



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2005-2  
ОТФ

А.И. Алексеев

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТНЫЙ ЗАРЯД В КХД  
С ПОДАВЛЕНИЕМ НЕПЕРТУРБАТИВНЫХ ВКЛАДОВ  
ПРИ БОЛЬШИХ  $Q^2$**

Направлено в *ТМФ*

Протвино 2005

### Аннотация

Алексеев А.И. Аналитический инвариантный заряд в КХД с подавлением непертурбативных вкладов при больших  $Q^2$ : Препринт ИФВЭ 2005-2. – Протвино, 2005. – 18 с., 2 рис., 2 табл., библиогр.: 44.

На основе аналитического инвариантного заряда, полученного исходя из результатов стандартной теории возмущений в приближениях до четырехпетлевого, строится “синтетическая” модель инвариантного заряда в квантовой хромодинамике. В предложенной модели сохранен пертурбативный скачок на времениподобной полуоси комплексной плоскости  $Q^2$ , а непертурбативные вклады не только сокращают нефизические сингулярности теории возмущений в инфракрасной области, но и быстро убывают в ультрафиолетовой области. В рамках этой модели, с одной стороны, эффективная функция связи усилена в нуле (свойство дуальной сверхпроводимости вакуума КХД), а с другой стороны, возникает динамическая масса глюона. В рамках рассматриваемого подхода задание параметра, соответствующего параметру натяжения струны, и нормировка, например, в точке  $M_\tau$  полностью фиксируют синтетическую модель инвариантного заряда. При этом динамическая масса глюона  $m_g$  оказывается фиксированной и стабильной при увеличении числа петель исходного пертурбативного приближения.

### Abstract

Alekseev A.I. Analytic Invariant Charge of QCD with Nonperturbative Contributions Suppressed at Large  $Q^2$ : IHEP Preprint 2005-2. – Protvino, 2005. – p. 18, figs. 2, tables 2, refs.: 44.

The modified “synthetic” invariant charge model of QCD is constructed on the base of the analytic invariant charge in its turn obtained from the standard perturbation theory approximations up to four loop order. The proposed model preserves the perturbative time-like discontinuity and its nonperturbative contributions not only remove the nonphysical singularities of the perturbation theory in the infrared region but also vanish rapidly in the ultraviolet region. Within this model, on the one hand, the invariant charge is enhanced at zero (the dual superconductivity property of the QCD vacuum) and, on the other hand, the dynamical gluon mass generation is realized. In the framework of the approach fixing the parameter corresponding to the string tension parameter and normalizing for example at  $M_\tau$  completely define the synthetic invariant charge. At that the dynamical gluon mass  $m_g$  turns out to be fixed and stable with respect to the higher loop approximations of the initial perturbation theory.

## Введение

Работа посвящена описанию модели инвариантного заряда [1] (или, иначе говоря, бегущей константы связи) квантовой хромодинамики (КХД), в которой, исходя из результатов пертурбативного исследования до четырехпетлевого уровня, предпринята попытка учесть непертурбативные вклады таким образом, чтобы сократить нефизические пертурбативные сингулярности в инфракрасной (ИК) области и аккумулировать в ее рамках основные представления о динамике КХД для всех масштабов.

Весьма привлекательным при этом представляется исходить из аналитического инвариантного заряда КХД и на этой основе строить новый инвариантный заряд, содержащий дополнительные непертурбативные члены. Мы будем строить разновидность моделей такого рода — “синтетическую” модель  $\alpha_{\text{syn}}(Q^2, \Lambda, c)$ , которая, вполне опираясь на результаты теории возмущений, используемой при описании области больших передач импульса  $Q^2$  (физика малых расстояний), включает в себя непертурбативные члены, определяющие основные свойства КХД при малых  $Q^2$  (физика больших расстояний) без резкой смены этих качественно различных режимов.

Аналитический подход в теории поля был сформулирован в конце 50-х годов в работах [2, 3] на примерах квантовой электродинамики и других теорий. Для КХД аналитический подход применен в работах [4, 5]. Укажем на работы [6–8], в которых получили развитие аналитический подход и, в частности, аналитическая теория возмущений в КХД. Введение аналитической константы связи позволяет разрешить трудности, связанные с нефизическими сингулярностями теории возмущений в инфракрасной области. Эти сингулярности в аналитическом подходе сокращаются непертурбативными вкладами. В ультрафиолетовой области непертурбативные вклады быстро убывают, а пертурбативные вклады являются определяющими. Тем не менее, большой интерес представляет поведение быстро убывающих в ультрафиолетовой области непертурбативных вкладов, возникающих в результате процедуры “аналитизации”. Их поведение оказывается важным и при построении нашей синтетической модели.

Если для однопетлевого случая разделение аналитической константы связи на пертурбативную и непертурбативную компоненты и поведение непертурбативной компоненты очевидны, то для многопетлевых случаев это не так. Для двухпетлевого случая такое разделение в явном виде и исследование поведения компонент аналитической константы

связи проведены в работе [9], для трехпетлевого случая — в работах [10, 11], а для четырехпетлевого — в работах [12, 13]. Непертурбативные вклады были выделены в явном виде и было получено их разложение по степеням  $\Lambda^2/Q^2$ , на основе которого развит эффективный метод прецизионного вычисления аналитической константы связи. Анализ импульсной зависимости аналитической константы связи [11, 13] при различных условиях сшивания на порогах тяжелых кварков показал, что значению константы взаимодействия  $\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.002$  соответствует значение  $\alpha_{\text{ан}}(M_\tau^2) = 0.294 \pm 0.011$ , что заметно ниже имеющихся оценок [14–17] значений величины  $\alpha_s(M_\tau^2)$ . Таким образом, соответствие среднемировому значению [14]  $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1187_{-0.002}^{+0.002}$  побуждает к модификации  $\alpha_{\text{ан}}$  в ИК-области.

Как известно [4], аналитическая константа связи является конечной в нуле. В работах [12, 13] показано, что конечность аналитической константы связи в нуле является следствием свойства асимптотической свободы исходной теории возмущений,  $\alpha_{\text{ан}}^{\text{n-loop}}(0) = 4\pi/b_0 \simeq 1.396$ . Константа связи является конечной в нуле также при наличии “замораживания” взаимодействия [18], что является привлекательным с точки зрения феноменологии. Однако при таком инфракрасном поведении константы связи описание явлений конфайнмента и динамического нарушения киральной симметрии не является непосредственным. Поведение инвариантного заряда  $\alpha_V \sim 1/Q^2$  при  $Q^2 \rightarrow 0$  в так называемой V-схеме перенормировки соответствует линейному запирающему кварк-антикварковому статическому потенциалу с универсальным параметром натяжения струны  $\sigma$ . В квантовой хромодинамике статический потенциал определяют калибровочно-инвариантным образом через вакуумное ожидание петли Вильсона. Рассматриваемая здесь синтетическая модель также относится к классу сингулярных,  $\alpha_{\text{син}} \sim 1/Q^2$  при  $Q^2 \rightarrow 0$ , однако имеет и свою дополнительную мотивацию, связанную с исследованием поведения непертурбативных вкладов при  $Q^2 \rightarrow \infty$ .

Основными методами непертурбативного исследования ИК-поведения функций Грина КХД и бегущей константы связи, которая может быть построена из этих функций, являются решение транкированных уравнений Дайсона – Швингера (ДШ) и вычисление функциональных интегралов на решетке. В работе [19] приводится сводка результатов таких непертурбативных исследований за последнее время, которую мы дополним работами, в которых использовались аналитические методы [20, 21] и вычисления на решетке [22]. Разнообразие результатов для ИК-поведения  $\alpha_s(Q^2)$  связано с типичной для калибровочных теорий *вершинной зависимостью* [19] определений бегущей константы связи при использовании зависящих от массы схем вычитания в импульсном пространстве, а также с различием методов транкирования системы уравнений ДШ. Кроме того, решение замкнутых уравнений (систем уравнений) требует, как правило, упрощающих предположений, нередко нарушающих калибровочную симметрию, и аппроксимаций технического характера. Поэтому результаты исследования ИК-поведения  $\alpha_s$  сильно отличаются друг от друга и их не следует сравнивать непосредственно. Укажем на обзоры [23–25] по исследованию инфракрасного поведения функций Грина КХД, бегущей константы связи и их приложениям в физике адронов.

