ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2005–44
ОТФ

С.Н. Сторчак

ПРИМЕНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ КООРДИНАТ В ЗАДАЧАХ ФАКТОРИЗАЦИИ МЕР КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ РЕДУКЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Протвино 2005

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Сторчак С.Н. Применение нормальных координат в задачах факторизации мер континуальных интегралов при редукции динамических систем: Препринт ИФВЭ 2005–44. – Протвино, 2005. – 20 с., библиогр.: 15.

Рассмотрено применение нормальных координат в задаче редукции континуальных интегралов винеровского типа, определенных с помощью случайных процессов и описывающих (квантовое) движение скалярной частицы на гладком компактном римановом многообразии, на котором задано свободное собственное изометрическое действие компактной полупростой унимодулярной группы Ли. Показано, что в случае, когда на получающемся в задаче главном расслоении в качестве групповых координат используются нормальные координаты, факторизацию меры в континуальном интеграле также можно выполнить с помощью стохастического дифференциального уравнения оптимальной нелинейной фильтрации.

Получено представление локальных функций Грина через континуальные интегралы по пространству орбит.

Abstract

Storchak S.N. Normal Coordinates in Path Integral Measure Factorization Problems for Dynamical Systems under Reduction: IHEP Preprint 2005–44. – Protvino, 2005. – p. 20, refs.: 15.

Normal coordinates in the reduction problem of Wiener path integrals are considered.

The path integrals, defined by the stochastic processes, describe the (quantum) motion of a scalar particle on a smooth compact Riemannian manifold with the given free proper isometric action of the compact semisimple unimodular Lee group.

Due to the symmetry of the problem we can view the manifold as a local fibre space. It is shown, that the normal coordinates, as the group coordinates of the principal fiber bundle, can be used in the path integral measure factorization method, which is based on the nonlinear filtering stochastic differential equation.

The representation of the local Green functions in terms of the orbit space path integrals is obtained.

Введение

Известно, что наличие симметрии у динамической системы существенно упрощает задачу изучения ее эволюции. В этом случае можно “сократить” избыточные степени свободы, связанные с симметрией, и перейти от исходной динамической системы к новой системе, динамика которой описывается гамильтонианом, зависящим только от “внутренних” степеней свободы. Такой переход от исходной динамической системы к новой называется редукцией.

Заметим, что к классу динамических систем с симметрией относятся и системы, обладающие калибровочными степенями свободы. И задача квантовой редукции в таких системах состоит в корректном определении редуцированной динамики.

В данной работе мы продолжаем начатое в [1] исследование динамической системы, описывающей “квантовое” движение скалярной частицы на многообразии, на котором задано действие группы. Такая динамическая система может служить конечномерной моделью при изучении вопросов редукции в калибровочных теориях. Благодаря симметрии исходное многообразие в этой модели является тотальным пространством главного расслоения. И, следовательно, для описания локальной динамики нашей задачи мы можем воспользоваться координатами локально тривиального главного расслоения.

В развиваемом нами подходе [1] взаимосвязь между квантовыми эволюциями исходной и редуцированной динамических систем исследовалась с помощью континуальных интегралов, которые определялись как интегралы винеровского типа по мерам, порожденным случайными диффузионными процессами, заданными на многообразиях.

В локальных координатах главного расслоения исходный случайный процесс, определяющий меру в континуальном интеграле, описывает согласованные друг с другом диффузии, заданные на базе расслоения и на групповом многообразии. Именно такое локальное представление дает нам возможность записать меру исходного континуального интеграла в виде произведения двух независимых мер и разделить эволюции на базе расслоения и групповом многообразии, если привлечь для такого перехода уравнение нелинейной фильтрации из теории случайных процессов.

Локальное описание главного расслоения подразумевает выбор определенных координат на базе расслоения и на групповом многообразии. В наших предыдущих работах на этих многообразиях использовались обычные координаты общего вида. В данной работе изучается возможность применения нормальных групповых координат для группового многообразия в задачах редукции.

Заметим, что использование нормальных координат на многообразиях обусловлено тем, что, оставаясь в рамках локального подхода, с их помощью можно выявить эффекты, связанные с глобальными свойствами многообразий. Как образец подобного применения нормальных координат можно указать, например, изучение асимптотического поведения эволюционных полугрупп, заданных на главных расслоениях [2].

