ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2005–29
ОТФ

С.С. Герштейн, А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили

О ВНУТРЕННЕМ РЕШЕНИИ ТИПА ШВАРЦШИЛЬДА В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Направлено в *ТМФ*

Протвино 2005

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А. О внутреннем решении типа Шварцшильда в полевой теории гравитации: Препринт ИФВЭ 2005–29. – Протвино, 2005. – 6 с., библиогр.: 6.

Показано, что внутреннее решение типа Шварцшильда в полевой теории гравитации не приводит к *бесконечному давлению* внутри тела, как это имеет место в общей теории относительности. Это происходит благодаря массе покоя гравитона из-за остановки замедления хода времени.

Abstract

Gershtein S.S., Logunov A.A., Mestvirishvili M.A. About the Interior Solution of Schwarzschild Kind in Field Theory of Gravitation: IHEP Preprint 2005–29. – Protvino, 2005. – p. 6, refs.: 6.

We demonstrate that interior Schwarzschild-like solution in the field theory of gravitation does not lead to infinite pressure in a body, as it takes place in general relativity. This fact occurs due to the rest mass of graviton because of stopping the process of time dilation.

В статьях [1, 2] К. Шварцшильд нашел сферически-симметричные статические (внешнее и внутреннее) решения уравнений общей теории относительности (ОТО). Внешнее решение широко известно и имеет следующий вид:

$$ds^2 = c^2\Big(1 - \frac{W_g}{W}\Big)dt^2 - \Big(1 - \frac{W_g}{W}\Big)^{-1}dW^2 + W^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,, \tag{1}$$

здесь $W_g = (2GM)/c^2$ — радиус Шварцшильда.

Внутреннее решение Шварцшильда для *однородного шара* радиуса a описывается интервалом

$$ds^2 = c^2\Big(\frac{3}{2}\sqrt{1 - qa^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - qW^2}\Big)^2 dt^2 - (1 - qW^2)^{-1}dW^2 + W^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,, \tag{2}$$

где $q = (1/3)\varkappa\rho = (2GM)/(c^2a^3)$, $\varkappa = (8\pi G)/c^2$, $\rho = (3M)/(4\pi a^3)$.

Общее свойство внешнего и внутреннего решений проявляется в том, что при определенном значении W метрические коэффициенты при дифференциале dt^2 в интервалах (1) и (2) обращаются в нуль. Обращение в нуль метрического коэффициента U при dt^2 означает, что гравитационное поле своим действием может не только замедлить ход времени, но и *остановить течение времени*. Для внешнего решения обращение в нуль метрического коэффициента U происходит при равенстве $W = W_g$. Чтобы исключить такую возможность, которую теория не запрещает, вынуждены предположить, что радиус тела удовлетворяет неравенству

$$a > W_g\,. \tag{3}$$

Для внутреннего решения это происходит при равенстве

$$W^2 = 9a^2 - 8(a^3/W_g)\,, \tag{4}$$

чтобы исключить возможность обращения в нуль метрического коэффициента U внутри тела, вынуждены предположить

$$a > (9/8)W_g\,. \tag{5}$$

Следует подчеркнуть, что неравенства (3) и (5) не являются следствием ОТО.

Внутреннее решение Шварцшильда несколько формально, но интересно прежде всего тем, что оно является точным решением уравнений ОТО. В работах [3, 4] на примере внешнего решения Шварцшильда показано, что в релятивистской теории гравитации (РТГ) как полевой теории неравенство (3) точно возникает из-за гравитационной эффективной силы отталкивания, которая проявилась благодаря массе покоя гравитона из-за остановки процесса замедления хода времени. Ниже мы в рамках РТГ рассмотрим внутреннее решение типа Шварцшильда.