Возможность сингулярного поведения  $\alpha_s \sim 1/Q^2$  при  $Q^2 \rightarrow 0$ , которую мы рассматриваем, исследовалась в ряде работ. В частности, в работах [26] инфракрасное поведение глюонных функций Грина исследовалось аналитическими методами в бездуховой аксиальной калибровке, в которой бегущая константа связи КХД определяется пропагатором глюона. В этих работах было показано, что сингулярное поведение глюонного пропагатора

вида  $D(Q) \sim 1/(Q^2)^2$  при  $Q^2 \rightarrow 0$  возможно, но при этом необходимо отказаться от обычно используемого приближения трехглюонной вершинной функции ее продольной частью и учитывать вклад поперечной части трехглюонной вершинной функции определенного вида.

Структура настоящей работы такова. В разделе 1 рассматриваются основные идеи построения синтетической модели инвариантного заряда для всех  $Q^2$  на однопетлевом уровне. В разделе 2 описывается построение аналитического инвариантного заряда для приближений стандартного вида исходной теории возмущений до четырехпетлевого и ее разделение на пертурбативную и непертурбативную компоненты. В разделе 3 на основе аналитического инвариантного заряда строится синтетическая минимальная модель инвариантного заряда с подавлением непертурбативных вкладов при больших  $Q^2$ . Производится фиксация параметров модели. В заключении обсуждаются результаты и формулируются основные выводы.

## 1. Однопетлевая синтетическая модель инвариантного заряда КХД

Рассмотрим следующую аддитивную модификацию однопетлевой бегущей константы связи КХД с помощью непертурбативных полюсных членов<sup>1</sup>

$$\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \left[ \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - Q^2} + \frac{c\Lambda^2}{Q^2} + \frac{(1-c)\Lambda^2}{Q^2 + m_g^2} \right], \quad (1)$$

где

$$m_g^2 = \frac{\Lambda^2}{c-1}. \quad (2)$$

Здесь  $Q^2$  — это квадрат евклидова импульса, константа  $b_0 = 11 - 2n_f/3$  ( $n_f$  — число ароматов активных кварков),  $\Lambda$  — размерный параметр однопетлевой модели КХД (степенные члены быстро убывают при больших  $Q^2$  и на определении параметра  $\Lambda$  как  $\Lambda_{\text{QCD}}$  практически не сказываются),  $c$  — безразмерный параметр модели. Параметр  $\Lambda$  может быть фиксирован, например, условием нормировки, а параметр модели  $c$ , как мы далее увидим, характеризует соотношение между параметром  $\Lambda_{\text{QCD}}$  и параметром натяжения струны  $\sigma$  в струнных моделях.<sup>2</sup> Для реалистического определения параметров  $\Lambda_{\text{QCD}}$ ,  $\sigma$  и их связи необходимо, разумеется, выйти за рамки однопетлевого приближения.

Первый член уравнения (1) является решением уравнения ренормализационной группы (РГ) для бегущей константы связи КХД  $\alpha_s(Q^2)$

$$Q^2 \frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial Q^2} = \beta(\alpha_s) \quad (3)$$

в однопетлевом приближении,  $\beta(\alpha_s) \simeq -\beta_0 \alpha_s^2$ ,  $\beta_0 = b_0/4\pi$ . Вводя ренормализационно инвариантный параметр  $\Lambda$  (константу интегрирования дифференциального уравнения),

<sup>1</sup>Однопетлевая модель рассматривалась в работах [27–29] и окончательно сформулирована с фиксацией параметров из энергетических соображений в работе [30].

<sup>2</sup>В приближениях КХД, не учитывающих эффекты, связанные с массами тяжелых кварков, имеется только один размерный параметр. Например, это  $\Lambda_{\text{QCD}}$  для больших  $Q^2$  или же параметр натяжения струны  $\sigma$ , адекватный при малых  $Q^2$ . В потенциальных моделях связь этих параметров исследуется при описании связанных состояний тяжелых кварков [31–36]. Рассматриваемая однопетлевая модель посредством параметра  $c$  описывает связь параметра  $\Lambda$  модели и параметра  $\sigma$  модели.

получаем, что это решение

$$\alpha_s^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} \quad (4)$$

имеет нефизическую сингулярность (полюс Ландау) при  $Q^2 = \Lambda^2$ . Стремление к нулю выражения (4) при  $Q^2 \rightarrow \infty$  соответствует замечательному свойству асимптотической свободы [37] неабелевых калибровочных теорий, а увеличение  $\alpha_s$  с уменьшением  $Q^2$  (до некоторой критической величины или до бесконечности) может быть связано с решением проблемы конфайнмента.

Метод РГ позволяет просуммировать бесконечный класс диаграмм, восстанавливая при этом ренормализационную инвариантность. Однако в результате аналитическая структура в комплексной плоскости  $Q^2$  существенно изменяется. Отдельные диаграммы являлись аналитическими функциями в комплексной плоскости  $Q^2$  с разрезом вдоль действительной отрицательной полуоси, тогда как в выражении (4) помимо указанного разреза имеется полюс в точке  $Q^2 = \Lambda^2$ . Второй член в формуле (1) является непертурбативным,  $\Lambda^2 \simeq \mu^2 \exp\{-4\pi/b_0\alpha_s(\mu^2)\}$ , он введен для того, чтобы этот нефизический полюс сократить. Сумма двух первых членов в формуле (1) является аналитической функцией в комплексной плоскости  $Q^2$  с разрезом от нуля до  $-\infty$ ,

$$\alpha_{\text{an}}^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \left[ \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)} + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - Q^2} \right]. \quad (5)$$

Эту функцию можно записать с помощью дисперсионного соотношения

$$\alpha_{\text{an}}^{(1)}(Q^2) = \int_0^\infty \frac{d\sigma \tilde{\rho}^{(1)}(\sigma)}{\sigma + Q^2}, \quad (6)$$

в котором функцию  $\tilde{\rho}^{(1)}(\sigma)$  мы называем однопетлевой спектральной плотностью

$$\tilde{\rho}^{(1)}(\sigma) = \frac{4\pi}{b_0} \frac{1}{\ln^2(\sigma/\Lambda^2) + \pi^2}. \quad (7)$$

Она может быть получена в результате аналитического продолжения  $\alpha_s$  в пространство Минковского  $Q^2 \rightarrow -\sigma - i0$  и вычисления ее мнимой части,  $\tilde{\rho}^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \Im \alpha_s^{(1)}(-\sigma - i0)$ . При действительных  $Q^2 > 0$  функция (5) является положительной, убывающей с ростом  $Q^2$  функцией с максимальным значением в нуле  $\alpha_{\text{an}}^{(1)}(0) = 4\pi/b_0$ . Второй, непертурбативный член в формуле (5) не дает вклада в мнимую часть  $\alpha_{\text{an}}^{(1)}(Q^2)$  при переходе в пространство Минковского, так что  $\tilde{\rho}^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{\pi} \Im \alpha_{\text{an}}^{(1)}(-\sigma - i0)$ . Синтетическую модель (1) мы также можем записать в виде дисперсионного соотношения

$$\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(Q^2) = \int_{-0}^\infty \frac{d\sigma \tilde{\rho}_{\text{syn}}^{(1)}(\sigma)}{\sigma + Q^2}. \quad (8)$$

Функцию  $\tilde{\rho}_{\text{syn}}^{(1)}(\sigma)$  мы называем однопетлевой спектральной плотностью для синтетической бегущей константы связи. Она содержит два дополнительных члена в виде  $\delta$ -функций,

$$\tilde{\rho}_{\text{syn}}^{(1)}(\sigma) = \tilde{\rho}^{(1)}(\sigma) + \frac{4\pi}{b_0} \left[ c\Lambda^2\delta(\sigma) + (1-c)\Lambda^2\delta(\sigma - m_g^2) \right]. \quad (9)$$

Введение двух полюсных членов в точках  $Q^2 = 0$  и  $Q^2 = -m_g^2$  при значениях параметра  $c > 1$  не привело к возникновению особенностей функции  $\alpha_{\text{syn}}^{(1)}$  в комплексной плоскости  $Q^2$  с разрезом вдоль отрицательной полуоси. В формуле (9) для спектральной плотности появились по сравнению с выражением (7) пертурбативного происхождения два дополнительных члена в виде  $\delta$ -функций, локализованных в точках  $\sigma = 0$  и  $\sigma = m_g^2$ .