Отметим также, что в калибровочных теориях, в задаче редукции, нормальные координаты на групповых многообразиях применялись в работах [3, 4, 5] при преобразованиях "меры" в континуальных интегралах.

1. Определения

Напомним исходные определения из наших предыдущих работ. В этих работах для описания "квантового" движения скалярной частицы на компактном гладком многообразии $\mathcal{P}$ (без края), на котором задано свободное собственное действие компактной полупростой группы Ли $\mathcal{G}$, мы использовали обратное уравнение Колмогорова:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(\dfrac{\partial}{\partial t_a}+\dfrac{1}{2}\mu^2\kappa\triangle_{\mathcal{P}}(p_a)+\dfrac{1}{\mu^2\kappa m}V(p_a)\right)\psi_{t_b}(p_a,t_a)=0 & \\ \psi_{t_b}(p_b,t_b)=\phi_0(p_b), & (t_b>t_a)\ , \end{array}\right. \tag{1}$$

где $\mu^2=\frac{\hbar}{m}$; κ — вещественный положительный параметр; $V(p)$ — потенциал, инвариантный относительно действия группы $\mathcal{G}$. Оператор Лапласа–Бельтрами $\triangle_{\mathcal{P}}(p_a)$ на карте $(\mathcal{U},\varphi)$ многообразия $\mathcal{P}$ (в локальных координатах $Q=\varphi(p)$) имеет следующий вид:

$$\triangle_{\mathcal{P}}(Q)=G^{-1/2}(Q)\frac{\partial}{\partial Q^A}G^{AB}(Q)G^{1/2}(Q)\frac{\partial}{\partial Q^B}\ , \tag{2}$$

где $G^{AB}(Q)$ — матрица, обратная к матрице $G_{AB}(Q)$, определенная по римановой метрике на многообразии $\mathcal{P}$: $G(\frac{\partial}{\partial Q^A},\frac{\partial}{\partial Q^B})$. Через $G(Q)$ мы обозначили $G=\det(G_{AB})$.

Предполагая, что в нашем случае выполнены все необходимые условия гладкости, решение уравнения (1), согласно [6], можно представить в виде континуального интеграла по мере, порожденной случайным процессом

$$\begin{aligned} \psi_{t_b}(p_a,t_a) &= \mathrm{E}\Big[\phi_0(\eta(t_b))\exp\{\frac{1}{\mu^2\kappa m}\int_{t_a}^{t_b}V(\eta(u))du\}\Big] \\ &= \int_{\Omega_-}d\mu^\eta(\omega)\phi_0(\eta(t_b))\exp\{\ldots\}\ , \end{aligned} \tag{3}$$

где $\eta(t)$ — случайный процесс, заданный на многообразии $\mathcal{P}$, а μ^η есть порожденная этим процессом мера на пространстве путей $\Omega_-=\{\omega(t):\omega(t_a)=0,\eta(t)=p_a+\omega(t)\}$.

На многообразии глобальный случайный процесс η определяется с помощью предельного перехода в семействе согласованных локальных стохастических эволюций [6]. А каждая локальная эволюция, в свою очередь, может быть задана как решение стохастического дифференциального уравнения определенного вида. Такое уравнение должно преобразовываться ковариантным образом при переходе от одной карты многообразия к другой, сделанном согласно формуле Ито для преобразования случайных процессов.

В нашем случае, например, такое стохастическое дифференциальное уравнение на карте $(\mathcal{U}, \varphi)$ многообразия $\mathcal{P}$ выглядит следующим образом:

$$d\eta^A(t) = \frac{1}{2}\mu^2\kappa G^{-1/2}\frac{\partial}{\partial Q^B}(G^{1/2}G^{AB})dt + \mu\sqrt{\kappa}\mathfrak{X}^A_{\bar{M}}(\eta(t))dw^{\bar{M}}(t), \tag{4}$$

где $\mathfrak{X}^A_{\bar{M}}$ определяются локальным равенством $\sum_{\bar{K}=1}^{n_P}\mathfrak{X}^A_{\bar{K}}\mathfrak{X}^B_{\bar{K}} = G^{AB}$. (Индексами с чертой мы обозначаем евклидовые индексы.)

