ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2005–10
ОТФ

С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили

СИЛЫ ОТТАЛКИВАНИЯ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Направлено в *ТМФ*

Протвино 2005

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Силы отталкивания в полевой теории гравитации: Препринт ИФВЭ 2005–10. – Протвино, 2005. – 17 с., библиогр.: 8.

Показано, что в полевой теории гравитации замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем приводит к силам отталкивания, которые устраняют космологическую особенность в развитии однородной и изотропной Вселенной и останавливают коллапс больших масс.

Abstract

Gershtein S.S, Logunov A.A., Mestvirishvili M.A. Repulsive Forces in the Field Theory of Gravitation: IHEP Preprint 2005–10. – Protvino, 2005. – p. 17, refs.: 8.

It is shown that the slowing down of the rate of time referencing to the inertial time leads in the field theory of gravitation to arising of repulsive forces which remove the cosmological singularity in the evolution of a homogeneous and isotropic universe and stop the collapse of large masses.

Как в теории тяготения Ньютона, так и в общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна силы гравитации — это только силы притяжения. Однако полевые представления о гравитации показывают, что в сильных гравитационных полях это не совсем так. Но об этом ниже.

В релятивистской теории гравитации [1, 2] (РТГ) гравитационное поле рассматривается как физическое поле $\phi^{\mu\nu}$ со спинами 2 и 0, развивающееся как и все другие физические поля в пространстве Минковского. Это означает, что в основе РТГ лежит специальная теория относительности, а следовательно, принцип относительности имеет всеобщее значение и выполняется для всех физических явлений, в том числе и гравитационных. Именно это обстоятельство обеспечивает наличие законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения для всех физических процессов, в том числе и гравитационных. РТГ исходит из гипотезы, что гравитация универсальна и ее источником является сохраняющийся тензор энергии-импульса всех полей материи, в том числе и гравитационного.

Такой подход находится в соответствии с идеей Эйнштейна, о которой он писал еще в 1913 г. [3]: "...*тензор гравитационного поля* $\vartheta_{\mu\nu}$ *является источником поля наравне с тензором материальных систем* $\Theta_{\mu\nu}$. *Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям*". Эта мысль Эйнштейна и была положена в основу построения релятивистской теории гравитации. При построении общей теории относительности Эйнштейну не удалось ее реализовать, поскольку вместо тензора энергии-импульса гравитационного поля в ОТО возник псевдотензор гравитационного поля. Все это произошло из-за того, что Эйнштейн не рассматривал гравитационное поле как физическое поле (типа Фарадея–Максвелла) в пространстве Минковского. Именно поэтому в уравнениях ОТО не содержится метрика пространства Минковского.

Подход к гравитации, принятый в РТГ, приводит к **геометризации**: возникает эффективное риманово пространство, **но только с простой топологией**. Это приводит к следующей картине: движение пробного тела в пространстве Минковского под действием гравитационного поля эквивалентно движению этого тела в эффективном римановом пространстве, созданном гравитационным полем. Силы гравитации являются физическими силами, а поэтому не могут обратиться в нуль выбором системы координат. Именно это позволяет в теории отделить силы инерции от сил гравитации.

В полевом подходе к гравитации возникает эффективное риманово пространство, но только с простой топологией. Именно поэтому полевые представления не могут привести к ОТО, где топология в общем случае не простая.

Описанные выше представления приводят к следующей полной системе уравнений [1, 2]:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu} + \left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\alpha\beta}\right] = 8\pi G T^{\mu\nu}\,, \tag{1}$$

$$D_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} = 0\,. \tag{2}$$

Здесь D_ν — ковариантная производная в пространстве Минковского; $\gamma_{\alpha\beta}$ — метрический тензор пространства Минковского; $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор эффективного риманова пространства; $m = m_g c/\hbar$, m_g — масса гравитона; $\tilde{g}^{\nu\mu} = \sqrt{-g}\, g^{\nu\mu}$ — плотность метрического тензора $g^{\nu\mu}$.

Эффективная метрика риманова пространства $g^{\mu\nu}$ связана с гравитационным полем $\phi^{\mu\nu}$ соотношением

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu}\,,$$

где

$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\mu\nu}, \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\,\phi^{\mu\nu}\,.$$

Система уравнений (1)–(2) общековариантна относительно произвольных преобразований координат и форминвариантна относительно преобразований Лоренца. Она непосредственно следует из принципа наименьшего действия с плотностью лагранжиана

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A)\,,$$

здесь

$$L_g = \frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma}G^\sigma_{\nu\lambda}) - \frac{m^2}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\,\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}\right),$$

$$G^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(D_\mu g_{\sigma\nu} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu})\,.$$

Для того чтобы времениподобные и изотропные интервалы в эффективном римановом пространстве не выходили за конус исходного пространства Минковского, должно выполняться условие причинности:

$$\gamma_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0\,, \quad g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \leq 0\,, \tag{3}$$

Таким образом, движение пробных тел под действием гравитационного поля всегда происходит **внутри** как риманова конуса, так и конуса пространства Минковского.

Масса покоя гравитона возникает в теории с необходимостью, поскольку только с ее введением и можно рассматривать гравитационное поле как физическое поле в пространстве Минковского, считая его источником полный сохраняющийся тензор энергии-импульса всей материи. Но именно наличие массы покоя гравитона совершенно изменяет как процесс коллапса, так и эволюцию Вселенной.

Когда А. Эйнштейн в 1912 г. связал гравитационное поле с метрическим тензором риманова пространства, оказалось, что такое поле вызывает замедление хода времени физического процесса. Это замедление, в частности, можно проиллюстрировать на примере решения Шварцшильда, сравнивая ход времени в присутствии гравитационного поля с ходом времени для удаленного наблюдателя. Однако в общем случае в ОТО присутствует только метрический тензор риманова пространства, а поэтому в уравнениях Гильберта–Эйнштейна отсутствуют какие-либо признаки инерциального времени пространства Минковского. По этой причине универсальное свойство гравитационного поля оказывать замедляющее действие на ход времени по сравнению с инерциальным временем не могло получить в ОТО дальнейшего развития.