Приведем выражение (1) для  $\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(Q^2)$  к явно ренормализационно-инвариантному виду. Это можно сделать не решая дифференциальных ренормгрупповых уравнений. Записав для  $\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(Q^2)$  условие нормировки, мы получаем уравнение для искомой зависимости параметра  $\Lambda^2$  от значений  $\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(\mu^2)$  и  $\mu^2$  вида

$$\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(\mu^2) = \frac{4\pi}{b_0} \left[ \frac{1}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} + \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - \mu^2} + \frac{c\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{(1-c)\Lambda^2}{\mu^2 + m_g^2} \right]. \quad (10)$$

Из размерных соображений запишем

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp\{-\varphi(a(\mu^2))\}, \quad (11)$$

причем  $a(\mu^2) = (b_0/4\pi)\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(\mu^2)$ . Тогда для функции  $\varphi(a)$  имеем трансцендентное уравнение

$$a = \frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{1 - e^{\varphi(a)}} + ce^{-\varphi(a)} - \frac{(c-1)^2}{1 + (c-1)e^{\varphi(a)}}. \quad (12)$$

Решением этого уравнения является функция  $\varphi(a)$ , которая при  $a \rightarrow +0$  имеет поведение  $\varphi(a) \simeq 1/a \rightarrow +\infty$  при всех значениях параметра  $c$ . Это поведение соответствует пертурбативной области. Поведение этого решения (при  $c < 1$  у функции  $\varphi(a)$  имеется две ветви, из которых одна имеет правильное поведение в пертурбативной области) при  $a \rightarrow +\infty$  зависит от значений параметра  $c$ . При  $c \geq 1$   $\varphi(a) \simeq -\ln(a/c) \rightarrow -\infty$ . При  $c < 1$  функция  $\varphi$  стремится к конечному значению,  $\varphi(a) \rightarrow \varphi_0 = -\ln(1-c)$ . Бета-функцию  $\beta_{\text{syn}}(\alpha_{\text{syn}})$  для синтетической бегущей константы связи мы найдем с помощью уравнения Гелл-Манна – Лоу

$$Q^2 \frac{\partial \alpha_{\text{syn}}(Q^2)}{\partial Q^2} = \beta_{\text{syn}}(\alpha_{\text{syn}}). \quad (13)$$

Продифференцировав бегущую константу связи (1) с использованием уравнений (11), (12), получаем выражение

$$\beta_{\text{syn}}(\alpha_{\text{syn}}) = \frac{4\pi}{b_0} \left\{ -a + \frac{1}{\varphi(a)} - \frac{1}{\varphi^2(a)} + \frac{1}{(1 - e^{\varphi(a)})^2} - \frac{(c-1)^2}{(1 + (c-1)e^{\varphi(a)})^2} \right\} \Big|_{a=b_0\alpha_{\text{syn}}/4\pi}. \quad (14)$$

Отсюда, зная поведение правильной ветви функции  $\varphi(a)$  при  $a \rightarrow 0, \infty$ , можно найти асимптотики

$$\beta_{\text{syn}}(\alpha_{\text{syn}}) \simeq -\frac{b_0}{4\pi} \alpha_{\text{syn}}^2 + o(\alpha_{\text{syn}}^2), \quad \alpha_{\text{syn}} \rightarrow 0 \quad (15)$$

для всех значений  $c$  и

$$\begin{aligned} \beta_{\text{syn}}(\alpha_{\text{syn}}) &\simeq -\alpha_{\text{syn}} - \frac{4\pi}{b_0} c(c-2) + o(1), \quad \alpha_{\text{syn}} \rightarrow \infty \quad (c \geq 1), \\ \beta_{\text{syn}}(\alpha_{\text{syn}}) &\simeq -\frac{b_0}{4\pi} \frac{\alpha_{\text{syn}}^2}{(1-c)^2} + O(\alpha_{\text{syn}}), \quad \alpha_{\text{syn}} \rightarrow \infty \quad (c < 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Сделав соответствующие разложения, можно убедиться в том, что при  $\varphi \rightarrow 0$  особенность  $\beta$ -функции (14) является кажущейся. Можно убедиться также, что при всех  $\alpha_{\text{syn}} > 0$  функция  $\beta_{\text{syn}}(\alpha_{\text{syn}})$  является отрицательно определенной (для правильной ветви при  $0 < c < 1$ ).

Три последних члена синтетической бегущей константы (1) с учетом (2) запишем в виде

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(Q^2) &= \frac{4\pi}{b_0} \left[ \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - Q^2} + \frac{c\Lambda^2}{Q^2} + \frac{(1-c)\Lambda^2}{Q^2 + m_g^2} \right] \\ &= \frac{4\pi}{b_0} \frac{c\Lambda^6}{Q^2(\Lambda^2 - Q^2)(\Lambda^2 + (c-1)Q^2)}.\end{aligned}\quad (17)$$

При  $a \rightarrow +0$  согласно уравнению (12) функция  $\phi(a) \simeq 1/a$ , так что для  $\Lambda$  из (11) получаем  $\Lambda^2 \simeq \mu^2 \exp(-1/a)$  при  $\alpha_{\text{syn}}(\mu^2) = (4\pi/b_0)a \rightarrow +0$ , и поэтому члены уравнения (17) следует рассматривать как непертурбативные. Из формулы (17) видим, что при  $c = 0$  синтетическая бегущая константа связи (1) в однопетлевом приближении сводится к пертурбативному выражению (4). Сингулярный в нуле (ответственный за инфракрасное усиление) член обращается в нуль, а массовый член сокращается с членом, возникшим в результате процедуры аналитизации.

При  $c = 1$  в синтетической модели пертурбативный полюс Ландау сокращается, массовый член исчезает, сингулярный член присутствует. При больших  $Q^2$  непертурбативные члены вида  $\sim 1/Q^2$  сокращаются, поведение непертурбативных вкладов таково:

$$\alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \left[ -\frac{\Lambda^4}{Q^4} \right] + O\left(\frac{\Lambda^6}{Q^6}\right).\quad (18)$$

При невыделенных значениях параметра  $c$  ( $c \neq 0, 1$ ) поведение непертурбативного “хвоста” при больших  $Q^2$  таково:

$$\alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \left[ \frac{c}{1-c} \frac{\Lambda^6}{Q^6} \right] + O\left(\frac{\Lambda^8}{Q^8}\right).\quad (19)$$

Как видно из формулы (19), непертурбативные вклады убывают при больших  $Q^2$  весьма быстро.

