys. 48 (1988) 309; Physics of elementary particles. Proc. of XXIV LNPI Winter School, Leningrad, 1989, p.3.
- [7] A.H.Hoang, M.Beneke, K.Melnikov, T.Nagano, A.Ota, A.A.Penin, A.A.Pivovarov, A.Signer, V.A.Smirnov, Y.Sumino, T.Teubner, O.Yakovlev, and A.Yelkhovsky. Jur.Phys.J.direct C3 (2002) 1 [hep-ph/0001286].
- [8] A.H.Hoang, A.V.Manohar, I.V.Stewart, and T.Teubner. Phys.Rev. D65 (2002) 014014 [hep-ph/0107144].

- [9] M.W.Grunewald et al. Four-fermion production in electron-positron collisions. The LEP2-MC workshop 1999/2000, hep-ph/0005309.
- [10] M.Martinez, R.Miquel. Eur.Phys.J. C27 (2003) 49-55.
- [11] S.V.Chekanov. Eur.Phys.J. C26 (2002) 173 [hep-ph/0206264].
- [12] S.V.Chekanov, and V.L.Morgunov. Phys.Rev. D67 (2003) 074011 [hep-ex/0301014].
- [13] G.Corcella, E.K.Irish, and M.H.Seymour. HERWIG for top physics at the linear collider, hep-ph/0012319.
- [14] G. Corcella, M.L.Mangano, and M.H.Seymour. JHEP 0007 (2000) 004 [hep-ph/0004179].
- [15] M.Campanelli. Int.Mod.Phys. A14 (1999) 3277;
R.Strohmer, Int.Mod.Phys. A18 (2003) 5127.
- [16] D.Bardin, L.Kalinovskaya, and G.Nanova, hep-ph/0012080;
A.Andonov, D.Bardin, S.Bondarenko, P.Christova, L.Kalinovskaya, and G.Nanova. Particles and Nuclei, 34, No. 5, 2003, p. 577 [hep-ph/0207156].
- [17] J.Fleischer, A.Leike, T.Rimann, and A.Werthenbach, hep-ph/0302259.
- [18] G.Belanger, F.Boudjema, J.Fujimoto, T.Ishikawa, T.Kaneko, K.Kato, and Y.Shimizu, hep-ph/0308080.
- [19] C.Macesanu, Phys.Rev. **D65** (2002) 074036, [hep-ph/0112142].
- [20] I.I.Bigi, M.A.Shifman, N.G.Uraltsev, and A.I.Vainstein. Phys.Rev. D50 (1994) 2234 [hep-ph/9402360];
M.Beneke, and V.M.Braun. Nucl.Phys. B426 (1994) 301 [hep-ph/9402364].

Рукопись поступила 16 сентября 2004 г.

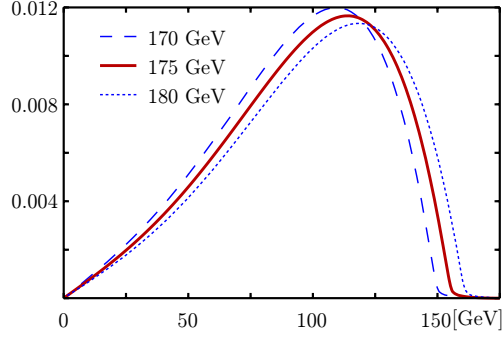


Рис. 1. Распределение $F(q) = \Gamma^{-1} d\Gamma/dq$, $q \equiv M_{b\ell}$, при $M_t = 170, 175$ и 180 ГэВ.

