



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2005–22
ОТФ

А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили

**ВНЕШНЕЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ
НЕСТАТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА
В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ**

Направлено в *ТМФ*

Протвино 2005

Аннотация

Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного тела в инерциальной системе координат: Препринт ИФВЭ 2005–22. – Протвино, 2005. – 8 с., библиогр.: 3.

Показано, что в полевой теории гравитации внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного источника, описываемое диагональным метрическим тензором, может быть только статическим.

Abstract

Logunov A.A., Mestvirishvili M.A. External Gravitational Field of Non-Static Spherically Symmetric Body in Inertial Coordinate Frame: IHEP Preprint 2005–22. – Protvino, 2005. – p. 8, refs.: 3.

It is shown that in the field theory of gravitation the external gravitational field of a non-static spherically symmetric source described by a diagonal metric tensor should be static only.

В общей теории относительности (ОТО), которая связывает гравитационное поле с метрическим тензором риманова пространства, доказана в классе допустимых функций теорема Биркхоффа, согласно которой внешнее поле нестатического сферически-симметричного тела — только статическое. В релятивистской теории гравитации (РТГ) [1, 2] гравитационное поле $\phi^{\mu\nu}$ является физическим полем, развивающимся в пространстве Минковского, а его источником является сохраняющийся в пространстве Минковского тензор энергии-импульса всех полей материи, включая и гравитационное поле

Такой подход приводит к эффективной метрике риманова пространства и к другой системе уравнений, которая отличается от системы уравнений ОТО, а поэтому при изучении данного вопроса необходимо специальное рассмотрение.

Полная система уравнений РТГ имеет вид

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu} + \left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\alpha\beta}\right] = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (1)$$

$$D_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} = \partial_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} + \gamma_{\alpha\beta}^\mu \tilde{g}^{\alpha\beta} = 0. \quad (2)$$

Здесь тензор энергии-импульса вещества согласно Гильберту определен равенством

$$\sqrt{-g}T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (3)$$

m — масса гравитона; L_M — плотность лагранжиана вещества.

Эффективная метрика риманова пространства определена следующим образом:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \quad (4)$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu}, \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu}.$$

Система уравнений (1), (2) общековариантна относительно произвольных преобразований координат и форминвариантна относительно преобразований Лоренца. Это означает, что **принцип относительности имеет всеобщее значение**. В РТГ, в противоположность ОТО, он точно выполняется для всех физических явлений, в том числе и для гравитационных. Именно поэтому в

теории имеют место фундаментальные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения системы. Система координат в уравнениях (1)–(2) задается метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Мы выбрали систему единиц

$$\hbar = c = G = 1. \quad (5)$$

Для того чтобы времениподобные и изотропные интервалы в эффективном римановом пространстве не выходили за конус причинности пространства Минковского, должны выполняться условия

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \leq 0, \quad \gamma_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0. \quad (6)$$

Эффективное риманово пространство в теории имеет простую топологию. В ОТО в общем случае топология не простая. Именно поэтому полевые представления о гравитации, в принципе, не могут привести к уравнениям ОТО.

В настоящей статье мы установим, что внешнее гравитационное поле вида

$$ds^2 = U(t, r)dt^2 - V(t, r)dr^2 - W^2(t, r)[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2], \quad (7)$$

создаваемое **нестатическим** сферически-симметричным источником, в инерциальной системе координат может быть только **статическим**, т. е. метрические коэффициенты U , V , W не зависят от времени t . Ниже мы это установим.