Возникновение эффективного риманова пространства в полевой теории гравитации при сохранении пространства Минковского как основного пространства придает свойству гравитационного поля замедлять ход времени особое значение. Именно только в этом случае и можно говорить в полной мере о замедлении хода времени, осуществляя сравнение хода времени в гравитационном поле с ходом времени T в инерциальной системе координат пространства Минковского при отсутствии гравитации. Все это и реализовано в РТГ, так как в полную систему ее уравнений входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Но это общее свойство гравитационного поля — замедлять ход времени — приводит в полевой теории к важному выводу [4]: **замедление хода времени физического процесса в сильном гравитационном поле по сравнению с ходом инерциального времени T создает, благодаря массе покоя гравитона, эффективные полевые силы гравитационной природы. Эти эффективные силы в гравитации оказываются силами отталкивания**.

Чтобы показать, что изменение хода времени ведет к появлению силы, обратимся к уравнениям Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dT^2} = F\,.$$

Если в этом уравнении формально перейти от инерциального времени T ко времени τ по правилу

$$d\tau = U(T)dT, \tag{4}$$

то легко получить

$$m\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{U^2}\Big\{F - \frac{dx}{dT}\frac{d}{dT}\ln U\Big\}\,. \tag{5}$$

Отсюда видно, что изменение хода времени, определяемое функцией U, ведет к появлению эффективной силы. Но все это здесь имеет чисто формальный характер, поскольку в данном случае нет физической причины, которая изменила бы ход времени. Но именно этот формальный пример показывает, что если в природе идет процесс замедления хода времени, то он неминуемо создает эффективные полевые силы, а поэтому их необходимо обязательно учитывать в теории как нечто совершенно новое и удивительное. Физическое гравитационное поле изменяет как ход времени, так и параметры пространственных величин, по сравнению с теми же величинами в инерциальной системе пространства Минковского при отсутствии гравитации.

В настоящей статье мы подробно рассмотрим на примерах коллапса и эволюции однородной и изотропной Вселенной как проявляются эффективные полевые силы отталкивания, возникающие из-за замедления хода времени под действием гравитационного поля. Рассмотрим статическое сферически-симметричное поле

$$ds^2 = U(r)dT^2 - V(r)dr^2 - W^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,, \tag{6}$$

$$d\sigma^2 = dT^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \tag{7}$$

Здесь функция U определяет замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем T. Сильное замедление хода времени наступает тогда, когда эта функция достаточно мала по сравнению с единицей. При отсутствии массы гравитона система уравнений (1), (2) для задачи (6) имеет решение Шварцшильда

$$U = \frac{r - GM}{r + GM}, \quad V = \frac{r + GM}{r - GM}, \quad W = (r + GM)\,. \tag{8}$$

Отсюда видно, что сильное замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем T имеет место в области, когда W близко к $2GM$. При наличии массы покоя гравитона система уравнений (1) и (2) приводит [см. приложение A: $(A.61)$, $(A.62)$] в области

$$W - W_g \ll \frac{1}{2} W_g \Big(\frac{m_g c}{\hbar} \cdot \frac{W_g}{2}\Big)^2 \tag{9}$$

к следующим формулам:

$$U = \alpha \frac{W_g}{W}, \quad V = \frac{1}{2} \frac{W}{W - W_g}, \quad \frac{dr}{dW} = 1\,, \tag{10}$$

здесь

$$W_g = \frac{2GM}{c^2} \text{ — радиус Шварцшильда, } \alpha = \Big(\frac{m_g c}{\hbar} \cdot \frac{W_g}{2}\Big)^2 . \tag{11}$$

Сравнивая (8) и (10), мы видим, что масса гравитона m_g не допускает обращения величины U в нуль. **Масса покоя гравитона устанавливает для любого тела свой предел на замедление хода времени**. Этот предел определяется линейной функцией от радиуса Шварцшильда, т. е. от массы тела

$$\frac{1}{2} \Big(\frac{m_g c}{\hbar}\Big) W_g\,.$$

В ОТО такой предел отсутствует. Такое свойство гравитационного поля ведет в РТГ к кардинальным изменениям как в движении пробного тела в гравитационном поле, определяемом выражениями (10), так и в развитии однородной и изотропной Вселенной.

Движение пробного тела происходит по геодезической линии риманова пространства

$$\frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \cdot \frac{dx^\beta}{ds} = 0\,, \tag{12}$$

здесь $v^\mu = dx^\mu/ds$ — четырехвектор скорости v^μ удовлетворяет условию

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 1\,. \tag{13}$$

Рассмотрим радиальное движение

$$v^\theta = v^\phi = 0, \quad v^1 = dr/ds\,. \tag{14}$$

Принимая во внимание, что символ Кристоффеля Γ^0_{01} равен

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2U} \frac{dU}{dr}\,, \tag{15}$$

из уравнения (12) находим

$$\frac{dv^0}{ds} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dr} v^0 v^1 = 0\,. \tag{16}$$

Решая уравнение (16), получаем

$$\frac{d}{dr} \ln(v^0 U) = 0\,. \tag{17}$$

Отсюда имеем

$$v_0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{U_0}{U}\,, \tag{18}$$

U_0 — постоянная интегрирования. Если принять скорость падающего пробного тела на бесконечности равной нулю, то получим $U_0 = 1$. Из соотношения (13) находим

$$\frac{dr}{ds} = -\sqrt{\frac{1-U}{UV}}\,. \tag{19}$$

Подставляя в это выражение (10), получаем

$$\frac{dW}{ds} = -\Big(\frac{\hbar}{m_g c}\Big)\frac{2}{W_g}\sqrt{2\frac{W}{W_g}\Big(1-\frac{W_g}{W}\Big)}\,. \tag{20}$$

Отсюда видно, что возникает точка поворота. Дифференцируя (20) по s, находим

$$\frac{d^2W}{ds^2} = 4\Big(\frac{\hbar}{m_g c}\Big)^2\frac{1}{W_g^3}\,. \tag{21}$$

Мы видим, что в точке поворота ускорение положительно, т. е. имеет место отталкивание, и оно значительное. Интегрируя (20), получаем

$$W = W_g + 2\Big(\frac{\hbar}{m_g c}\Big)^2\frac{(s-s_0)^2}{W_g^3}\,. \tag{22}$$

Из выражения (22) ясно, что пробное тело не может пересечь сферу Шварцшильда.