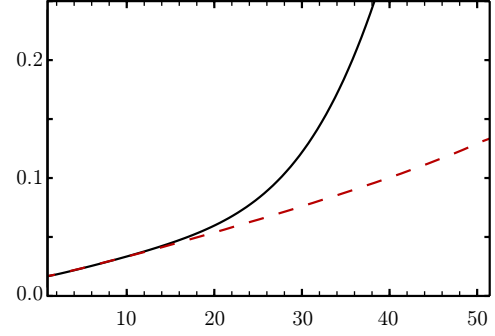


Рис. 2. Отношение $\Delta^{\text{stat}} \langle q^n \rangle_{\text{exp}} / \langle q^n \rangle_{\text{exp}}$ в зависимости от n ($M_t = 175$ ГэВ, $N = 4000$). Сплошной кривой представлены результаты, описываемые формулой (10), пунктирной кривой — полученные методом эффективных моментов.

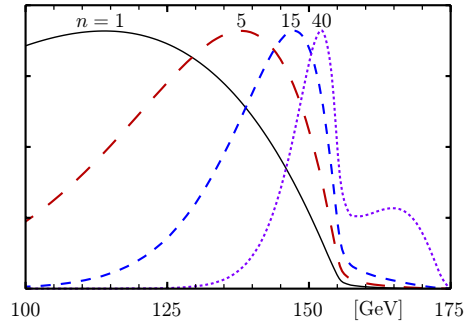


Рис. 3. Функция $q^n F(q)$ при $M_t = 175$ ГэВ, $n = 1, 5, 15, 40$ (в произвольной нормировке).

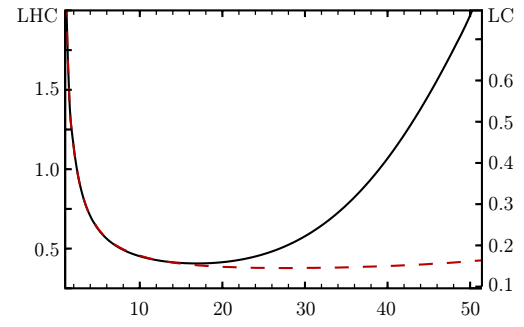


Рис. 4. Статистические погрешности $\Delta^{\text{stat}} M_{t(n)}$ в зависимости от n . Пунктирной кривой показаны результаты, полученные методом эффективных моментов. На левой вертикальной оси в единицах ГэВ указаны результаты, полученные для случая LHC, на правой — LC.

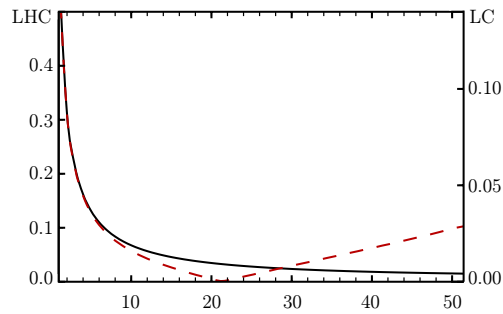


Рис. 5. То же, что на рис. 4, для систематической погрешности $\Delta^{\text{sys-I}} M_{t(n)}$.

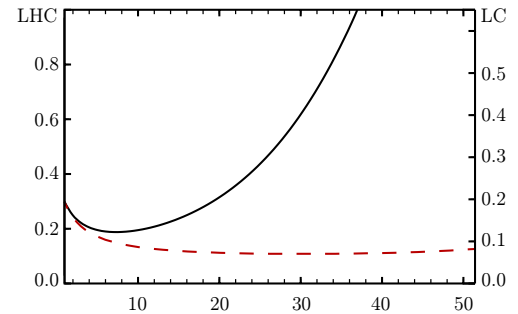


Рис. 6. То же, что на рис. 4, для систематической погрешности $\Delta^{\text{sys-II}} M_{t(n)}$.

М.Л. Некрасов.

К высокоточному определению массы t -кварка по $M_{b\ell}$ -распределению в полуплептонных распадах.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **ИТ_РХ**.

Редактор Н.В. Ежела

Подписано к печати 20.09.2004. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 1,85. Уч.-изд.л. 1,5. Тираж 130. Заказ 309.
Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