Глобальная полугруппа (3), действующая в пространстве гладких и ограниченных функций на $\mathcal{P}$, есть предел суперпозиции локальных полугрупп:

$$\psi_{t_b}(p_a, t_a) = U(t_b, t_a)\phi_0(p_a) = \lim\nolimits_q \tilde{U}_\eta(t_a, t_1)\cdot\ldots\cdot\tilde{U}_\eta(t_{n-1}, t_b)\phi_0(p_a)\ . \tag{5}$$

Континуальный интеграл каждой из локальных полугрупп

$$\tilde{U}_\eta(s,t)\phi(p) = \mathrm{E}_{s,p}\phi(\eta(t)),\ \ s \le t,\ \ \eta(s) = p$$

берется по мере, определенной локальным представителем $\varphi^{\mathcal{P}}(\eta(t)) = \eta^{\varphi^{\mathcal{P}}}(t) \equiv \{\eta^A(t)\}$ глобального случайного процесса $\eta(t)$.

Таким образом, в данном определении континуального интеграла о поведении глобальной полугруппы при преобразованиях можно судить по преобразованиям ее локальных представителей.

Заметим, что прямое уравнение Колмогорова при подстановке $\kappa = i$ переходит в уравнение Шредингера.

2. Координаты на главном расслоении

Свободное гладкое изометрическое собственное действие группы Ли $\mathcal{G}$, которая в нашем случае компактна и полупроста, на гладком компактном римановом многообразии $\mathcal{P}$ приводит к тому [7], что многообразие $\mathcal{P}$ "расслаивается" на орбиты. Многообразие $\mathcal{P}$ в такой картине является тотальным пространством главного расслоения $P(\mathcal{M}, \mathcal{G})$, а многообразие $\mathcal{M} = \mathcal{P}/\mathcal{G}$ — пространством орбит.

Атлас главного расслоения $\mathfrak{A}^P$ состоит из набора карт $(U_i^{\mathcal{M}}, \varphi_i^P)$, где $U_i^{\mathcal{M}}$ — это открытые окрестности [1], заданные на многообразии $\mathcal{M}$, а φ_i^P — специальные отображения, которые в случае пересечения окрестностей из разных карт удовлетворяют условиям согласованности.

В локально тривиальном главном расслоении $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$, в котором $\pi^{-1}(U_i^{\mathcal{M}}) \sim U_i^{\mathcal{M}} \times \mathcal{G}$, функции φ_i^P устанавливают соответствие между точкой p, из тотального пространства расслоения ($p \in \pi^{-1}(U_i^{\mathcal{M}})$), ее проекцией на базу $\pi(p)$ и элементом группы $g(p)$, φ_i^P: $p \to (\pi(p), g(p))$. Это соответствие взаимнооднозначно. Поэтому, если на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{G}$ выбраны какие–либо координаты, то знание координат $\pi(p)$ и $g(p)$ (вместе с функциями φ_i^P) позволяет однозначно определить координаты точки p на главном расслоении.

[1] Верхним индексом мы обозначаем принадлежность окрестностей соответствующему пространству.

Таким образом, в нашей задаче мы имеем на $\mathcal{P}$ две дифференциальные структуры. Одна структура — это структура исходного гладкого многообразия с атласом $\mathfrak{A}^{\mathcal{P}}$, состоящим из карт $(U^{\mathcal{P}}, \varphi^{\mathcal{P}})$, другая — связана с главным расслоением, когда координаты точек на $\mathcal{P}$, как на тотальном пространстве, могут быть найдены с помощью атласа главного расслоения $\mathfrak{A}^{P}$. Выбирая новый атлас на $\mathcal{P}$ специальным образом, можно добиться такой согласованности этих дифференциальных структур, чтобы для $p \in U^{\mathcal{P}}_A$ и $\pi(p) \in U^{\mathcal{M}}_i$ выполнялось $U^{\mathcal{P}}_A \in \pi^{-1}(U^{\mathcal{M}}_i)$. Если это имеет место, то тогда в соответствующих окрестностях координаты Q точки p на многообразии $\mathcal{P}$, $Q = \varphi^{\mathcal{P}}(p)$, можно выразить через ее же координаты на главном расслоении.

Существуют разные способы, которые позволяют установить соответствие между p и $(\pi(p), g(p))$, т.е. определить координатный гомеоморфизм на главном расслоении. Мы будем использовать способ, основанный на применении калибровочных поверхностей. Он состоит в следующем [8].

Изначально на тотальном пространстве главного расслоения задается набор функций $\{\chi^{\alpha}(p)\}$, который определяет локальное подмногообразие Σ, пересекающееся в некоторой окрестности точки p с орбитами группы $\mathcal{G}$ трансверсальным образом.