Таким образом, синтетическая бегущая константа связи КХД на однопетлевом уровне имеет следующие интересные свойства:

- по построению, как функция  $Q^2$ , она имеет при  $c \geq 1$  аналитическую структуру, соответствующую условию причинности, то есть является голоморфной функцией в комплексной плоскости  $Q^2$  с разрезом вдоль действительной оси от нуля до минус бесконечности;
- как функция значения в точке нормировки  $\alpha_{\text{syn}}(\mu^2)$  она имеет существенную особенность в нуле, асимптотическое разложение ее непертурбативной части по  $\alpha_{\text{syn}}(\mu^2)$  при  $\alpha_{\text{syn}}(\mu^2) \rightarrow +0$  равно нулю, что дает соответствие исходной теории возмущений;
- в ультрафиолетовой области она соответствует обычному результату теории возмущений (с учетом ренормализационной инвариантности) с точностью до быстро убывающих степенных членов. При  $c = 1$  непертурбативные члены имеют поведение вида  $\sim 1/(Q^2)^2$  при  $Q^2 \rightarrow \infty$ , а при  $c \neq 1$  поведение вида  $\sim 1/(Q^2)^3$  при  $Q^2 \rightarrow \infty$ ;



- в инфракрасной области при  $c \neq 0$  она не имеет нефизических сингулярностей теории возмущений. В зависимости от значений параметра  $c$  модель отвечает четырем качественно различным случаям. При  $c > 1$  имеются массовый член и член, отвечающий инфракрасному усилению. При  $c = 1$  имеется фиксированный член с инфракрасным усилением, а массовый член отсутствует. При  $0 < c < 1$  имеем член с инфракрасным усилением и тахионный член, а при  $c < 0$  ситуация совсем экзотическая, имеем “антиконфайнмент” и тахионный член.

Мы далее увидим, в какой степени эти свойства модифицируются при переходе к многопетлевым случаям. Важно отметить, что в 1-петлевом случае мы имеем не только представление (8), но, во-первых, непертурбативные вклады выделены из синтетической бегущей константы связи в явном виде

$$\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(Q^2) = \alpha^{\text{pt}(1)}(Q^2) + \alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(Q^2) \quad (20)$$

и, во-вторых, для непертурбативных вкладов имеется простая формула. При больших  $Q^2$  ( $Q^2 > \Lambda^2$ ) эти вклады могут быть представлены в виде ряда

$$\alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(Q^2) = -\frac{4\pi}{b_0} \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - (1-c)^{-n-1}\right) \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right)^n. \quad (21)$$

При малых  $Q^2$  ( $Q^2 < \Lambda^2$ ) имеем разложение

$$\alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \frac{\Lambda^2}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - (1-c)^{n+1}\right) \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^n. \quad (22)$$

Выделенным из соображений симметрии случаем является случай  $c = 2$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(Q^2) &= \frac{4\pi}{b_0} \left[ \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - Q^2} + \frac{2\Lambda^2}{Q^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + Q^2} \right] \\ &= \frac{4\pi}{b_0} \frac{2\Lambda^2}{Q^2} \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4 - Q^4}, \end{aligned} \quad (23)$$

для которого непертурбативные вклады являются нечетной функцией  $Q^2$ ,

$$\alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(-Q^2) = -\alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(Q^2). \quad (24)$$

В этом случае как в ультрафиолетовом, так и в инфракрасном разложениях отсутствуют члены четных степеней  $Q^2$ . В частности, в инфракрасном разложении отсутствует кулоновская мода. Укажем для полноты на случай  $c = \infty$ , для которого

$$\alpha_{\text{syn}}^{\text{npt}(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \frac{\Lambda^6}{Q^4(\Lambda^2 - Q^2)}$$

и сингулярность в инфракрасной области более сильная,  $\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(Q^2) \sim 1/(Q^2)^2$ ,  $Q^2 \rightarrow 0$ .

## 2. Многопетлевой аналитический инвариантный заряд КХД

В многопетлевом случае уравнение ренормализационной группы (3) для бегущей константы связи  $\alpha_s(Q^2)$  имеет вид

$$Q^2 \frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial Q^2} = \beta(\alpha_s) = -\beta_0 \alpha_s^2 - \beta_1 \alpha_s^3 - \beta_2 \alpha_s^4 - \beta_3 \alpha_s^5 + O(\alpha_s^6), \quad (25)$$

где коэффициенты [37] – [40]

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{4\pi} b_0, \quad b_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f, \\ \beta_1 &= \frac{1}{8\pi^2} b_1, \quad b_1 = 51 - \frac{19}{3} n_f, \\ \beta_2 &= \frac{1}{128\pi^3} b_2, \quad b_2 = 2857 - \frac{5033}{9} n_f + \frac{325}{27} n_f^2, \\ \beta_3 &= \frac{1}{256\pi^4} b_3, \quad b_3 = \frac{149753}{6} + 3564\zeta_3 \\ &\quad - \left( \frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27} \zeta_3 \right) n_f + \left( \frac{50065}{162} + \frac{6472}{81} \zeta_3 \right) n_f^2 + \frac{1093}{729} n_f^3. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $n_f$  — это число ароматов активных кварков,  $\zeta$  — зета-функция Римана,  $\zeta_3 = \zeta(3) = 1.202056903\dots$ . Коэффициенты  $\beta_0, \beta_1$  не зависят от выбора схемы перенормировки, следующие коэффициенты зависят. Приведенные выражения соответствуют выбору схемы  $\overline{MS}$ , мы ими и будем пользоваться при численных расчетах.

Решение уравнения (25) для  $\alpha_s(Q^2)$  при  $L = \ln(Q^2/\Lambda^2) \rightarrow \infty$  записывают [41] в виде

$$\begin{aligned} \alpha_s(Q^2) &= \frac{1}{\beta_0 L} \left\{ 1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2 L} \ln L + \frac{\beta_1^2}{\beta_0^4 L^2} \left[ \ln^2 L - \ln L - 1 + \frac{\beta_0 \beta_2}{\beta_1^2} \right] \right. \\ &\quad - \frac{\beta_1^3}{\beta_0^6 L^3} \left[ \ln^3 L - \frac{5}{2} \ln^2 L - \left( 2 - \frac{3\beta_0 \beta_2}{\beta_1^2} \right) \ln L \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} - \frac{\beta_0^2 \beta_3}{2\beta_1^3} \right] + O\left(\frac{1}{L^4}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Отрезки ряда (27) с членами вида до  $1/L^n$  включительно ( $n=1,2,3,4$ ) в наших дальнейших построениях мы будем называть пертурбативной компонентой инвариантного заряда в  $n$ -петлевом приближении и обозначать как  $\alpha^{\text{pt}}(Q^2)$ . Она может быть записана в виде

$$\alpha^{\text{pt}}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} a(x), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{\ln x} - b \frac{\ln(\ln x)}{\ln^2 x} + b^2 \left[ \frac{\ln^2(\ln x)}{\ln^3 x} - \frac{\ln(\ln x)}{\ln^3 x} + \frac{\kappa}{\ln^3 x} \right] \\ &\quad - b^3 \left[ \frac{\ln^3(\ln x)}{\ln^4 x} - \frac{5}{2} \frac{\ln^2(\ln x)}{\ln^4 x} + (3\kappa + 1) \frac{\ln(\ln x)}{\ln^4 x} + \frac{\bar{\kappa}}{\ln^4 x} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь  $x = Q^2/\Lambda^2$ , а коэффициенты

$$\begin{aligned} b &= \frac{\beta_1}{\beta_0^2} = \frac{2b_1}{b_0^2}, \\ \kappa &= -1 + \frac{\beta_0\beta_2}{\beta_1^2} = -1 + \frac{b_0b_2}{8b_1^2}, \\ \bar{\kappa} &= \frac{1}{2} - \frac{\beta_0^2\beta_3}{2\beta_1^3} = \frac{1}{2} - \frac{b_0^2b_3}{16b_1^3}. \end{aligned} \quad (30)$$

Величины  $b_0$ ,  $b$ ,  $\kappa$ ,  $\bar{\kappa}$  зависят от  $n_f$ . В стандартной картине сшивания решений на порогах тяжелых кварков параметр  $\Lambda$  также становится зависящим от  $n_f$ .<sup>3</sup>

Аналитическая константа связи определяется посредством интегрального представления

$$a_{\text{an}}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{x + \sigma} \rho(\sigma), \quad (31)$$