Инерциальная система координат в пространстве Минковского задается интервалом

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2]. \quad (8)$$

На основании уравнений (1) для задачи, определяемой (7) и (8), находим уравнения для функций U , V и W :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{W^2} - \frac{1}{2V} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) - \frac{3}{4VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2VW^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) + \\ + \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial \ln(VW)}{\partial t} + \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = 0, \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{W^2} + \frac{1}{2U} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) + \frac{3}{4UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2UW^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) - \\ - \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial \ln(UW)}{\partial r} + \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = 0, \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\frac{1}{W^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t \partial r} - \frac{1}{2W^4} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} - \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial r} - \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Уравнения (2) для выражений (7) и (8) принимают вид

$$W^2 = \sqrt{U/V} q(r), \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(W^2 \sqrt{U/V} \right) = 2r \sqrt{UV}, \quad (13)$$

здесь $q(r)$ — произвольная функция.

Для дальнейшего удобно пользоваться представлением

$$U(t, r) = e^{\mu(t,r)}, \quad V(t, r) = e^{\nu(t,r)}, \quad W^2(t, r) = e^{\lambda(t,r)}, \quad q(r) = e^{\sigma(r)}. \quad (14)$$

В переменных $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ уравнения (9)–(11) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} e^{-\lambda} - e^{-\nu} \left(\lambda'' + \frac{3}{4}(\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'\nu' \right) + \frac{1}{2}e^{-\mu}\dot{\lambda} \left(\dot{\nu} + \frac{1}{2}\dot{\lambda} \right) + \\ + \frac{m^2}{2} \left[1 - r^2 e^{-\lambda} + \frac{1}{2}(e^{-\mu} - e^{-\nu}) \right] = 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} e^{-\lambda} + e^{-\mu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{3}{4}(\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\mu} \right) - \frac{1}{2}e^{-\nu}\lambda' \left(\mu' + \frac{1}{2}\lambda' \right) + \\ + \frac{m^2}{2} \left[1 - r^2 e^{-\lambda} - \frac{1}{2}(e^{-\mu} - e^{-\nu}) \right] = 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$\dot{\lambda}' + \frac{1}{2}\dot{\lambda}\lambda' - \frac{1}{2}\dot{\nu}\lambda' - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\mu' = 0, \quad (17)$$

здесь, например, $\dot{\lambda} = \partial\lambda/\partial t$, $\lambda' = \partial\lambda/\partial r$.

Уравнения (12) и (13) принимают форму

$$\lambda - (1/2)(\mu - \nu) = \sigma(r), \quad (18)$$

$$\mu' - \nu' + \sigma' = 2re^{\nu-\lambda}. \quad (19)$$

Введем обозначения:

$$2\omega = \mu + \nu, \quad (20)$$

$$f = \lambda - \sigma(r). \quad (21)$$

Согласно (18) имеем

$$\mu - \nu = 2f. \quad (22)$$

Из (20) и (22) находим

$$\mu = \omega + f, \quad (23)$$

$$\nu = \omega - f. \quad (24)$$

Уравнения (19) выразим через функции ω, f и σ

$$2f' + \sigma' = 2re^{\omega-2f-\sigma}. \quad (25)$$

Дифференцируя (25) по t , находим

$$2\dot{f}' = (2f' + \sigma')(\dot{\omega} - 2\dot{f}). \quad (26)$$

Подставляя (26) в уравнение (17) и учитывая равенства (21), (23) и (24), получаем неоднородное линейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}f' - \frac{\partial\omega}{\partial r}\dot{f} = 3\dot{f}f'. \quad (27)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, **соответствующая** уравнению (27), имеет вид

$$\frac{dt}{f'} = \frac{dr}{-f} = \frac{d\omega}{3f'f'}. \quad (28)$$

Отсюда находим

$$d\omega = 3f'dt, \quad d\omega = -3f'dr.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$d\omega = \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial t} dt - \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial r} dr. \quad (29)$$

Из условия полного дифференциала находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} = 0,$$

но последнее означает, что функция f представима в форме

$$f(t, r) = \psi(t) + \varphi(r). \quad (30)$$

Общее решение уравнения (27) имеет вид

$$\omega(t, r) = \frac{3}{2} (\psi(t) - \varphi(r)) + F(f), \quad (31)$$

где F — произвольная функция.