На тотальном пространстве главного расслоения, согласно определению, действует группа $\mathcal{G}$. (Обычно рассматривается правое действие группы.) Это означает, что задано отображение $F : \mathcal{P}\times\mathcal{G} \to \mathcal{P}$. Если на $\mathcal{P}$ и $\mathcal{G}$ как на многообразиях заданы какие–либо координаты, то на многообразии $\mathcal{P}\times\mathcal{G}$ можно определить атлас с картами $(U^{\mathcal{P}}_A \times U^{\mathcal{G}}_{\alpha}, \varphi^{\mathcal{P}}_A \times \varphi^{\mathcal{G}}_{\alpha})$,

$$\varphi_{A,\alpha} = (\varphi^{\mathcal{P}}_A \times \varphi^{\mathcal{G}}_{\alpha}) : (p \times g) \to (\varphi^{\mathcal{P}}_A(p) \times \varphi^{\mathcal{G}}_{\alpha}(g)) = (Q_{(A)}, g_{(\alpha)}).$$

Тогда для соответствующих окрестностей действие группы $\mathcal{G}$ на $\mathcal{P}$ в этих координатах представлено набором функций $\{{}_{\tilde{A}}F_{A,\alpha}\}$:

$${}_{\tilde{A}}F_{A,\alpha} = \varphi^{\mathcal{P}}_{\tilde{A}} \circ F \circ \varphi^{-1}_{A,\alpha} \ ,$$

т.е. $Q_{(\tilde{A})} = {}_{\tilde{A}}F_{A,\alpha}(Q_{(A)}, g_{(\alpha)})$.

Взяв элемент $\tilde{p}_{\Sigma}$, который лежит на подмногообразии, т.е. $\chi^{\alpha}(\tilde{p}_{\Sigma}) = 0$, можно найти групповую "координату" $g(p) \in \mathcal{G}$ главного расслоения для тех элементов p, которые с помощью группового действия получены из $\tilde{p}_{\Sigma}$, $p = F(\tilde{p}_{\Sigma}, g)$. Она находится из решения уравнения $\chi^{\alpha}(F(p, g^{-1}) = 0$. В координатах это уравнение записывается следующим образом:

$$\chi^{\beta}_{(\tilde{A})}\big({}_{\tilde{A}}F_{A,\alpha}(Q_{(A)}, g^{-1}_{(\alpha)})\big) = 0 \ , \tag{6}$$

где $\chi^{\beta}_{(\tilde{A})} = \chi^{\beta} \circ (\varphi^{\mathcal{P}}_{\tilde{A}})^{-1}, \quad Q_{(A)} = \varphi^{\mathcal{P}}_A(p)$.

Решая уравнение (6), мы находим координаты $g_{(\alpha)}$ элемента $g \in U^{\mathcal{G}}_{\alpha}$. Если, кроме этого, уравнение (6) еще имеет решение $\tilde{g}_{(\beta)}$ и элемент $\tilde{g} \in U^{\mathcal{G}}_{\beta}$, то в данном случае это только означает, что $\tilde{g}_{(\beta)}$ есть другая координата того же самого элемента группы $g = \tilde{g}$, и он лежит в пересечении двух окрестностей $U^{\mathcal{G}}_{\alpha} \cap U^{\mathcal{G}}_{\beta}$. Основанием для такого утверждения является то, что мы выбираем действие $\mathcal{G}$ на $\mathcal{P}$ свободным и требуем, чтобы подмногообразие Σ трансверсально пересекало орбиты группы $\mathcal{G}$ в локальной окрестности.

В случае тривиального главного главного расслоения $\mathcal{P} \sim \mathcal{M}\times\mathcal{G}$ калибровочная поверхность Σ трансверсально пересекается со всеми орбитами $\mathcal{G}$ на многообразии $\mathcal{P}$. Для определения координат на всем главном расслоении достаточно одного набора функций $\{\chi^{\alpha}\}$.

Для нетривиального главного расслоения одного набора калибровочных функций уже недостаточно. Можно независимо определить координаты для нескольких наборов калибровочных функций. Но тогда для описания редуцированной динамики в целом требуется согласование редуцированных эволюций [9], определенных для каждого набора.