Поскольку особенность в (10), которая возникла вне вещества, нельзя устранить выбором системы координат, это означает, что она должна отсутствовать, так как в противном случае невозможно сшить решение внутри вещества с внешним решением. Поэтому тело не может иметь радиус меньше радиуса Шварцшильда. Так возникает ограничение на величину поля.

Этот вывод об отсутствии особенности Шварцшильда находится в соответствии с заключением Эйнштейна [5]: “*Шварцшильдовская сингулярность отсутствует, так как вещество нельзя концентрировать произвольным образом; в противном случае частицы образующие скопления, достигнут скорости света*”. Хотя в нашем случае причина отсутствия сингулярности другая, но общий вывод совпадает. Таким образом, в полевой теории заложен механизм самоограничения, который исключает возможность образования “черных дыр”.

Другой пример, демонстрирующий появление новых эффективных полевых сил из-за замедления хода времени, — это развитие однородной и изотропной Вселенной. В этом случае мы имеем на основании уравнения (2) только плоскую Вселенную [см. приложение B: $(B.13)$, $(B.16)$], когда трехмерная геометрия — евклидова, т. е.

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\tau^2 - \beta^4 a^2(\tau)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2)\,,\\ d\sigma^2 &= \frac{1}{a^6}d\tau^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\phi^2\,, \end{aligned} \tag{23}$$

$$d\tau = a^3 dT. \tag{24}$$

Так как система уравнений (1) и (2) полная, то это решение — единственное. Уравнения (1) на основании (23) сводятся к следующей системе уравнений для масштабного фактора $a(\tau)$ [см. приложение B: $(B.19)$, $(B.20)$]:

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) - \frac{1}{6}(mc)^2\left(1-\frac{1}{a^6}\right)\,, \tag{25}$$

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(\tau) - \frac{1}{12}(mc)^2\left(2 - \frac{3}{a^2\beta^4} + \frac{1}{a^6}\right). \tag{26}$$

Масштабный фактор $a(\tau)$ в (24) определяет замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем T при отсутствии гравитации. Но именно этот же фактор в правой части уравнения (26) при сильном замедлении хода времени останавливает процесс сжатия Вселенной. Когда a становится достаточно малым, член в правой части уравнения (26)

$$(mc)^2/12a^6$$

становится достаточно большим, несмотря на малость m, и правая часть в (26) обращается в нуль, происходит остановка при сжатии.

Минимальное значение a равно

$$a_{\min} = \left[\left(\frac{m_g c^2}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{32\pi G\rho_{\max}}\right]^{1/6}, \tag{27}$$

тем самым в РТГ отсутствует космологическая сингулярность, которая имеет место в ОТО. **Это означает, что “Большого взрыва” не было**, а было состояние с большой плотностью $\rho_{\max}$ и высокой температурой в каждой точке Вселенной. С другой стороны, в силу уравнений (25), возникающие из-за замедления хода времени силы отталкивания обеспечивают ускоренное расширение Вселенной от точки остановки. Ускорение в радиационной фазе в точке остановки сжатия равно

$$\left.\frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\tau^2}\right|_{\tau=0} = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\max}\,. \tag{28}$$

Именно это ускорение и явилось “толчком” к расширению Вселенной. Максимальное значение масштабного фактора a равно

$$a_{\max} = \beta\,.$$

Величина β определяется интегралом движения.

Масса покоя гравитона однозначным образом ввела в уравнения (1) метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ пространства Минковского. Благодаря массе покоя гравитона стал возможным сам факт определения величины замедления хода времени физического процесса в гравитационном поле по сравнению с инерциальным временем. Именно эта величина и определила силу отталкивания. Благодаря массе гравитона замедление хода времени проявилось в виде сил отталкивания.

Таким образом, полевые представления о гравитационном поле, развивающемся в пространстве Минковского, позволили **открыть фундаментальное свойство гравитационного поля: создавать эффективные силы отталкивания, благодаря замедлению хода времени физического процесса по сравнению с инерциальным временем**.

В ОТО таких сил нет. Возникает интересная картина: гравитационное поле в РТГ, проявляя себя как силы притяжения, собирая материю, затем вступает в фазу, когда под действием этого поля происходит сильное замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем T, что, благодаря массе покоя гравитона, неминуемо ведет к эффективным полевым силам отталкивания, которые останавливают процесс сжатия под действием сил притяжения. Мы видим, что в самом гравитационном поле в полевой теории заложен механизм самоограничения. Именно он осуществляет остановку коллапса массивных тел на заключительной стадии развития и устраняет космологическую сингулярность, обеспечивая циклическое развитие Вселенной.

Масса гравитона, входящая в уравнение (1), может быть оценена из наблюдательных данных по измерению величины Ω_{tot}, которая определена как отношение полной современной плотности материи ρ_{tot} к критической плотности ρ_c

$$\Omega_{\text{tot}} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{29}$$

здесь H — постоянная Хаббла. Из уравнений (25)–(26) следует

$$\Omega_{\text{tot}} = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{m_g c^2}{\hbar H}\right)^2. \tag{30}$$

Масса гравитона m_g входит в Ω_{tot} с большим множителем, определяемым величиной $c^2/\hbar H$.