Учитывая уравнения (30) и (31), уравнение (25) принимает форму

$$2\varphi' + \sigma' = 2r \exp \left[-\frac{1}{2} \psi(t) - \frac{7}{2} \varphi(r) + F(f) \right]. \quad (32)$$

Левая часть уравнения (32) не зависит от t , а поэтому правая часть также должна не зависеть от t . Это возможно, если $\psi(t)$ постоянна, но отсюда следует, что функции μ , ν , λ не зависят от времени.

В этом случае гравитационное поле вида (7) — статическое. Но возможен и **другой случай**, когда функция F равна $(1/2)f$, тогда

$$\omega(t, r) = 2\psi(t) - \varphi(r), \quad (33)$$

а функции μ , ν , λ согласно (23), (24) и (21) будут равны

$$\mu = 3\psi(t), \quad (34)$$

$$\nu(t, r) = \psi(t) - 2\varphi(r), \quad (35)$$

$$\lambda(t, r) = \psi(t) + \varphi(r) + \sigma(r) = f + \sigma. \quad (36)$$

Для анализа данного случая нам необходимо обратиться к уравнениям (15) и (16). Разность этих уравнений равна

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-\nu} \left[-\lambda'' - \frac{1}{2} (\lambda')^2 + \frac{1}{2} \lambda' (\mu' + \nu') \right] + \\ + e^{-\mu} \left[-\ddot{\lambda} - \frac{1}{2} (\dot{\lambda})^2 + \frac{1}{2} \dot{\lambda} (\dot{\mu} + \dot{\nu}) \right] + \frac{m^2}{2} (e^{-\mu} - e^{-\nu}) \end{array} \right. = 0, \quad (37)$$

а их сумма будет

$$\begin{cases} 2e^{-\lambda} - e^{-\nu} \left[\lambda'' + (\lambda')^2 - \frac{1}{2} \lambda' (\mu' - \nu') \right] + \\ + e^{-\mu} \left[\ddot{\lambda} + (\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2} \dot{\lambda} (\dot{\mu} - \dot{\nu}) \right] + m^2 (1 - r^2 e^{-\lambda}) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Согласно (18) имеем

$$(\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2} \dot{\lambda} (\dot{\mu} - \dot{\nu}) = 0, \quad (39)$$

поэтому уравнение (38) несколько упрощается:

$$2e^{-\lambda} - e^{-\nu} \left[\lambda'' + (\lambda')^2 - \frac{1}{2} \lambda' (\mu' - \nu') \right] + e^{-\mu} \ddot{\lambda} + m^2 (1 - r^2 e^{-\lambda}) = 0. \quad (40)$$

Выразим уравнения (37) и (40) через функции ω , f , σ :

$$-f'' - \sigma'' - \frac{1}{2} (f' + \sigma')^2 + (f' + \sigma') \omega' - \frac{m^2}{2} + e^{-2f} \left(-\ddot{f} - \frac{1}{2} (\dot{f})^2 + \dot{f} \dot{\omega} + \frac{m^2}{2} \right) = 0, \quad (41)$$

$$2 \left(1 - \frac{m^2 r^2}{2} \right) e^{-(\lambda-\nu)} - \left[f'' + \sigma'' + (f' + \sigma')^2 - f'(f' + \sigma') \right] + e^{-2f} (\ddot{f} + m^2 e^\mu) = 0. \quad (42)$$

Согласно (19) имеем

$$2r e^{\nu-\lambda} = (2f' + \sigma'), \quad (43)$$

поэтому после замены экспоненциального множителя уравнение (42) принимает вид

$$\frac{1}{r} \left(1 - \frac{m^2 r^2}{2} \right) (2f' + \sigma') - \left[f'' + \sigma'' + (f' + \sigma')^2 - f'(f' + \sigma') \right] + e^{-2f} (\ddot{f} + m^2 e^\mu) = 0. \quad (44)$$