Координатное представление действия группы $\mathcal{G}$ на $\mathcal{P}$ с использованием нормальных координат рассмотрено в Приложении. В этом случае нормальные координаты $\lambda_i^\alpha(Q)$ элемента группы $g(p)$ также определяются из уравнения (6). Но теперь для этого берется набор функций $\{{}_{\tilde{A}}F_{A,\hat{g}_i}\}$, который представляет действие группы в координатах. Здесь также остается в силе замечание по поводу единственности решения уравнения (6).

Для определения $\pi(p)$ в координатном гомеоморфизме главного расслоения $p \leftrightarrow (\pi(p), g(p))$ необходимо перейти от неявно заданной в R^N $(\chi^\alpha(Q) = 0)$ калибровочной поверхности Σ к ее параметрическому представлению. При этом координаты Q_Σ точки $p_\Sigma \in \Sigma$ будут функциями независимых координат $x : Q_\Sigma = Q^*(x)$, т.е. должно выполняться $\chi^\alpha(Q^*(x)) = 0$.

Если $p \in U_A^{\mathcal{P}}$ имеет координаты $Q_A = \varphi_A^{\mathcal{P}}(p)$, и, решая уравнение (6), мы нашли, что элемент $g(Q)$ задается нормальными координатами $\lambda_i^\alpha(Q)$, или координатами $g^\alpha(Q)$, когда на $\mathcal{G}$ выбраны обычные координаты, то полученные в результате действия элемента $g(p)$ на точку p координаты $\tilde{Q}$ точки $p_\Sigma \in \Sigma$, $U_{\tilde{A}}^{\mathcal{P}}$ выражаются через координаты Q и $\lambda(Q)$ следующим образом:

$$\tilde{Q}_{(\tilde{A})} = {}_{\tilde{A}}F_{A,\hat{g}_i}(Q, \lambda_i(Q)) \ . \tag{7}$$

Но для локального образа Σ в координатном пространстве у нас есть параметрическое представление $\tilde{Q} = Q^*(x)$. Подставляя в левую часть равенства (7) вместо $\tilde{Q}_{(\tilde{A})}$ его параметрическое представление, мы получаем уравнение

$$Q^*_{(\tilde{A})}(x) = {}_{\tilde{A}}F_{A,\hat{g}_i}(Q, \lambda_i(Q)) \ ,$$

решение которого — координаты $\{x^i(Q)\}$ — и есть искомое координатное представление для $\pi(p)$. Если $p \in \mathcal{P}$ переходит в $p\,g$, то эти координаты $\{x^i(Q)\}$ не изменяются. Следовательно, они являются координатами на пространстве орбит $\mathcal{M}$.

Заметим, что ввиду локальной взаимнооднозначности экспоненциального отображения $(\exp\lambda)^\alpha = h^\alpha(1, \lambda)$ при определении координат на главном расслоении можно использовать и функции

$$\tilde{Q}_{(\tilde{A})} = {}_{\tilde{A}}\tilde{F}_{A,\hat{g}_i}(Q, (\exp\lambda)_i(Q)) \ ,$$

также задающие действие $\mathcal{G}$ на $\mathcal{P}$ в координатах (см. Приложение).

3. Эволюция в окрестности калибровочной поверхности

В этом разделе мы рассматриваем случай локальной эволюции вблизи калибровочной поверхности Σ, т.е. когда начальная и конечная точки эволюции находятся в некоторой окрестности локальной калибровочной поверхности. Мы будем также считать, что поверхность, определяемая калибровочными функциями, трансверсально пересекается со всеми орбитами группы $\mathcal{G}$ в этой окрестности и получающееся главное расслоение тривиально.

При определении групповой координаты главного расслоения мы искали элемент группы $g(p)$, который переводит точку p на калибровочную поверхность Σ. В связи с тем, что теперь точка p находится вблизи поверхности Σ [2], можно считать, взяв при необходимости исходную точку p в соответствующей окрестности Σ, что элемент $g(p)$ принадлежит такой окрестности единичного элемента группы, в которой справедливо действие экспоненциального отображения. В этой окрестности $g(p) = \exp \lambda(p) e = \exp \lambda(p)$.

Под квантовой редукцией в континуальном интеграле понимается преобразование континуального интеграла, в результате которого исходная мера в континуальном интеграле переходит в меру, представленную в факторизованном виде. Напомним, что мера нашего континуального интеграла определена с помощью решений стохастических дифференциальных уравнений. И следствием преобразований стохастических уравнений является преобразование меры [1].