в котором спектральная плотность  $\rho(\sigma) = \Im a_{\text{an}}(-\sigma - i0)$ . В аналитическом подходе полагают<sup>4</sup>  $\Im a_{\text{an}}(-\sigma - i0) = \Im a(-\sigma - i0)$ . В результате от функции  $a(x)$  вида (29) с нефизическими сингулярностями на положительной действительной полуоси комплексной плоскости  $Q^2$  приходим к  $a_{\text{an}}(x)$  вида (31), являющейся однозначной аналитической функцией в комплексной плоскости  $Q^2$  с разрезом от нуля до  $-\infty$  (при стандартном определении разрезов логарифмической функции). В работах [12, 13] до четырехпетлевого уровня получено разделение аналитической константы связи на пертурбативную и непертурбативную компоненты,

$$\alpha_{\text{an}}(Q^2) = \alpha^{\text{pt}}(Q^2) + \alpha_{\text{an}}^{\text{npt}}(Q^2). \quad (32)$$

В формуле (32) под пертурбативной компонентой  $\alpha^{\text{pt}}(Q^2)$  подразумевается исходное (в данном случае стандартное) решение уравнения ренормализационной группы до четырехпетлевого, а  $\alpha_{\text{an}}^{\text{npt}}(Q^2)$  — это то, что возникло дополнительно в результате процедуры аналитизации. В указанных работах для непертурбативной компоненты получено явное выражение, полезное, в частности, для аналитического продолжения функции  $\alpha_{\text{an}}$  в комплексную плоскость  $Q^2$ , а также разложение в степенной ряд

$$\alpha_{\text{an}}^{\text{npt}}(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \sum_{n=1}^\infty c_n \left( \frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^n, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} c_n &= -1 + bn[1 - \gamma - \ln(n)] - \frac{1}{2}b^2n^2 \left[ 1 - \frac{\pi^2}{6} + \kappa \right. \\ &\quad \left. + (1 - \gamma - \ln(n))^2 \right] + \frac{1}{6}b^3n^3 \left[ 2 + \frac{5}{2}\kappa + \bar{\kappa} - 2\zeta_3 \right. \\ &\quad \left. + (1 - \gamma - \ln(n))^3 + 3(1 - \gamma - \ln(n)) \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} + \kappa \right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

<sup>3</sup>В рамках теории возмущений параметр  $\Lambda$  зависит также от выбора схемы перенормировки. Для исследования отклонения непертурбативных моделей и их следствий от пертурбативных величин предпочтительным является выбор стандартной схемы перенормировки  $\overline{MS}$ .

<sup>4</sup>Мы рассматриваем именно такой вариант аналитизации. Константу связи, полученную в результате описанной процедуры, мы и называем аналитической константой связи.

Здесь  $\gamma$  — это постоянная Эйлера,  $\gamma \simeq 0.5772$ . Ряд (33) равномерно сходится при  $Q^2 > \Lambda^2$ , он является основой эффективного метода прецизионного исследования  $\alpha_{\text{an}}(Q^2)$  при всех  $Q > \Lambda$ . В табл. 1 приведены значения коэффициентов  $c_n$  для первых пяти членов ряда (33) в интересующем нас случае  $n_f = 3$ . Отметим такие важные свойства разложения (33), как высокую петлевую стабильность коэффициента лидирующего члена и медленный рост коэффициентов  $c_n$  с увеличением порядкового номера  $n$ .

Таблица 1. Зависимость коэффициентов  $c_n$  и петлевых вкладов в эти коэффициенты от порядкового номера для 1 – 4-петлевого случаев,  $n_f = 3$ .

$n$	$c_n^{1\text{-loop}}$	$\Delta_n^{2\text{-loop}}$	$\Delta_n^{3\text{-loop}}$	$\Delta_n^{4\text{-loop}}$	$c_n^{2\text{-loop}}$	$c_n^{3\text{-loop}}$	$c_n^{4\text{-loop}}$
1	-1.0	0.33405	0.01608	-0.07825	-0.66595	-0.64987	-0.72812
2	-1.0	-0.42724	0.19624	-0.37379	-1.42724	-1.23101	-1.60480
3	-1.0	-1.60196	-0.63626	-1.28115	-2.60196	-3.23823	-4.51937
4	-1.0	-3.04517	-3.48651	-5.07338	-4.04517	-7.53168	-12.60506
5	-1.0	-4.68801	-9.19185	-16.30462	-5.68801	-14.87987	-31.18449

### 3. Многопетлевой синтетический инвариантный заряд КХД

Обобщим однопетлевую синтетическую модель на многопетлевые случаи. Итак, модифицируем аналитическую константу связи путем введения двух дополнительных непертурбативных членов: сингулярного в нуле члена вида  $\sim 1/Q^2$  и массового члена вида  $\sim 1/(Q^2 + m_g^2)$ . В результате мы приходим к выражению

$$\alpha_{\text{syn}}(Q^2) = \alpha_{\text{an}}(Q^2) + \frac{4\pi}{b_0} \left[ \frac{c\Lambda^2}{Q^2} - \frac{d\Lambda^2}{Q^2 + m_g^2} \right], \quad (35)$$

в которое помимо параметра  $\Lambda$  вошли три дополнительных параметра:  $c$ ,  $d$  и  $m_g$  ( $m_g \equiv m_\Lambda \Lambda$ ), которые мы считаем ненулевыми. Задачу определения этих параметров решаем следующим образом. При больших  $Q^2$  ( $Q^2 > \Lambda^2$ ) мы можем с помощью разложения (33) записать

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{syn}}(Q^2) &= \alpha^{\text{pt}}(Q^2) + \frac{4\pi}{b_0} \left[ (c_1 + c - d) \frac{\Lambda^2}{Q^2} + (c_2 + dm_\Lambda^2) \left( \frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + (c_3 - dm_\Lambda^4) \left( \frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^3 \right] + O \left( \left( \frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^4 \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Потребуем, чтобы непертурбативные вклады при больших  $Q^2$  были минимальными, то есть чтобы члены вида  $\sim 1/Q^2$ ,  $\sim 1/(Q^2)^2$  в выражении (36) отсутствовали.<sup>5</sup> Тогда два параметра из трех оказываются фиксированными посредством уравнений

$$d = c + c_1, \quad m_\Lambda^2 = -c_2/(c + c_1). \quad (37)$$

<sup>5</sup>Это требование соответствует принципу минимальности непертурбативных вкладов в пертурбативной ультрафиолетовой области [28, 29].

Введем для удобства параметр  $\Lambda_1^2 = c\Lambda^2$ , который мы будем считать фиксированным. Коэффициенты  $c_n < 0$ , поэтому условие отсутствия тахиона есть  $\Lambda < \Lambda_1/\sqrt{-c_1}$ . Нефиксированным параметром модели при заданном числе петель является один параметр  $\Lambda$ . Тогда с учетом (37) имеем

$$\alpha_{\text{syn}}(Q^2) = \alpha^{\text{pt}}(Q^2) + \frac{4\pi}{b_0} \left[ c_3 - \frac{c_2^2 \Lambda^2}{\Lambda_1^2 + c_1 \Lambda^2} \right] \left( \frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^3 + O\left( (Q^2)^{-4} \right). \quad (38)$$

Как видно из (38), лидирующий степенной непертурбативный член при  $Q^2 \rightarrow \infty$  быстро убывает и при отсутствии тахиона является отрицательным.<sup>6</sup> Для динамической массы глюона из уравнений (37) получаем

$$m_g = \Lambda \sqrt{\frac{-c_2 \Lambda^2}{\Lambda_1^2 + c_1 \Lambda^2}}. \quad (39)$$

Обратимся к интерпретации параметра модели  $\Lambda_1 = \sqrt{c}\Lambda$ , характеризующего величину сингулярного члена. Как уже отмечалось, поведение инвариантного заряда  $\alpha_V \sim 1/Q^2$  при  $Q^2 \rightarrow 0$  в V-схеме перенормировки соответствует линейному запирающему кварк-антикварковому статическому потенциалу, определяемому через вакуумное ожидание петли Вильсона. Соответствие потенциала и инвариантного заряда мы устанавливаем с помощью формулы

$$V(r) = -\frac{4}{3} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{4\pi\alpha_V(q^2)}{q^2} \Big|_{n=3}, \quad (40)$$