Внутреннее решение Шварцшильда возникло на основании уравнений Гильберта–Эйнштейна

$$1-\frac{d}{dW}\Big[\frac{W}{V}\Big]=\varkappa W^2\rho\,,$$

$$1-\frac{1}{V}-\frac{W}{UV}\frac{dU}{dW}=-\varkappa\frac{W^2}{c^2}p\,. \tag{6}$$

Поскольку согласно (2) метрические коэффициенты равны

$$U=\Big(\frac{3}{2}\sqrt{1-qa^2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-qW^2}\Big)^2,\quad V=(1-qW^2)^{-1}, \tag{7}$$

отсюда находим

$$\frac{U'}{U}=\frac{qW}{\sqrt{1-qW^2}\Big(\frac{3}{2}\sqrt{1-qa^2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-qW^2}\Big)}\,,\quad U'=\frac{dU}{dW}\,. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в уравнение (6), получаем выражение для давления

$$\frac{p}{c^2}=\frac{\rho}{2}\frac{(\sqrt{1-qW^2}-\sqrt{1-qa^2})}{\sqrt{U}}\,. \tag{9}$$

Отсюда, в частности, видно, что если бы не было исключено равенство (4), то давление внутри тела на окружности, определяемой этим равенством, обратилось бы в бесконечность. Сингулярность, которая возникает из-за обращения метрического коэффициента U в нуль, нельзя устранить выбором системы координат, поскольку ее также имеет и скалярная кривизна R

$$R=-8\pi G\left[\frac{3\sqrt{1-qa^2}-2\sqrt{1-qW^2}}{\sqrt{U}}\right]. \tag{10}$$

Покажем теперь на примере внутреннего решения типа Шварцшильда, что в РТГ благодаря силе отталкивания, которая возникает из-за остановки процесса замедления хода времени, ситуация принципиально изменяется. Тот же механизм самоограничения поля, который в РТГ [3, 4] привел к неравенству (3) во внешнем решении Шварцшильда, приведет к неравенству типа (5) для внутреннего решения Шварцшильда.

Уравнения РТГ для метрики, определяемой интервалом

$$ds^2=c^2U(W)dt^2-V(W)\acute{r}^2dW^2-W^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2) \tag{11}$$

(здесь $\acute{r}=dr/dW$), принимают вид [5, 6]

$$1-\frac{d}{dW}\Big[\frac{W}{V\acute{r}^2}\Big]+\frac{1}{2}\Big(\frac{m_gc}{\hbar}\Big)^2\Big[W^2-r^2+\frac{W^2}{2}\Big(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\Big)\Big]=\varkappa W^2\rho\,, \tag{12}$$

$$1-\frac{1}{V\acute{r}^2}-\frac{W}{UV\acute{r}^2}U'+\frac{1}{2}\Big(\frac{m_gc}{\hbar}\Big)^2\Big[W^2-r^2-\frac{W^2}{2}\Big(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\Big)\Big]=-\varkappa W^2\frac{p}{c^2}\,, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dW}\left[\sqrt{\frac{U}{V}}\,W^2\right] = 2r\sqrt{UV}\,\acute{r}\,.$$

Введем новую переменную $Z = (UW^2)/(V\acute{r}^2)$ и, складывая уравнения (12) и (13), получаем

$$1 - \frac{1}{2UW}\acute{Z} + \frac{m^2}{2}(W^2 - r^2) = \frac{1}{2}\varkappa W^2\Big(\rho - \frac{p}{c^2}\Big)\,. \tag{14}$$

Вычитая уравнение (13) из уравнения (12), находим

$$\acute{Z} - 2Z\frac{\acute{U}}{U} - 2\frac{Z}{W} - \frac{m^2}{2}W^3\Big(1 - \frac{U}{V}\Big) = -\varkappa W^3\Big(\rho + \frac{p}{c^2}\Big)U\,, \tag{15}$$

здесь $m = (m_g c)/\hbar$.

В нашей задаче компоненты тензора энергии-импульса вещества равны

$$T_0^0 = \rho, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\frac{p(W)}{c^2}\,.$$

Уравнение вещества

$$\nabla_\nu(\sqrt{-g}\,T_\mu^\nu) = \partial_\nu(\sqrt{-g}\,T_\mu^\nu) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\sigma\nu}\partial_\mu g^{\sigma\nu} = 0$$

для данной задачи сводится к следующему виду:

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dW} = -\Big(\rho + \frac{p}{c^2}\Big)\frac{1}{2U}\frac{dU}{dW}\,. \tag{16}$$

Поскольку давление возрастает к центру шара, это приводит к неравенству

$$\frac{dU}{dW} > 0\,, \tag{17}$$

которое свидетельствует, что по мере приближения к центру шара функция U убывает, а следовательно, идет замедление хода времени по сравнению с инерциальным. Поскольку во внутренней задаче Шварцшильда плотность ρ принята *постоянной*, уравнение (16) легко решается:

$$\rho + \frac{p}{c^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{U}}\,. \tag{18}$$