Так как μ зависит только от t , а $f = \psi(t) + \varphi(r)$, то в уравнениях (41) и (44) переменные t и r разделяются:

$$-f'' - \sigma'' - \frac{1}{2} (f' + \sigma')^2 + (f' + \sigma') \omega' - \frac{m^2}{2} = k e^{-2\varphi(r)}, \quad (45)$$

$$\ddot{f} + \frac{1}{2} (\dot{f})^2 - \dot{f} \dot{\omega} - \frac{m^2}{2} = k e^{2\psi(t)}, \quad (46)$$

$$f'' + \sigma'' + \sigma' (f' + \sigma') - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{m^2 r^2}{2} \right) (2f' + \sigma') = p e^{-2\varphi(r)}, \quad (47)$$

$$\ddot{f} + m^2 e^\mu = p e^{2\psi(t)}, \quad (48)$$

здесь k и p — постоянные разделения.

Обратимся к уравнениям (46) и (48). Введем новую переменную

$$\psi(t) = \ln a^2(t). \quad (49)$$

Уравнения (46) и (48) принимают вид

$$2a\ddot{a} - 8\dot{a}^2 - \frac{m^2}{2} a^2 = k a^6, \quad (50)$$

$$2a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 + m^2a^8 = pa^6. \quad (51)$$

Отсюда находим

$$\dot{a}^2 = -\frac{1}{12}[m^2a^2 + 2m^2a^8 + 2(k-p)a^6]. \quad (52)$$

Дифференцируя, получаем

$$\ddot{a} = -\frac{1}{24}[2m^2a + 16m^2a^7 + 12(k-p)a^5]. \quad (53)$$

Подставляя (52) и (53) в уравнение (50), находим соотношение между постоянными разделения

$$p = -2k. \quad (54)$$

При этом равенстве имеем

$$\dot{a}^2 = -\frac{1}{12}(m^2a^2 + 2m^2a^8 + 6ka^6). \quad (55)$$

Перейдем теперь к анализу уравнений (45) и (47). Учитывая (35) и (36), уравнение (43) принимает вид

$$\varphi' = -\frac{1}{2}\sigma' + re^{-3\varphi-\sigma}. \quad (56)$$

Дифференцируя (56), находим

$$\varphi'' = -\frac{1}{2}\sigma'' + \frac{1}{2}r\sigma'e^{-3\varphi-\sigma} + e^{-3\varphi-\sigma} - 3r^2e^{-6\varphi-2\sigma}. \quad (57)$$

Подставляя (56) и (57) в уравнения (45) и (47), получаем

$$-3r^2e^{-2\sigma}x^2 + 2kx^{2/3} = -x(2 + 2r\sigma')e^{-\sigma} - \sigma'' + \frac{1}{4}\sigma'^2 - m^2, \quad (58)$$

$$-3r^2e^{-2\sigma}x^2 + 2kx^{2/3} = x\left[2\left(1 - \frac{m^2r^2}{2}\right) - \frac{3}{2}r\sigma' - 1\right]e^{-\sigma} - \frac{1}{2}\sigma'' - \frac{1}{2}\sigma'^2, \quad (59)$$

Здесь мы обозначили через x выражение

$$x = e^{-3\varphi}. \quad (60)$$

Рассмотрим уравнения

$$-3r^2e^{-2\sigma}x^2 + 2x(1 + r\sigma')e^{-\sigma} + \sigma'' - \frac{1}{4}\sigma'^2 = 0, \quad (61)$$

$$-3r^2e^{-2\sigma}x^2 - x\left(1 - \frac{3}{2}r\sigma'\right)e^{-\sigma} + \frac{1}{2}\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'^2 = 0. \quad (62)$$

Вычитая одно уравнение из другого, получаем

$$x = \frac{(3/4)\sigma'^2 - (1/2)\sigma''}{3 + (1/2)r\sigma'}e^\sigma = \alpha = e^{-3\varphi}. \quad (63)$$