являющейся определением  $\alpha_V(q^2)$  как эффективного заряда, который является схемно-независимой калибровочно-инвариантной величиной [1, 7, 33]. Цветовой фактор соответствует группе  $SU(N_c)$ ,  $N_c = 3$ . Пусть в инфракрасной области

$$\alpha_V(q^2) \simeq \frac{3}{2} \frac{\sigma}{q^2}, \quad q^2 \rightarrow 0. \quad (41)$$

Тогда интеграл по трехмерному импульсному пространству в формуле (40) формально расходится в нуле. Мы доопределяем его, вводя размерную регуляризацию. После интегрирования сингулярного члена по  $n$ -мерному евклидову импульсному пространству мы переходим к  $n = 3$ . Тогда, поскольку при этом расходимостей не возникает, переход к  $n$ -мерному интегрированию дает не только регуляризацию, но и доопределение формально расходящегося интеграла для случая  $n = 3$ . В результате для инфракрасного поведения эффективного заряда (41) поведение потенциала на больших расстояниях получается следующим

$$V(r) \simeq \sigma r, \quad r \rightarrow \infty, \quad (42)$$

где  $\sigma \equiv a^2$  — параметр натяжения струны. Определим параметр  $\Lambda_1$  синтетической модели  $\alpha_{\text{syn}}$  из условия соответствия сингулярного в нуле члена в формуле (35) инфракрасному поведению (41) эффективного заряда  $\alpha_V$ . Тогда

$$\frac{3}{2}\sigma = \frac{4\pi}{b_0} \Lambda_1^2, \quad \Lambda_1^2 = c\Lambda^2. \quad (43)$$

<sup>6</sup>Отрицательным оказывается при больших  $Q^2$  и весь непертурбативный “хвост” бегущей константы связи  $\alpha_{\text{syn}}(Q^2)$ .

Задав параметр натяжения струны, из формулы (43) мы можем фиксировать параметр модели  $\Lambda_1$ . Тогда при  $a \simeq 0.42$  ГэВ,  $b_0 = 9$  получаем<sup>7</sup>  $\Lambda_1 \simeq 435$  МэВ. Параметр модели  $\Lambda$  (следовательно и параметр  $c$ ) может быть фиксирован условием нормировки, и тогда модель будет полностью фиксирована.

Рассмотрим зависимость динамической массы глюона от значений параметра  $\Lambda$  при различном числе петель исходного пертурбативного приближения. На рис. 1 приведены 4 кривые для соответствующих зависимостей  $m_g(\Lambda)$  при  $\Lambda_1 = 435$  МэВ. До 400 МэВ кривые не слишком сильно расходятся, и при  $\Lambda = 375$  МэВ  $m_g \simeq 0.6$  ГэВ. При проведении численных расчетов здесь и далее мы полагаем число ароматов активных кварков равным трем,  $n_f = 3$ .

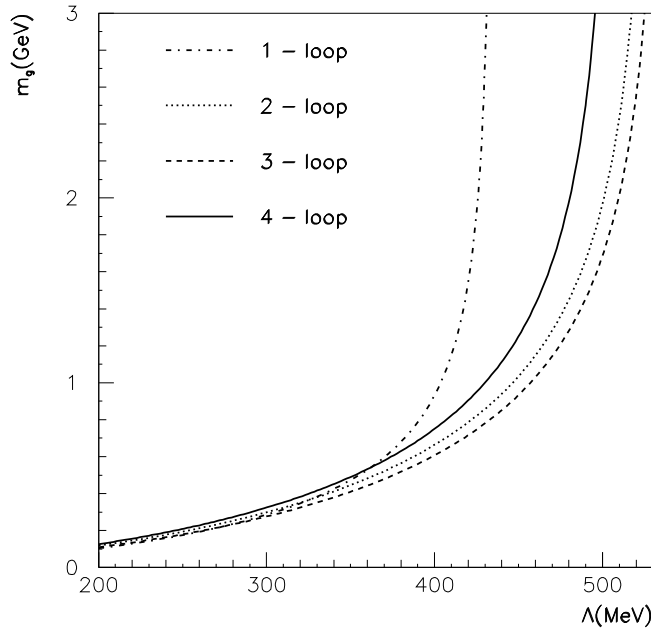


Рис. 1. Динамическая масса глюона  $m_g$  как функция параметра  $\Lambda$  для различного числа петель исходного приближения теории возмущений.

Исследуем импульсную зависимость бегущей константы связи модели  $\alpha_{\text{syn}}(Q^2)$  и сравним ее с  $\alpha_{\text{an}}(Q^2)$  и  $\alpha^{\text{pt}}(Q^2)$ . Нормируем эти величины на массе  $\tau$ -лептона условием [14–17]  $\alpha(M_\tau^2) = 0.323$ ,  $M_\tau = 1.777$  ГэВ. Соответствующие этому условию нормировки значения параметров  $\Lambda$ , динамической массы глюона  $m_g$  и параметров  $c$ ,  $d$  приведены в табл. 2. Отметим два обстоятельства. Параметры  $\Lambda_{\text{syn}}$  и  $\Lambda_{\text{pt}}$  весьма близки друг к другу, а параметры  $\Lambda_{\text{an}}$  принимают существенно большие значения. Это является следствием наложения условий (37), обеспечивающих быстрое убывание непертурбативных членов в  $\alpha_{\text{syn}}(Q^2)$ . Для всех рассматриваемых величин однопетлевой случай оказывается выделенным, а да-

<sup>7</sup>Такое значение параметра натяжения струны получается, в частности, в модели релятивистской струны с точечными массивными кварками на концах [42]. Тогда наклон траекторий Редже  $\alpha' = 1/(2\pi\sigma) \simeq 0.90$  ГэВ<sup>-2</sup>.

лее, с ростом числа петель, наблюдается стабилизация. На рис. 2 для различного числа петель приведены кривые  $\alpha_{\text{syn}}$ ,  $\alpha_{\text{an}}$  и  $\alpha^{\text{pt}}$  как функции импульса  $Q$  при  $Q$  от 0 до 2 ГэВ.

Таблица 2. Параметры  $\Lambda_{\text{pt}}$  (МэВ),  $\Lambda_{\text{an}}$  (МэВ),  $\Lambda_{\text{syn}}$  (МэВ), динамическая масса глюона  $m_g$  (МэВ) и параметры  $c$ ,  $d$  в зависимости от числа петель. Число ароматов активных кварков  $n_f = 3$ ,  $\Lambda_1 = 435$  МэВ. Условие нормировки:  $\alpha(M_\tau^2) = 0.323$ ,  $M_\tau = 1.777$  ГэВ.

	1-loop	2-loop	3-loop	4-loop
$\Lambda_{\text{pt}}$	204.65	381.89	351.07	344.82
$\Lambda_{\text{an}}$	240.46	599.22	494.71	505.31
$\Lambda_{\text{syn}}$	204.65	383.43	351.89	345.90
$m_g$	109.01	580.34	416.06	473.66
$c$	4.5247	1.2890	1.5304	1.5839
$d$	3.5247	0.6230	0.8806	0.8558

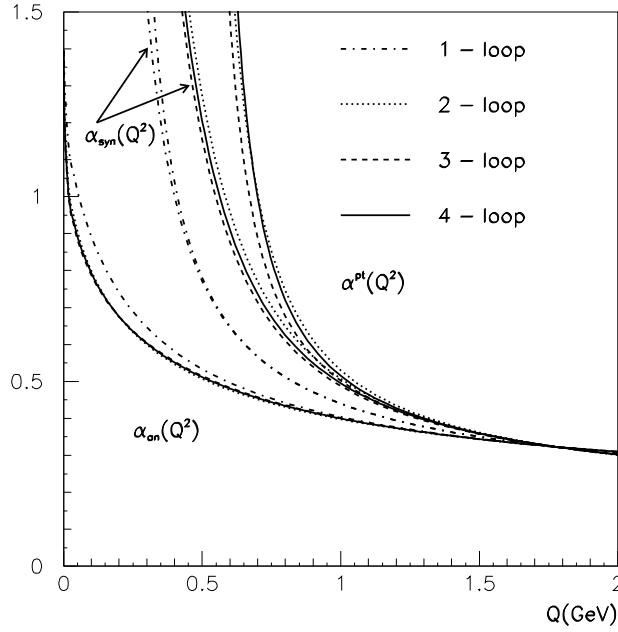


Рис. 2. Величины  $\alpha^{\text{pt}}(Q^2)$ ,  $\alpha_{\text{an}}(Q^2)$  и  $\alpha_{\text{syn}}(Q^2)$  как функции импульса  $Q$  для 1–4-петлевого случаев. Условие нормировки для всех функций  $\alpha(M_\tau^2) = 0.323$ ,  $M_\tau = 1.777$  ГэВ.