Сравнивая (9) и (18), находим постоянную α

$$\alpha = \rho\sqrt{1 - qa^2}\,. \tag{19}$$

Уравнения (14) и (15) в предположении, что

$$m^2(W^2 - r^2) \ll 1, \quad (U/V) \ll 1\,,$$

и после введения независимой переменной $y = W^2$ принимают вид

$$\acute{Z} = U(1 - 3qy) + \frac{\alpha\varkappa}{2}y\sqrt{U}\,, \tag{20}$$

$$\sqrt{U}\overset{\prime}{Z} - \frac{1}{y}Z\sqrt{U} - 4Z(\sqrt{U})' + \frac{\alpha\varkappa}{2}yU - \frac{m^2}{4}y\sqrt{U} = 0\,. \tag{21}$$

Здесь и далее мы пользуемся обозначением $\overset{\prime}{Z} = dZ/dy$.

В работах [3, 4] при анализе внешнего сферически-симметричного решения Шварцшильда мы увидели, что благодаря гравитационной эффективной силе отталкивания метрический коэффициент U, определяющий замедление хода времени по сравнению с инерциальным, даже в сильном гравитационном поле не обращается в нуль.

Именно поэтому ниже мы будем исследовать поведение решения этих уравнений в области малых значений y. При массе гравитона равной нулю из выражения (7) для малых значений переменной y имеем

$$\sqrt{U} \simeq \frac{1}{2}(3\sqrt{1-qa^2}-1) + \frac{qy}{4} + \frac{1}{16}q^2y^2\,. \tag{22}$$

Из этого выражения также видно, что функция $\sqrt{U}$ для внутреннего решения Шварцшильда может стать равной нулю, если

$$3\sqrt{1-qa^2} = 1\,, \tag{23}$$

что и приводит к бесконечному значению в центре шара как давления p, так и скалярной кривизны R. Поскольку при наличии массы покоя гравитона уравнения (20)–(21) останавливают процесс замедления хода времени, то естественно ожидать, что равенство (23) не может иметь место в физической (вещественной) области для функции $\sqrt{U}$. На основании (22) будем искать решение уравнений (20)–(21) для функции $\sqrt{U}$ в форме

$$\sqrt{U} = \beta + \frac{qy}{4} + \frac{1}{16}q^2y^2\,, \tag{24}$$

здесь β — неизвестная постоянная, которую необходимо определить, используя уравнения (20)–(21).

Подставляя выражение (24) в уравнение (20) и интегрируя, находим

$$Z = \beta^2 y + \frac{y^2}{2}\Big(\frac{\beta q}{2} - 3\beta^2 q + \frac{\alpha\varkappa\beta}{2}\Big) + \frac{y^3}{3}\Big[\frac{q^2}{8}\Big(\beta+\frac{1}{2}\Big) - \frac{3\beta}{2}q^2 + \frac{\alpha\varkappa q}{8}\Big]\,. \tag{25}$$

Учитывая выражения (24) и (25) в уравнении (21) и пренебрегая малыми членами порядка $(my)^2$, получаем для определения постоянной β уравнение

$$2\beta^2 q + \beta(q-\alpha\varkappa) + m^2/3 = 0\,. \tag{26}$$

Заметим в качестве пояснения, что член, содержащий y^2, имеет следующий вид:

$$-\frac{qy^2}{48}\big\{7[2\beta^2 q + \beta\,(q-\alpha\varkappa)] + 3m^2\big\}\,.$$

Он (принимая во внимание уравнение (26)) приводится к виду

$$-\frac{q}{72}m^2y^2\,.$$

Учитывая, что по определению

$$\alpha\varkappa - q = \frac{\varkappa\rho}{3}\big(3\sqrt{1-qa^2}-1\big)\,,$$

из уравнения (26) находим

$$\beta = \frac{3\sqrt{1-qa^2} - 1 + \left[\left(3\sqrt{1-qa^2}-1\right)^2 - (8m^2)/\varkappa\rho\right]^{1/2}}{4}\,. \tag{27}$$

Таким образом, метрический коэффициент U, определяющий процесс замедления хода времени по сравнению с инерциальным *отличен от нуля*.