При соответствующем σ величина α является корнем уравнений (61) и (62). Подставляя в уравнения (58) и (59) значение x , равное α , находим

$$2k\alpha^{2/3} = -m^2, \quad (64)$$

$$2k = -\alpha^{1/3}m^2r^2e^{-\sigma}. \quad (65)$$

Из уравнений (64) и (65) имеем

$$\alpha = \frac{1}{r^2}e^{\sigma}. \quad (66)$$

Поскольку, согласно (64), α должна быть постоянной величиной, из выражения (66) следует

$$\sigma = \ln \alpha + \ln r^2. \quad (67)$$

Из соотношений (64) и (65) находим

$$k = -\frac{m^2}{2\alpha^{2/3}}. \quad (68)$$

Согласно принципу причинности (6) имеем

$$U \leq V. \quad (69)$$

Чтобы удовлетворить этому выражению, достаточно, учитывая (34) и (35), наложить следующие условия:

$$1 \leq e^{-2\varphi(r)}, \quad (70)$$

$$e^{2\psi(t)} \leq 1. \quad (71)$$

Неравенство (71) отражает физическое свойство гравитационного поля замедлять ход времени по сравнению с инерциальным временем. Учитывая (63), условие (70) можно записать в форме

$$\alpha^{2/3} \geq 1. \quad (72)$$

Подставляя значение k из (68) в (55), получаем

$$\dot{a}^2 = -\frac{m^2a^8}{12} \left(\frac{1}{a^6} + 2 - \frac{3}{\alpha^{2/3}a^2} \right), \quad a > 0. \quad (73)$$

Поскольку правая часть (73) с учетом (72) строго отрицательна, а левая часть всегда положительна, равенство возможно только при условии, когда a постоянна, а правая часть равна нулю.

Правая часть равенства (73) удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{1}{a^6} + 2 - \frac{3}{\alpha^{2/3}a^2} \right) \geq \frac{2}{a^6}(a^2 - 1)^2(a^2 + 1/2). \quad (74)$$

Чтобы левая часть (74) обратилась в нуль, необходимо положить

$$a = 1, \quad \alpha^{2/3} = 1. \quad (75)$$

Учитывая (49), (63) и (75), получаем

$$\psi = 0, \quad \varphi = 0. \quad (76)$$

На основании формул (67), (75) и (76) рассматриваемый второй **случай** привел к следующим метрическим коэффициентам:

$$U = 1, \quad V = 1, \quad W^2 = r^2, \quad (77)$$

что соответствует метрике пространства Минковского, т. е. свидетельствует об отсутствии гравитационного поля.

Таким образом, мы приходим к общему выводу: для **нестатического** сферически-симметричного источника в инерциальной системе координат метрические коэффициенты интервала внешнего **гравитационного поля вида (7)** могут быть только **статическими**. Поскольку внешнее гравитационное поле вида (7) нестатического сферически-симметричного тела является статическим, то на основании [3] следует, что радиус такого тела, благодаря силам отталкивания, всегда больше радиуса Шварцшильда.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность С. С. Герштейну, А. А. Годизову, В. А. Петрову за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
- [2] А. А. Логунов. Теория гравитационного поля. – М.: Наука, 2001;
А. А. Logunov. The Theory of Gravity. – М.: Nauka, 2001;
А. А. Logunov. The Theory of Gravity, gr-qc/0210005, 2002.
- [3] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. Силы отталкивания в полевой теории гравитации. Препринт ИФВЭ 2005-10. Протвино, 2005.

Рукопись поступила 14 июня 2005 г.

А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили.
Внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного
тела в инерциальной системе координат .

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **Л^AT_EX**.
Редактор Н.В. Ежела.

Подписано к печати 14.06.2004. Формат 60 × 84/8.
Офсетная печать. Печ.л. 1.05. Уч.-изд.л. 0,9. Тираж 130. Заказ .
Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