Для каждого числа петель пертурбативная кривая проходит выше кривой модели (при  $Q < M_\tau$ ), которая, в свою очередь, проходит выше аналитической кривой. Посмотрим на петлевую стабильность приведенных кривых. В зависимости от числа петель кривые для модели отличаются значительно меньше, чем пертурбативные кривые. Если

исключить однопетлевой случай, то, например, при  $Q = 0.7$  ГэВ разброс пертурбативных кривых составляет 0.11, аналитических — 0.006, а кривых модели — 0.06. Таким образом, импульсная зависимость модели обладает высокой петлевой стабильностью.

Отметим, что если увеличить значение  $\alpha_{\text{syn}}$  в точке нормировки  $M_\tau$ , то как сами массы  $m_g$ , так и их разброс в зависимости от числа петель увеличиваются.

## Заключение

При построении аналитического инвариантного заряда (31) в КХД нефизические сингулярности теории возмущений в инфракрасной области исчезают, а в ультрафиолетовой области возникают непетурбативные степенные поправки, которые в сравнении с основной пертурбативной компонентой инвариантного заряда быстро убывают при больших  $Q^2$ . Однако при рассмотрении непетурбативных величин может оказаться, что убывание непетурбативных вкладов не является достаточно быстрым для согласованного определения этих величин. В синтетической модели инвариантного заряда предлагается добиться максимально возможного подавления непетурбативных вкладов при больших  $Q^2$  с помощью минимального числа членов полюсного типа. Как оказалось, параметры, характеризующие введенные дополнительные непетурбативные члены, допускают прозрачную физическую интерпретацию и имеют разумные значения. Мы рассматриваем аналитический инвариантный заряд в однопетлевом случае и вводим два дополнительных члена полюсного типа: сингулярный в нуле член вида  $\sim 1/Q^2$ , который может соответствовать линейному конфайнменту кварков, и член вида  $\sim 1/(Q^2 + m_g^2)$ , в котором параметр  $m_g^2$  может иметь смысл ненулевой динамической массы глюона [43]. Потребовав максимально возможное убывание непетурбативных членов при больших  $Q^2$ , мы приходим к модели вида (1). Инвариантный заряд вида (1), построенный на основе аналитического инвариантного заряда (5), мы называем однопетлевой синтетической моделью инвариантного заряда, поскольку он включает параметры, относящиеся как к ультрафиолетовой области, так и к инфракрасной области. Модель  $\alpha_{\text{syn}}^{(1)}(Q^2)$  имеет два независимых параметра. Это размерный параметр  $\Lambda$  и безразмерный параметр  $c$  (или же еще один размерный параметр  $\Lambda_1 = \sqrt{c}\Lambda$ ), характеризующий величину сингулярного члена. В разделе 1 рассмотрены свойства однопетлевой синтетической модели инвариантного заряда и его непетурбативной компоненты в зависимости от значений безразмерного параметра  $c$ . Записано дисперсионное соотношение (8), (9), (7) и исследована бета-функция модели (14). В результате исследования многопетлевого аналитического инвариантного заряда и его непетурбативной компоненты возникает возможность естественного обобщения синтетической модели инвариантного заряда на многопетлевые случаи. Многопетлевая синтетическая модель инвариантного заряда (35) строится точно так же, как и однопетлевая — путем введения двух дополнительных непетурбативных членов вида  $\sim 1/Q^2$  и  $\sim 1/(Q^2 + m_g^2)$ . Требование минимальности непетурбативных вкладов приводит к двум уравнениям (37) для параметров введенных непетурбативных членов. В результате модель, как и в однопетлевом случае, имеет два независимых параметра. Это параметр  $\Lambda$ , который в силу весьма быстрого убывания непетурбативных вкладов при больших  $Q^2$  практически равен параметру  $\Lambda_{\text{QCD}}$  в области применимости пертурбативных решений. Второй параметр модели — это безразмерный параметр  $c$  (или размерный параметр  $\Lambda_1 = \sqrt{c}\Lambda$ ), характеризующий сингулярный член. Если величину параметра инфракрасного усиления модели посредством формул (43) сопоставить параметру натяжения струны струнных моделей,



то мы приходим к формуле (39) для динамической массы глюона как функции параметра  $\Lambda$ . Соответствующие зависимости для различного числа петель при  $\Lambda_1 = 435$  МэВ (соответственно  $\sigma^{1/2} = 0.42$  ГэВ) приводятся на рис. 1. Нормировка окончательно фиксирует синтетическую модель инвариантного заряда, значения параметров модели при  $\alpha(M_7^2) = 0.323$  приведены в табл. 2. Соответствующие импульсные зависимости синтетической модели инвариантного заряда в сравнении с пертурбативным инвариантным зарядом и аналитическим инвариантным зарядом приведены на рис. 2. Параметр  $m_g$  при  $\Lambda < \Lambda_1/\sqrt{-c_1}$  является действительным, и тогда синтетический инвариантный заряд  $\alpha_{\text{syn}}(Q^2)$  является голоморфной функцией в комплексной плоскости  $Q^2$  с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси.

Таким образом, синтетический инвариантный заряд КХД  $\alpha_{\text{syn}}(Q^2)$  для 1–4-петлевых приближений исходной теории возмущений имеет следующие свойства:

- как функция  $Q^2$  он имеет аналитическую структуру, соответствующую условию причинности, то есть является голоморфной функцией в комплексной плоскости  $Q^2$  с разрезом вдоль действительной оси от нуля до минус бесконечности;
- как функция значения в точке нормировки  $\alpha_{\text{syn}}(\mu^2)$  имеет существенную особенность в нуле, асимптотическое разложение его непертурбативной части по  $\alpha_{\text{syn}}(\mu^2)$  при  $\alpha_{\text{syn}}(\mu^2) \rightarrow +0$  равно нулю, что дает соответствие исходной теории возмущений;
- в ультрафиолетовой области он соответствует результатам теории возмущений с точностью до быстро убывающих степенных непертурбативных членов вида  $\sim 1/(Q^2)^3$  при  $Q^2 \rightarrow \infty$ ;
- в инфракрасной области он не имеет нефизических сингулярностей теории возмущений. Имеются член, соответствующий линейному конфайнменту, и массовый член.

Как видно из табл. 2, при рассмотренном способе фиксации двух параметров модели наблюдается высокая петлевая стабильность (и петлевая стабилизация) всех остальных параметров модели (при исключенном однопетлевом случае). В частности, динамическая масса глюона  $m_g$  при выбранном условии нормировки определенно находится в интервале 400–600 МэВ. Таким образом, идентификация параметра модели при сингулярном члене с параметром натяжения струны струнных моделей дает согласованные значения для всех параметров модели.

Согласно формуле (38) при  $\Lambda \neq \Lambda_1/\sqrt{-c_1}$  ( $c \neq -c_1$ ) непертурбативные вклады при больших  $Q^2$  убывают как  $\sim 1/(Q^2)^3$ , что является достаточным для обеспечения сходимости глюонного конденсата в ультрафиолетовой области [30]. В этой связи представляет интерес обобщение исследования глюонного конденсата работы [30] на многопетлевые случаи и сравнение с результатами работы [44] для сингулярной в нуле модели инвариантного заряда, в которой по построению полностью отсутствуют непертурбативные вклады при  $Q^2 > q_0^2$ , где параметр  $q_0 \sim 1$  ГэВ соответствует границе пертурбативной и непертурбативной областей.