Таким образом, согласно РТГ, как следует из (30), современная плотность материи должна превышать критическую плотность. Так, еще в 1984 г. в статье [6] отмечалось: *"Данная теория дает предсказание исключительной силы — она приводит к строго определенному развитию Вселенной. Согласно ей Вселенная не замкнута, она в силу уравнений (4.29)* (имеется в виду уравнение (2) данной работы. — авторы) *является "плоской."* И далее, теория *"с необходимостью требует обязательного существования во Вселенной «скрытой массы», в какой-либо форме материи. Итак, во Вселенной должна существовать «скрытая масса», чтобы полная плотность вещества была равна критическому значению ρ_0"*. В последние годы наблюдательные данные подтвердили этот вывод. С введением массы покоя гравитона это следствие теории было усилено и привело к формуле (30). Сравнивая (30) с современными наблюдательными данными по измерению Ω_{tot}, можно найти с вероятностью 95% верхний предел для массы гравитона

$$m_g < 3{,}6 \cdot 10^{-66}\ [\text{г}]. \tag{31}$$

Авторы выражают благодарность В. И. Денисову, В. А. Петрову, Н. Е. Тюрину, Ю. В. Чугрееву за ценные обсуждения.

Список литературы

[1] *А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили.* Релятивистская теория гравитации. – М.: Наука, 1989.

[2] *А. А. Логунов.* Теория гравитационного поля. – М.: Наука, 2001;
A. A. Logunov. The Theory of Gravity. – M.: Nauka, 2001;
A. A. Logunov. The Theory of Gravity, gr-qc/0210005, 2002.

[3] *А. Эйнштейн.* Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1965. Т. I. С. 227.

[4] *С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили.* // ДАН. 2005. Т. 402, № 1.

[5] *А. Эйнштейн.* О стационарных системах, состоящих из многих гравитирующих частиц и обладающих сферической симметрией. Собрание научных трудов. – М.: Наука, 1966. Т. II. С. 514.

[6] *А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили.* // ТМФ. 1984. Т. 61, № 3. С. 327.

[7] *А. А. Власов, А. А. Логунов.* // ТМФ. 1989. Т. 78, № 3. С. 323.

[8] *С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили.* // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, вып. 5.

Рукопись поступила 5 апреля 2005 г.

Приложение А

Статическое сферически симметричное гравитационное поле в РТГ

Интервал в пространстве Минковского в сферических координатах имеет вид

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dr)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,, \tag{A.1}$$

здесь $x^0 = cT$. Интервал в эффективном римановом пространстве для сферически симметричного статического поля записывается в форме

$$ds^2 = U(r)(dx^0)^2 - V(r)dr^2 - W^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \tag{A.2}$$

Уравнения (1)–(2) РТГ представим в форме

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R + \frac{m^2}{2}\Big(\delta^\mu_\nu + g^{\mu\alpha}\gamma_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu g^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\Big) = \varkappa T^\mu_\nu\,, \tag{A.3}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0\,. \tag{A.4}$$

В развернутом виде уравнение $(A.4)$ имеет вид

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\lambda\sigma}\tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0\,. \tag{A.5}$$

Здесь R^μ_ν — тензор Риччи; R — скалярная кривизна; T^μ_ν — тензор энергии-импульса источника; $\gamma^\nu_{\lambda\sigma}$ — символы Кристоффеля пространства Минковского; D_μ — ковариантная производная в пространстве Минковского; G — гравитационная постоянная; $m = m_g c/\hbar$, m_g — масса гравитона; $\varkappa = 8\pi G/c^2$, $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}$ — плотность тензора $g^{\mu\nu}$.

Для сферически симметричного статического источника компоненты тензора T^μ_ν имеют вид

$$T^0_0 = \rho(r), \quad T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -\frac{p(r)}{c^2}\,, \tag{A.6}$$

здесь ρ — плотность массы; p — изотропное давление.

Для определения метрических коэффициентов U, V и W можно воспользоваться уравнениями $(A.3)$ для значений индексов $\mu = 0,\ \nu = 0$; $\mu = 1, \nu = 1$.

$$\begin{gathered}\frac{1}{W^2} - \frac{1}{VW^2}\Big(\frac{dW}{dr}\Big)^2 - \frac{2}{VW}\frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{V}\Big) + \\ + \frac{1}{2}m^2\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\Big) - \frac{r^2}{W^2}\Big] = \varkappa\rho\,,\end{gathered} \tag{A.7}$$

$$\frac{1}{W^2}-\frac{1}{VW^2}\Big(\frac{dW}{dr}\Big)^2-\frac{1}{UVW}\frac{dW}{dr}\frac{dU}{dr}+
+\frac{1}{2}m^2\Big[1-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\Big)-\frac{r^2}{W^2}\Big]=-\varkappa\frac{p}{c^2}\,. \tag{A.8}$$

Уравнение $(A.5)$ принимает вид

$$\frac{d}{dr}\Big(\sqrt{U/V}\,W^2\Big)=2r\sqrt{UV}\,. \tag{A.9}$$

Учитывая тождество

$$\frac{dr}{dW}\frac{1}{W^2}\frac{d}{dr}\Big[\frac{W}{V}\Big(\frac{dW}{dr}\Big)^2\Big]=\frac{1}{VW^2}\Big(\frac{dW}{dr}\Big)^2+\frac{2}{VW}\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{1}{W}\frac{dW}{dr}\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{V}\Big)\,,$$

и переходя от производных по r к производным по W, уравнения $(A.7)$, $(A.8)$ и $(A.9)$ принимают вид

$$1-\frac{d}{dW}\Big[\frac{W}{V(dr/dW)^2}\Big]+\frac{1}{2}m^2\Big[W^2-r^2+\frac{W^2}{2}\Big(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\Big)\Big]=\varkappa W^2\rho\,, \tag{A.10}$$

$$1-\frac{W}{V(dr/dW)^2}\frac{d}{dW}[\ln(UW)]+\frac{1}{2}m^2\Big[W^2-r^2-\frac{W^2}{2}\Big(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\Big)\Big]=-\varkappa W^2\frac{p}{c^2}\,, \tag{A.11}$$

$$\frac{d}{dW}\big[\sqrt{U/V}\,W^2\big]=2r\sqrt{UV}\,\frac{dr}{dW}\,. \tag{A.12}$$