Наша задача — найти представление для исходного процесса η_t, определенного на многообразии $\mathcal{P}$, в виде процесса ζ_t на главном расслоении. Процесс ζ_t локально задается как набор случайных процессов, определенных на картах главного расслоения. Эти процессы удовлетворяют условию согласованности, по которому процессы должны переходить друг в друга, если окрестности карт имеют пересечения. Относительно определения случайных процессов на главном расслоении мы сошлемся на работы Далецкого и Белопольской [6], чей подход к случайным процессам используется в работе.

В локальной картине переход от процесса η_t к процессу ζ_t непосредственно связан с преобразованием координат на $\mathcal{P}$, где мы теперь должны заменить прежние координаты $\{Q^A\}, (A = 1, \ldots, n_{\mathcal{P}}, n_{\mathcal{P}} = dim\mathcal{P})$ точек p на их новые координаты $(x^i(Q), \lambda^\alpha(Q))$, $(i = 1, \ldots, n_{\mathcal{M}},)$ на главном расслоении. Но сначала рассмотрим преобразование компонент исходной метрики $G_{AB}(Q)$ нашего многообразия $\mathcal{P}$.

Преобразование компонент метрики на многообразии $\mathcal{P}$

В выбранной нами специальной окрестности главного расслоения $U^P = \pi^{-1}\ (U_i^{\mathcal{M}}) \sim U_i^{\mathcal{M}} \times \mathcal{V}_0^{\mathcal{G}}$, расположенной вблизи Σ, в координатном выражении для метрики $ds^2 = G_{AB}(Q)\ dQ^A dQ^B$ мы должны сделать подстановку $Q = F(Q^*(x), \exp \lambda)$ [3].

После этого, так как действие группы $\mathcal{G}$ на $\mathcal{P}$ — изометрическое, мы получим следующее представление для компонент метрики G_{AB}:

$$\begin{pmatrix} G_{ij}(x,\mathrm{e}) & G_{i\nu}(x,\mathrm{e})\bar{u}^{\nu}_{\mu}(\exp\lambda) \\ G_{\nu i}(x,\mathrm{e})\bar{u}^{\nu}_{\mu}(\exp\lambda) & G_{\mu\nu}(x,\mathrm{e})\bar{u}^{\mu}_{\rho}(\exp\lambda)\bar{u}^{\nu}_{\sigma}(\exp\lambda) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

в котором

$$\begin{aligned} G_{ij}(x,e) &= Q_i^{*A}(x) G_{AB}(Q^*(x)) Q_j^{*B}(x)\ , \\ G_{i\nu}(x,e) &= Q_i^{*A}(x) G_{AB}(Q^*(x)) K_\nu^B(Q^*(x))\ , \\ G_{\mu\nu}(x,e) &= K_\mu^A(Q^*(x)) G_{AB}(Q^*(x)) K_\nu^B(Q^*(x))\ . \end{aligned}$$

В предыдущих выражениях нижние индексы у $Q_i^{*A}(x)$ означают, что от $Q^{*A}(x)$ взята производная по переменной x_i.

[2]Это следует из нашего требования, чтобы действие группы на многообразии было собственным.

[3]Чтобы подчеркнуть, что мы используем нормальные координаты на группе, мы вводим для них обозначение $\exp \lambda$. Те случаи, когда под $\exp \lambda = \exp(\lambda^\alpha \mathrm{e}_\alpha)$ понимается элемент алгебры $\mathfrak{g}$, мы будем особо оговаривать.

Величины $K^A_\nu(Q^*(x))$ — это компоненты векторов Киллинга $K_\nu = K^A_\nu(Q)\frac{\partial}{\partial Q^A}$ для исходной метрики $G_{AB}(Q)$, преобразованной к поверхности Σ (и затем — к пространству орбит $\mathcal{M}$).

Матрицы $\bar{u}^\alpha_\beta$ являются обратными к матрицам $\bar{v}^\alpha_\beta(a) = \frac{\partial \Phi^\alpha(b,a)}{\partial b^\beta}|_{b=e}$. ($\Phi$ — функция, определяющая групповое умножение в пространстве групповых параметров.) При $a = \exp\lambda$ матрицы $\bar{u}^\mu_\alpha(\exp\lambda)$ равны

$$\bar{u}^\mu_\alpha(\exp\lambda) = \left(\frac{\mathrm{e}^{c\cdot\lambda} - 1}{c\cdot\lambda}\right)^\mu_\alpha,$$

где $c\cdot\lambda$ есть следующее произведение: $c\cdot\lambda = c^\beta_{\nu\mu}\lambda^\nu$.