Автор выражает глубокую признательность Б.А. Арбузову, А.В. Киселеву, В.А. Петрову, В.Е. Рочеву за полезные обсуждения, а также благодарит Д.В. Ширкова за ценные советы и стимулирующие обсуждения.

## Список литературы

- [1] *Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [2] *P.J. Redmond.* Phys. Rev. 1958. V. 112, P. 1404.
- [3] *Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, Д.В. Ширков.* ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 805.
- [4] *D.V. Shirkov, I.L. Solovtsov.* JINR Rapid Comm. 1996. V. 2[76]-96. P. 5; *D.V. Shirkov, I.L. Solovtsov.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 1209.
- [5] *Yu.L. Dokshitzer, G. Marchesini, B.R. Webber.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 469. P. 93.
- [6] *И.Л. Соловцов, Д.В. Ширков.* ТМФ. 1999. Т. 120. С. 482.
- [7] *Д.В. Ширков.* ТМФ. 2003. Т. 136. С. 3.
- [8] *B.A. Magradze.* Int. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 2715; *B.A. Magradze.* Comm. of JINR, E2-2000-222, Dubna 2000; *Д.С. Курашев, Б.А. Маградзе.* ТМФ. 2003. Т. 135. С. 95.
- [9] *A.I. Alekseev.* Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 114005; hep-ph/9906304.
- [10] *A.I. Alekseev.* On dependence of nonperturbative contributions in  $\bar{\alpha}_s(q^2)$  on an initial approximation of perturbation theory in an analytic approach to QCD. In: Proceedings of the XVth Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory. Tver, Russia, 2000. Eds. M.N. Dubinin, V.I. Savrin. М.: НИИЯФ МГУ, 2001. С. 290; hep-ph/0011178.
- [11] *А.И. Алексеев.* ЯФ. 2002. Т. 65. С. 1722.
- [12] *A.I. Alekseev.,* J. Phys. G. 2001. V. 27. P. L117; hep-ph/0105338.
- [13] *A.I. Alekseev.* Few-Body Syst. 2003. V. 32. P. 193; hep-ph/0211339.
- [14] *S. Eidelman et al.* Phys. Lett. B. 2004. V. 592. P. 1.
- [15] *S. Bethke.* J. Phys. G. 2000. V. 26. P. R27.
- [16] *O. Biebel.* Phys. Rep. 2001. V. 340. P. 165.
- [17] *A. A. Pivovarov.* Determination of the numerical value for the strong coupling constant from tau decays in perturbative QCD. Препринт INR-ТН-03-3. М.: ИЯИ, 2003; hep-ph/0301074.
- [18] *Ю.А. Симонов.* Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57. С. 513; ЯФ. 1995. Т. 58. С. 113; ЯФ. 2002. Т. 65. С. 140; ЯФ. 2003. Т. 66. С. 796.
- [19] *Д.В. Ширков.* ТМФ. 2002. Т. 132. С. 484.
- [20] *A.V. Nesterenko.* Mod. Phys. Lett. A. 2000. V. 15. P. 2401. *A.V. Nesterenko, I.L. Solovtsov.* Mod. Phys. Lett. A. 2001. V. 16. P. 2517; *A.V. Nesterenko.* Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 094028; *A. V. Nesterenko.* Int. J. Mod. Phys. A. 2003. V. 18. P. 5475.

- [21] *V. Gogohia*. Phys. Lett. B. 2004. V. 584. P. 225.
- [22] *G. Burgio, F. Di Renzo, G. Marchesini, E. Onofri*. Phys. Lett. B. 1998. V. 422. P. 219; Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1998. V. 63. P. 805; *G. Burgio, F. Di Renzo, C. Parrinello, C. Pittori*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1999. V. 73. P. 623; Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1999. V. 74. P. 388; *Ph. Boucaud et al.* JHEP. 2000. V. 0004. P. 006.
- [23] *L. von Smekal, A. Hauck, R. Alkofer*. Ann. Phys. 1998. V. 267. P. 1.
- [24] *C.D. Roberts, S.M. Schmidt*. Prog. Part. Nucl. Phys. 2000. V. 45. P. S1.
- [25] *R. Alkofer, L. von Smekal*. Phys. Rept. 2001. V. 353. P. 281.
- [26] *А.И. Алексеев*. ЯФ. 1981. Т. 33. С. 516; *А.И. Алексеев, Б.А. Арбузов, В.А. Байков*. ТМФ. 1982. Т. 52. С. 187; *А.И. Алексеев, В.Ф. Еднерал*. ЯФ. 1987. Т. 45. С. 1105.
- [27] *A.I. Alekseev*. QCD running coupling: freezing versus enhancement in the infrared region. In: Proc. of the XII International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory. Samara, Russia, 1997. Ed. В.В. Levtchenko. М.: НИИЯФ МГУ, 1999. С. 334; Препринт ИНЕР 97-90. Протвино: ИФВЭ, 1997; hep-ph/9802372.
- [28] *А.И. Алексеев, Б.А. Арбузов*. ЯФ. 1998. Т. 61. С. 314.
- [29] *A.I. Alekseev, B.A. Arbuzov*. Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 1447.
- [30] *A.I. Alekseev*. A model of the QCD running coupling constant with dynamically generated mass and enhancement in the infrared region. In Proc. of the Workshop on Nonperturbative Methods in Quantum Field Theory, Adelaide, Australia, 1998. Eds. A.V. Schreiber, A.G. Williams, A.W. Thomas. Singapore: World Scientific, 1998. P. 104; Препринт ИНЕР 98-41. Протвино: ИФВЭ, 1998; hep-ph/9808206.
- [31] *E. Eichten et al.* Phys. Rev. D. 1979. V. 17. P. 3090; Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 203.
- [32] *J.L. Richardson*. Phys. Lett. B. 1979. V. 82. P. 272.
- [33] *W. Buchmüller, G. Grunberg, S.-H. H. Tye*. Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 103; *W. Buchmüller, S.-H. H. Tye*. Phys. Rev. D. 1981. V. 24. P. 132.
- [34] *V.V. Kiselev, A.E. Kovalsky, A.I. Onishchenko*. Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 054009.
- [35] *В.В. Киселев, А.К. Лиходед*. УФН. 2002. Т. 172. С. 497.
- [36] *V.V. Kiselev, A.K. Likhoded, O.N. Pakhomova, V.A. Saleev*. Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 034013; Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 034030.
- [37] *D.J. Gross, F. Wilczek*. Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1343; *H.D. Politzer*. Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1346.
- [38] *D.R.T. Jones*. Nucl. Phys. B. 1974. V. 75. P. 531; *W.E. Caswell*. Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 244; *Э.Ш. Егорян, О.В. Тарасов*. ТМФ. 1979. Т. 41. С. 26.
- [39] *O.V. Tarasov, A.A. Vladimirov, A.Yu. Zharkov*. Phys. Lett. B. 1980. V. 93. P. 429; *S.A. Larin, J.A.M. Vermaseren*. Phys. Lett. B. 1993. V. 303. P. 334.

- [40] *T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, S.A. Larin.* Phys. Lett. B. 1997. V. 400. P. 379.
- [41] *K.G. Chetyrkin, B.A. Kniehl, M. Steinhauser.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 2184.
- [42] *L.D. Soloviev.* Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 035005; Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 015009.
- [43] *J.M. Cornwall.* Phys. Rev. D. 1982. V. 26. P. 1453.
- [44] *A.I. Alekseev, B.A. Arbuzov.* Mod. Phys. Lett. A. 2005. V. 20. P. 103; hep-ph/0411339.

*Рукопись поступила 25 февраля 2005 г.*

А.И. Алексеев

Аналитический инвариантный заряд в КХД с подавлением непертурбативных вкладов при больших  $Q^2$ .

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **ИТ<sub>Р</sub>Х**.

Редактор Л.Ф. Васильева.

---

Подписано к печати 03.03.2005. Формат 60 × 84/8.  
Офсетная печать. Печ.л. 2,25. Уч.-изд.л. 1,8. Тираж 130. Заказ 21.  
Индекс 3649.

---

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий  
142284, Протвино Московской обл.