Вычитая уравнение $(A.11)$ из уравнения $(A.10)$ и вводя новую переменную

$$Z=\frac{UW^2}{V\dot r^2},\quad \dot r=\frac{dr}{dt},\quad t=\frac{W-W_0}{W_0}\,, \tag{A.13}$$

получаем

$$\frac{dZ}{dW}-\frac{2Z}{U}\frac{dU}{dW}-2\frac{Z}{W}-\frac{m^2W^3}{2W_0^2}\Big(1-\frac{U}{V}\Big)=-\varkappa\frac{W^3}{W_0^2}\Big(\rho+\frac{p}{c^2}\Big)U\,. \tag{A.14}$$

Складывая уравнения $(A.10)$ и $(A.11)$, находим

$$1-\frac{1}{2}\frac{W_0^2}{W}\frac{1}{U}\frac{dZ}{dW}+\frac{m^2}{2}(W^2-r^2)=\frac{1}{2}\varkappa W^2\Big(\rho-\frac{p}{c^2}\Big)\,. \tag{A.15}$$

Рассмотрим уравнения $(A.14)$ и $(A.15)$ вне вещества в области, определяемой неравенствами

$$\frac{U}{V}\ll 1,\quad \frac{1}{2}m^2(W^2-r^2)\ll 1\,. \tag{A.16}$$

В этой области уравнение $(A.15)$ имеет вид

$$U=\frac{1}{2}\frac{W_0^2}{W}\frac{dZ}{dW}=\frac{1}{2}\frac{W_0}{W}\frac{dZ}{dt}\,. \tag{A.17}$$

Принимая во внимание $(A.17)$, приведем уравнение $(A.14)$ к виду

$$Z\frac{d^2Z}{dW^2}-\frac{1}{2}\Big(\frac{dZ}{dW}\Big)^2+\frac{1}{4}m^2\frac{W^3}{W_0^2}\frac{dZ}{dW}=0\,. \tag{A.18}$$

Введем согласно $(A.13)$ переменную t, после чего уравнение $(A.18)$ принимает форму

$$Z\ddot{Z} - \frac{1}{2}(\dot{Z})^2 + \alpha(1+t)^3\dot{Z} = 0\,, \qquad (A.19)$$

здесь $\alpha = m^2W_0^2/4$, $\dot{Z} = dZ/dt$. Для значений t, определяемых неравенством

$$0 \le t \ll 1/3\,, \qquad (A.20)$$

уравнение $(A.19)$ упрощается:

$$Z\ddot{Z} - \frac{1}{2}(\dot{Z})^2 + \alpha\dot{Z} = 0\,. \qquad (A.21)$$

Оно имеет решение

$$\lambda\sqrt{Z} = 2\alpha\ln\Bigl(1 + \frac{\lambda\sqrt{Z}}{2\alpha}\Bigr) + \frac{\lambda^2}{2}t\,, \qquad (A.22)$$

здесь λ — произвольная постоянная.

На основании $(A.13)$ и $(A.17)$ имеем

$$U = \frac{1}{2}\frac{W_0}{W}\dot{Z}, \quad V\dot{r}^2 = \frac{1}{2}W_0W\frac{\dot{Z}}{Z}\,. \qquad (A.23)$$

Используя $(A.22)$, находим

$$\dot{Z} = 2\alpha + \sqrt{Z}\,. \qquad (A.24)$$

Подставляя $(A.24)$ в $(A.23)$, получаем

$$U = \frac{W_0}{W}\Bigl(\alpha + \frac{\lambda}{2}\sqrt{Z}\Bigr), \quad V\dot{r}^2 = W_0W\,\frac{\alpha + \lambda\sqrt{Z}/2}{Z}\,. \qquad (A.25)$$

При $\alpha = 0$ на основании $(A.22)$ имеем

$$\sqrt{Z} = \frac{\lambda}{2}t\,. \qquad (A.26)$$

Подставляя это выражение в $(A.25)$, находим

$$U = \Bigl(\frac{\lambda}{2}\Bigr)^2\frac{W - W_0}{W}\,. \qquad (A.27)$$

Но это выражение для U должно точно совпадать с решением Шварцшильда

$$U = \frac{W - W_g}{W}, \quad W_g = \frac{2GM}{c^2}\,. \qquad (A.28)$$

Сравнивая $(A.27)$ и $(A.28)$, получаем

$$\lambda = 2, \quad W_0 = W_g\,. \qquad (A.29)$$

Таким образом находим:

$$U = \frac{W_g}{W}(\alpha + \sqrt{Z}), \quad V\dot{r}^2 = W_gW\frac{\alpha + \sqrt{Z}}{Z}\,. \qquad (A.30)$$

Нам необходимо теперь определить зависимость r от W с помощью $(A.12)$.

Подставляя $(A.30)$ в уравнение $(A.12)$ и переходя к переменной

$$\ell = r/W_g\,, \tag{A.31}$$

получаем

$$\frac{d}{d\sqrt{Z}}\Big[(1+t)\frac{dZ}{dt}\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}}\Big] = 4\ell\,. \tag{A.32}$$

Учитывая $(A.24)$ и совершая дифференцирование по $\sqrt{Z}$ в $(A.32)$, находим

$$(1+t)(\alpha+\sqrt{Z})\frac{d^2\ell}{(d\sqrt{Z})^2} + (1+t+\sqrt{Z})\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} - 2\ell = 0\,. \tag{A.33}$$

Так как нас интересует область значений t, определяемая неравенством $(A.20)$, то уравнение $(A.33)$ в этой области упрощается и имеет вид

$$(\alpha+\sqrt{Z})\frac{d^2\ell}{(d\sqrt{Z})^2} + (1+\sqrt{Z})\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} - 2\ell = 0\,. \tag{A.34}$$

Общее решение уравнения $(A.34)$ будет

$$\ell = A\ell_1 + B\ell_2\,, \tag{A.35}$$

где

$$\ell_1 = F[-2,\,1-\alpha,\,-(\alpha+\sqrt{Z})],\ \ell_2 = (\alpha+\sqrt{Z})^{\alpha}F[-2+\alpha,\,1+\alpha,\,-(\alpha+\sqrt{Z})]\,.$$

Здесь A и B — произвольные постоянные; F — вырожденная гипергеометрическая функция.