Чтобы вычислить производную $\frac{\partial Q^A}{\partial\lambda^\mu}$, необходимую нам для перехода в метрике $G_{AB}(Q)$ к новым координатам, мы использовали следующий прием.

При дифференцировании в выражении $Q^A = F^A(Q^*(x), \exp\lambda)$ вместо $\exp\lambda$ была подставлена однопараметрическая группа $h(t,\lambda)$, служащая для определения $\exp\lambda$. И после этого производная по λ бралась от полученной функции $F^A(Q^*(x), h(t,\lambda))$:

$$\frac{\partial\tilde{Q}^A}{\partial\lambda^\mu} = F^A_\alpha \frac{\partial h^\alpha(t,\lambda)}{\partial\lambda^\mu} = F^A_{\tilde{A}} K^{\tilde{A}}_\beta(Q^*(x))\bar{u}^\beta_\alpha(h(t,\lambda))\frac{\partial h^\alpha(t,\lambda)}{\partial\lambda^\mu}$$

(нижние индексы у F означают, что от функции $F^A(Q,a)$ берутся производные по соответствующим переменным: $F^A_\alpha = \partial F^A/\partial a^\alpha$, $F^A_{\tilde{A}} = \partial F^A/\partial Q^{\tilde{A}}$).

В полученном выше выражении можно преобразовать два последних члена. Если их обозначить через $\bar{\sigma}^\beta_\mu = \bar{u}^\beta_\alpha\frac{\partial h^\alpha}{\partial\lambda^\mu}$, то, рассматривая правое действие группы на себе, можно увидеть, что $\bar{\sigma}^\beta_\mu$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\bar{\sigma}^\alpha_\mu}{\partial t} = \delta^\alpha_\mu - \bar{c}^\alpha_{\nu\kappa}\lambda^\nu\bar{\sigma}^\kappa_\mu \ ,$$

где $\bar{c}^\alpha_{\nu\kappa} = -c^\alpha_{\nu\kappa}$, а $c^\alpha_{\nu\kappa}$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Решением этого уравнения будет

$$\bar{\sigma}^\alpha_\mu(t,\lambda) = \frac{(\mathrm{e}^{c^\alpha_{\nu\mu}\lambda^\nu t} - \delta^\alpha_\mu)}{c^\alpha_{\nu\mu}\lambda^\nu} \ .$$

Теперь возможен переход к $t = 1$, и $\bar{\sigma}^\alpha_\mu(t,\lambda)$ при $t = 1$ принимает следующее значение:

$$\bar{u}^\mu_\alpha(\exp\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{c\cdot\lambda} - 1}{c\cdot\lambda} \ .$$

Выражение для преобразованной метрики (8) можно записать и в другом виде, если использовать метрику $h_{ij}(x)$ на пространстве орбит $\mathcal{M} = \mathcal{P}/\mathcal{G}$. Обычно такая метрика определяется, если в главном расслоении задана связность. На нашем расслоении связность возникает естественным образом [7] благодаря симметрии задачи.

Как 1–форма $\omega = \omega^\alpha \otimes e_\alpha$ на тотальном пространстве главного расслоения $\mathcal{P}$ со значением в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, связность имеет (в исходных координатах) следующий вид:

$$\omega^\alpha(Q) = d^{\alpha\beta}(Q)G_{AB}(Q)K^B_\beta(Q)dQ^A,$$

где $d^{\alpha\beta}(Q)$ обратна к матрице $d_{\alpha\beta}(Q) = K^A_\alpha(Q)G_{AB}(Q)K^B_\beta(Q)$.