Если массу покоя гравитона положить равной нулю, выражение (27), как и следовало ожидать, точно совпадает с постоянным членом выражения (22). Из формулы (27) можно определить минимальное значение величины β

$$\beta_{\min} = \left(\frac{m^2}{2\varkappa\rho}\right)^{1/2}. \tag{28}$$

Величина β в функции $\sqrt{U}$ определяет границу для процесса замедления хода времени гравитационным полем шара. Это означает, что дальнейшее *замедление* хода времени гравитационным полем *невозможно*. Именно поэтому скалярная кривизна, определяемая выражением (10), в отличие от ОТО будет всюду конечна. Таким образом, само гравитационное поле благодаря массе покоя гравитона останавливает процесс замедления хода времени.

Согласно (27) равенство (23) благодаря наличию массы покоя гравитона *невозможно*, поскольку имеет место неравенство

$$3\sqrt{1-qa^2} - 1 \geq 2\sqrt{2}\left(\frac{m^2}{\varkappa\rho}\right)^{1/2}. \tag{29}$$

Принимая во внимание по определению равенство

$$qa^2 = W_g/a\,,$$

на основании неравенства (29) для $\varkappa\rho \gg m^2$ находим

$$a \geq \frac{9}{8}W_g\left(1 + \sqrt{\frac{m^2}{2\varkappa\rho}}\right). \tag{30}$$

Это ограничение на радиус тела, возникающее при изучении внутреннего решения, более сильное, чем ограничение (3), полученное в [3, 4] при анализе внешнего решения. Неравенство (30), как мы видим, непосредственно следует из теории, тогда как в ОТО, чтобы избежать бесконечного давления внутри тела, неравенство (5) вынуждены вводить дополнительно. На основании (18) и (19) находим для давления выражение

$$\frac{p}{c^2} = \frac{-\rho\sqrt{U} + \rho\sqrt{1-qa^2}}{\sqrt{U}}\,.$$

Учитывая равенство (28), получаем максимальное давление в центре шара

$$\frac{p}{c^2} \simeq \rho\left[\frac{2\varkappa\rho}{m^2}(1-qa^2)\right]^{1/2}.$$

Давление в центре шара конечно, тогда как в ОТО согласно (2) оно бесконечно.

Наличие в релятивистской теории гравитации *эффективной силы отталкивания*, возникающей в сильных гравитационных полях, принципиально отличает ее от ОТО Эйнштейна и от ньютоновской теории гравитации, в которых господствуют только *силы притяжения*. В полевой теории гравитации наличие массы покоя гравитона и фундаментальное свойство гравитационного поля замедлять ход времени физического процесса по сравнению с инерциальным временем приводят к тому, что *гравитационная сила* может быть не только *силой притяжения*, но при определенных условиях (в сильных полях) и *эффективной силой отталкивания*. Эффективная сила отталкивания останавливает процесс замедления хода времени гравитационным полем. Гравитационное поле, таким образом, в принципе, не может остановить ход времени физического процесса, поскольку оно обладает фундаментальным свойством *самоограничения*. Именно это свойство гравитационного поля кардинально изменяет картину эволюции материи по сравнению с ОТО, исключая возможность образования черных дыр как нефизических объектов.

В заключение авторы выражают благодарность В. А. Петрову за ценные обсуждения.

Список литературы

[1] *Schwarzschild K.* Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S. 189.

[2] *Schwarzschild K.* Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 1916. S. 424.

[3] *Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Об одном фундаментальном свойстве гравитационного поля в полевой теории. Препринт ИФВЭ 2004-50. Протвино, 2004 (направлено в ДАН).

[4] *Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Силы отталкивания в полевой теории гравитации. Препринт ИФВЭ 2005-10. Протвино, 2005 (направлено в ТМФ).

[5] *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Релятивистская теория гравитации. – М.: Наука, 1989; *Logunov A. A., Mestvirishvili M. A.* The relativistic theory of gravitation. – M.: Mir, 1989.

[6] *Логунов А. А.* Теория гравитационного поля. – М.: Наука, 2001;
Logunov A. A. The Theory of Gravity. – M.: Nauka, 2001;
Logunov A. A. The Theory of Gravity, gr-qc/0210005, 2002.

Рукопись поступила 12 сентября 2005 г.

С.С. Герштейн, А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили.
О внутреннем решении типа Шварцшильда в полевой теории гравитации.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В. Ежела.

Подписано к печати 12.09.2005. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 0,75. Уч.-изд.л. 0,7. Тираж 130. Заказ 80.
Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2005–29, И Ф В Э, 2005