Учитывая равенства

$$F[-2,\,1-\alpha,\,-(\alpha+\sqrt{Z})] = 1 + \frac{2(\alpha+\sqrt{Z})}{1-\alpha} + \frac{(\alpha+\sqrt{Z})^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\,,$$

$$F[-2+\alpha,\,1+\alpha,\,-(\alpha+\sqrt{Z})] = e^{-(\alpha+\sqrt{Z})}F(3,\,1+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})\,,$$

имеем

$$\ell = A\Big[1 + \frac{2(\alpha+\sqrt{Z})}{1-\alpha} + \frac{(\alpha+\sqrt{Z})^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\Big] - B\beta(Z)e^{-\alpha}F(3,\,1+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})\,. \tag{A.36}$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{gathered}\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} = A\frac{2(2+\sqrt{Z})}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \\ +B\Big[-\frac{\sqrt{Z}\,F(3,\,1+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})}{\alpha+\sqrt{Z}} + \frac{dF(3,\,1+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})}{d(\alpha+\sqrt{Z})}\Big]\beta(Z)e^{-\alpha}\,,\end{gathered} \tag{A.37}$$

здесь

$$\beta(Z) = (\alpha+\sqrt{Z})^{\alpha}e^{-\sqrt{Z}}\,.$$

Но так как
$$\frac{dF(3,\,1+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})}{d(\alpha+\sqrt{Z})}=\frac{3}{1+\alpha}F(4,\,2+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})\,,$$
имеем
$$\begin{gathered}\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}}=A\frac{2(2+\sqrt{Z})}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+\\ +B\beta(Z)\Big[-\frac{\sqrt{Z}\,F(3,\,1+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})}{\alpha+\sqrt{Z}}+\frac{3F(4,\,2+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})}{(1+\alpha)}\Big]e^{-\alpha}\,,\end{gathered}\tag{A.38}$$
Поскольку
$$\frac{dr}{dW}=\frac{d\ell}{dt}=\frac{\alpha+\sqrt{Z}}{\sqrt{Z}}\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}}\,,\tag{A.39}$$
то нам необходимо выбрать A и B таким образом, чтобы погасить особенность для функции $(A.39)$ в точке $\sqrt{Z}=0$, поэтому положим
$$\Big(\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}}\Big)_{\sqrt{Z}=0}=0\,.\tag{A.40}$$
Это условие приводит к соотношению между постоянными
$$B=-A\frac{4}{3}\frac{(1+\alpha)e^{\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)\alpha^{\alpha}F(4,\,2+\alpha,\,\alpha)}\,.\tag{A.41}$$
Подставляя это выражение в $(A.36)$ и $(A.37)$, находим
$$\begin{gathered}\ell=A\Big[1+\frac{2(\alpha+\sqrt{Z})}{1-\alpha}+\frac{(\alpha+\sqrt{Z})^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}-\\ -\frac{4}{3}\frac{(1+\alpha)F(3,\,1+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})}{(1-\alpha)(2-\alpha)\alpha^{\alpha}F(4,\,2+\alpha,\,\alpha)}\beta(Z)\Big]\,,\end{gathered}\tag{A.42}$$
$$\begin{gathered}\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}}=A\frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\Big[2+\sqrt{Z}+\\ +\frac{2\sqrt{Z}(1+\alpha)F(3,\,1+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})}{3\alpha^{\alpha}(\alpha+\sqrt{Z})F(4,\,2+\alpha,\,\alpha)}\beta(Z)-\frac{2F(4,\,2+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})}{\alpha^{\alpha}F(4,\,2+\alpha,\,\alpha)}\beta(Z)\Big]\,.\end{gathered}\tag{A.43}$$
Можно показать, что производная $(A.43)$ положительна. Из выражений $(A.42)$ и $(A.43)$ путем разложения в ряд Тейлора функций $F(3,\,1+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})$, $F(4,\,2+\alpha,\,\alpha+\sqrt{Z})$ в окрестности $\sqrt{Z}=0$, а также учитывая, что
$$\alpha\ll 1,$$
получаем
$$\ell=A\Big[1+\frac{1}{2}(\sqrt{Z}+\alpha)(4+\sqrt{Z}-\alpha)-\frac{2}{3}\beta(Z)(1+3\sqrt{Z}+3Z)+O(Z^{3/2})\Big]\,,\tag{A.44}$$
$$\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}}\simeq A\Big[2\Big(1-\beta(Z)\Big)+\sqrt{Z}\Big(1-4\beta+\frac{2}{3}\frac{\beta(Z)}{\alpha+\sqrt{Z}}+\frac{2\sqrt{Z}}{\alpha+\sqrt{Z}}\beta(Z)\Big)+O(Z)\Big]\,.\tag{A.45}$$

Рассмотрим следующие предельные случаи.

I.

$$\sqrt{Z} \gg \alpha \,. \tag{$A.46$}$$

В этом случае из выражения $(A.22)$ с учетом $(A.29)$ имеем

$$\sqrt{Z} = t \,. \tag{$A.47$}$$

Подставляя это выражение в $(A.25)$ и учитывая $(A.29)$, получаем

$$U = \frac{W - W_g}{W}, \quad V\dot{r}^2 = \frac{WW_g^2}{W - W_g} \,. \tag{$A.48$}$$

В приближении $(A.46)$ выражения $(A.44)$ и $(A.45)$ принимают вид

$$\ell = A\Big[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{Z} - \frac{2}{3}\alpha \ln \sqrt{Z} - \frac{4}{3}\alpha\sqrt{Z}\ln\sqrt{Z} + \frac{1}{6}Z + O(Z^{3/2})\Big] \,, \tag{$A.49$}$$

$$\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} \simeq A\Big[\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{Z}}{3} - \frac{4\alpha}{3}\ln\sqrt{Z} - \frac{2}{3}\,\frac{\alpha}{\sqrt{Z}} + O(\alpha)\Big] \,. \tag{$A.50$}$$

Согласно $(A.13)$, $(A.31)$ и $(A.47)$ имеем

$$\dot{r} = W_g\,\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} \,. \tag{$A.51$}$$

Но, поскольку в $(A.48)$ выражение для V должно быть очень близким к решению Шварцшильда, находим

$$A = 3/2 \,. \tag{$A.52$}$$

Итак, для данного случая имеем решение Шварцшильда

$$U = \frac{W - W_g}{W}, \quad V = \frac{W}{W - W_g} \,. \tag{$A.53$}$$

Перейдем теперь к другому предельному случаю, где влияние массы гравитона существенно.

II.

$$\sqrt{Z} \ll \alpha \,. \tag{$A.54$}$$

В этом приближении из выражения $(A.22)$ с учетом $(A.29)$ находим

$$Z = 2\alpha t \,. \tag{$A.55$}$$

Подставляя это выражение в $(A.25)$ и учитывая $(A.29)$, получаем

$$U = \alpha\frac{W_g}{W}, \quad V\dot{r}^2 = \frac{1}{2}\frac{WW_g^2}{W - W_g} \,. \tag{$A.56$}$$

Согласно $(A.54)$ и $(A.55)$ выражения $(A.56)$ применимы в области

$$t \ll \frac{\alpha}{2} \quad \text{или} \quad W - W_g \ll \frac{1}{2} W_g \Big(\frac{m_g c}{\hbar}\,\frac{W_g}{2}\Big)^2 . \tag{A.57}$$

Для данного предельного случая из $(A.44)$ и $(A.45)$ имеем

$$\ell \simeq A\Big[\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{3}\Big(\frac{\sqrt{Z}}{\alpha}\Big)^2 + O(Z^{3/2})\Big] , \tag{A.58}$$

$$\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} \simeq \frac{2}{3} A \frac{\sqrt{Z}}{\alpha}\big(1 + O(\sqrt{Z})\big) . \tag{A.59}$$

Подставляя $(A.59)$ в $(A.39)$ и учитывая $(A.52)$, находим

$$\dot{r} = W_g \quad \text{или} \quad dr/dW = 1 . \tag{A.60}$$

Итак, для рассмотренного предельного случая $(A.54)$, принимая во внимание $(A.60)$, выражения $(A.56)$ принимают вид [7]:

$$U = \alpha \frac{W_g}{W}, \quad V = \frac{1}{2}\frac{W}{W - W_g}, \quad \frac{dr}{dW} = 1 , \tag{A.61}$$

они применимы в области $(A.57)$:

$$W - W_g \ll \frac{1}{2} W_g \Big(\frac{m_g c}{\hbar}\,\frac{W_g}{2}\Big)^2 . \tag{A.62}$$

Выражения $(A.61)$ существенно отличаются от решения Шварцшильда прежде всего тем, что функция U, определяющая замедление хода времени, благодаря массе покоя гравитона не обращается в нуль, тогда как в ОТО [см. формулы (28)] она обращается в нуль на сфере Шварцшильда. Если в ОТО особенность Шварцшильда устраняется выбором системы координат, то в РТГ функции $(A.61)$ приводят к сингулярности, которая не может быть устранена преобразованиями координат. Именно поэтому эта особенность недопустима вне вещества, поскольку в противном случае невозможно сшить внутреннее решение с внешним решением. Именно это и приводит к самоограничению величины гравитационного поля.

В заключение этого дополнения отметим, что при нахождении решений $(A.53)$ и $(A.61)$ мы требовали выполнения неравенств $(A.16)$ и $(A.20)$. Легко убедиться, что полученные решения $(A.53)$ и $(A.61)$ удовлетворяют неравенствам $(A.16)$, если переменная t ограничена соответственно неравенствами

$$1/3 \gg t \gg \alpha ; \quad t \ll \alpha .$$

Приложение B

Уравнения эволюции масштабного фактора

В однородной и изотропной Вселенной интервал в эффективном римановом пространстве может быть представлен в метрике Фридмана–Робертсона–Уолкера:

$$ds^2 = U(T)dT^2 - V(T)\Big[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\Big] , \tag{B.1}$$

интервал в пространстве Минковского имеет вид

$$d\sigma^2 = dT^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \tag{$B.2$}$$

Уравнения (1)–(2) РТГ запишем в форме

$$\frac{m^2}{2}\gamma_{\mu\nu} = 8\pi G\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\Big) - R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}g_{\mu\nu}\,, \tag{$B.3$}$$

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\lambda\sigma}\tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0\,. \tag{$B.4$}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
\gamma^0_{\lambda\sigma} = 0,\ \gamma^1_{22} = -r,\ \gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta,\\
\tilde{g}^{00} = V^{3/2}U^{-1/2}(1-kr^2)^{-1/2}r^2\sin\theta,\\
\tilde{g}^{11} = -V^{1/2}U^{1/2}(1-kr^2)^{1/2}r^2\sin\theta,\\
\tilde{g}^{22} = -V^{1/2}U^{1/2}(1-kr^2)^{-1/2}\sin\theta,\\
\tilde{g}^{33} = -V^{1/2}U^{1/2}(1-kr^2)^{-1/2}(\sin\theta)^{-1},
\end{aligned} \tag{$B.5$}$$

уравнения для $(B.4)$ $\nu = 0$ и $\nu = 1$ принимают вид

$$\frac{d}{dT}\Big(\frac{V}{U^{1/3}}\Big) = 0\,, \tag{$B.6$}$$

$$-\frac{d}{dr}\Big[(1-kr^2)^{1/2}r^2\Big] + 2(1-kr^2)^{-1/2}r = 0\,. \tag{$B.7$}$$

Для компонент $\nu = 2$ и $\nu = 3$ уравнения $(B.4)$ выполняются тождественно. Из уравнений $(B.6)$ и $(B.7)$ следует

$$V/U^{1/3} = \text{const} = \beta^4 \neq 0, \quad k = 0\,. \tag{$B.8$}$$

Таким образом, РТГ **однозначно приводит к плоской пространственной (евклидовой) геометрии** Вселенной.

Полагая

$$a^2 = U^{1/3}, \tag{$B.9$}$$

получаем

$$ds^2 = \beta^6\Big[d\tau_g^2 - \Big(\frac{a}{\beta}\Big)^2(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2)\Big]\,. \tag{$B.10$}$$

Здесь величина

$$d\tau_g = \Big(\frac{a}{\beta}\Big)^3 dT \tag{$B.11$}$$

определяет темп замедления хода времени в присутствии гравитационного поля по сравнению с инерциальным временем T. Общий постоянный численный множитель β^6 в интервале ds^2 одинаково увеличивает как время, так и пространственные переменные. Он не отражает динамику развития Вселенной, но определяет время Вселенной и ее пространственный масштаб. Время Вселенной определяется величиной $d\tau$ как времениподобной частью интервала ds^2

$$d\tau = \beta^3 d\tau_g = a^3 dT, \tag{$B.12$}$$

$$ds^2 = d\tau^2 - \beta^4 a^2(\tau)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \tag{B.13}$$

Тензор энергии-импульса вещества в эффективном римановом пространстве имеет вид

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu} p\,, \tag{B.14}$$

где ρ и p соответственно — плотность и давление вещества в системе его покоя, а U_μ — его скорость. Поскольку для интервала $(B.13)$ g_{0i} и R_{0i} равны нулю из уравнения $(B.3)$ следует, что

$$T_{0i} = 0 \ \text{ и } \ U_i = 0\,. \tag{B.15}$$

Это означает, что в инерциальной системе, определяемой интервалом $(B.2)$, вещество при эволюции Вселенной находится в состоянии покоя. Неподвижность вещества в однородной и изотропной Вселенной (отвлекаясь от пекулярных скоростей галактик) в некотором смысле отвечает ранним (дофридмановским) представлениям А. Эйнштейна о Вселенной.

Так называемое “расширение Вселенной”, наблюдаемое по красному смещению, вызвано не движением вещества, а изменением со временем гравитационного поля. Это замечание следует иметь в виду, когда употребляется принятый термин “расширение Вселенной”.

При описании интервала $(B.13)$ в собственном времени τ интервал исходного пространства Минковского $(B.2)$ примет вид

$$d\sigma^2 = \frac{1}{a^6} d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \tag{B.16}$$

На основании $(B.13)$ и $(B.16)$, учитывая, что

$$R_{00} = -3\frac{\ddot a}{a}, \quad R_{11} = \beta^4(a\ddot a + 2\dot a^2)\,, \tag{B.17}$$

$$T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T = \frac{1}{2}(\rho + 3p), \quad T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T = \frac{1}{2}\beta^4 a^2(\rho - p)\,, \tag{B.18}$$

из уравнений $(B.3)$ находим

$$\frac{1}{a}\frac{d^2 a}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3}\Big(\rho + \frac{3p}{c^2}\Big) - \frac{1}{6}(mc)^2\Big(1 - \frac{1}{a^6}\Big)\,, \tag{B.19}$$

$$\Big(\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau}\Big)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(\tau) - \frac{1}{12}(mc)^2\Big(2 - \frac{3}{a^2\beta^4} + \frac{1}{a^6}\Big). \tag{B.20}$$

Дифференцируя $(B.20)$ по τ и используя $(B.19)$, получаем

$$-\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{3\Big(\rho + \frac{p}{c^2}\Big)}\frac{d\rho}{d\tau}\,. \tag{B.21}$$

Это уравнение можно получить и непосредственно из ковариантного закона сохранения:

$$\nabla_\mu(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}) = \partial_\mu(\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}(\sqrt{-g}\,T^{\alpha\beta}) = 0\,, \tag{B.22}$$

где $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля эффективного риманова пространства.

Запишем уравнение $(B.21)$ в форме

$$-\frac{3p}{c^2} = a\frac{d\rho}{da} + 3\rho\,. \tag{B.23}$$

Учитывая $(B.23)$ мы можем записать $(B.19)$ в следующем виде:

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{d\tau^2} = \frac{4\pi G}{3}\Big(a\frac{d\rho}{da} + 2\rho\Big) - \frac{1}{6}(mc)^2\Big(1 - \frac{1}{a^6}\Big)\,. \tag{B.24}$$

Это уравнение можно записать в форме

$$\frac{d^2a}{d\tau^2} = -\frac{dV}{da}\,, \tag{B.25}$$

где

$$V = -\frac{4\pi G}{3}a^2\rho + \frac{(mc)^2}{12}\Big(a^2 + \frac{1}{2a^4}\Big)\,. \tag{B.26}$$

Умножив обе части уравнения $(B.25)$ на $da/d\tau$, получим

$$\frac{d}{d\tau}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{da}{d\tau}\Big)^2 + V\Big] = 0\,, \tag{B.27}$$

или

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{da}{d\tau}\Big)^2 + V = E = \text{const.} \tag{B.28}$$

Сравнивая $(B.20)$ и $(B.28)$, находим

$$\beta^4 = (mc)^2/8E\,. \tag{B.29}$$

Таким образом, постоянная β^4 определяется интегралом движения E. Выражение $(B.28)$ напоминает энергию единичной массы. Если бы величина a имела размерность длины, то первый член в $(B.28)$ соответствовал бы кинетической энергии, а второй — потенциальной. Из условия причинности (3) следует, что $a_{\max} = \beta$, интеграл движения E отличен от нуля, но является очень малой величиной [8].

С.С. Герштейн, А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили.
Силы отталкивания в полевой теории гравитации.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В. Ежела.

Подписано к печати 05.04.2004. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 2.25. Уч.-изд.л. 1,8. Тираж 160. Заказ 41.
Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2005–10, И Ф В Э, 2005