В расслоенных координатах (x^i, λ^α) для ω^α получается выражение

$$\omega^\alpha(F(Q^*(x), \mathrm{exp}\lambda)) = (\mathrm{e}^{-c\cdot\lambda})^\alpha_\nu A^\nu_i(x)dx^i + u(\mathrm{exp}\lambda)^\alpha_\beta d\lambda^\beta. \tag{9}$$

Заметим, что $(\mathrm{e}^{-c\cdot\lambda})^\alpha_\nu$ — это матрица присоединенного представления $\rho^\alpha_\nu(\exp(-\lambda))$, а $u(\mathrm{exp}\lambda)^\alpha_\beta$ определено следующей формулой:

$$u(\exp\lambda)^\alpha_\beta = \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-c\cdot\lambda}}{c\cdot\lambda}\right)^\alpha_\beta .$$

Стоящая в (9) функция $A^\nu_i(x)$ есть проекция связности на базу расслоения $\mathcal{M}$:

$$A^\nu_i(x) = d^{\nu\sigma}(Q^*(x))G_{EB}(Q^*(x))K^B_\sigma(Q^*(x))\frac{\partial Q^{*E}(x)}{\partial x^i} \ .$$

Компоненты метрики $h_{ij}(x) = h_x(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ в точке $x = \pi(p)$ на пространстве орбит определяются через компоненты исходной метрики G_p пространства $\mathcal{P}$, взятой на касательных к $\mathcal{P}$ векторах, полученных в результате горизонтального лифта базисных, касательных к $\mathcal{M}$, векторов $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$:

$$h_x(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = G_p(H_i, H_j) \ ,$$

где горизонтальные векторы H_i равны: $H_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - A^\alpha_i(x)\bar{L}_\alpha$ ($\bar{L}_\alpha$ — правоинвариантное векторное поле $\bar{L}_\alpha = \bar{v}^\mu_\alpha(\exp\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda^\mu}$).

Тогда, сделав соответствующие преобразования в (8), мы получим новое представление для метрики главного расслоения:

$$\begin{pmatrix} h_{ij}(x) + A^\mu_i(x)A^\nu_j(x)\gamma_{\mu\nu}(x) & A^\mu_i(x)\bar{u}^\nu_\sigma(\exp\lambda)\gamma_{\mu\nu}(x) \\ A^\mu_i(x)\bar{u}^\nu_\sigma(\exp\lambda)\gamma_{\mu\nu}(x) & \bar{u}^\mu_\rho(\exp\lambda)\bar{u}^\nu_\sigma(\exp\lambda)\gamma_{\mu\nu}(x) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Для $G_{\mu\nu}(x, e)$ мы ввели новое обозначение: $\gamma_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu}(x, e)$. Заметим также, что $\gamma_{\alpha\sigma}(x) = d_{\alpha\sigma}(Q^*(x))$. Детерминант этой метрики равен

$$\det G_{AB} = (\det h_{ij}(x))\,(\det \gamma_{\alpha\beta}(x))\,(\det \bar{u}^\mu_\rho(\exp\lambda))^2.$$

Преобразование случайных процессов

Преобразование случайных процессов выполняется по такой же схеме, как и в наших работах [1]. С целью полноты изложения мы воспроизводим здесь основные идеи этих работ.

Случайный процесс ζ_t должен иметь две компоненты. Причем эти компоненты получаются почти так же, как и их аналоги x^i и λ^α, в обычной замене координат, когда на многообразии $\mathcal{P}$ вместо координат Q^A вводятся координаты главного расслоения. Отличие состоит только в том, что при вычислении дифференциалов случайных процессов необходимо учитывать, согласно формуле Ито, также и производные второго порядка.

Предположим, что стохастические дифференциальные уравнения для процессов ξ_t и λ_t, составляющих процесс ζ_t [4], имеют диффузионную структуру, т.е.

$$\begin{cases} dx^i(t) = b^i(t)dt + X^i_{\bar{M}} dw^{\bar{M}} \\ d\lambda^\alpha(t) = b^\alpha(t)dt + X^\alpha_{\bar{M}} dw^{\bar{M}}. \end{cases}$$

Поскольку в левых частях предыдущих уравнений стоят величины, зависящие от случайного процесса $\eta(t)$ (от его локальных случайных координат $\eta^A(t)$), мы можем вычислить (по формуле Ито) их дифференциалы. Для $\lambda^\alpha(t)$, например, будет

$$d\lambda^\alpha(t) = \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial Q^A}(\eta(t))d\eta^A(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \lambda^\alpha}{\partial Q^A \partial Q^B}(\eta(t))d\eta^A(t)d\eta^B(t)\ .$$

(Заметим, что среднее $< d\eta^A(t)d\eta^B(t) >= G^{AB}(\eta(t))dt$.)

Как процессы $\lambda^\alpha(t)$ и $x^i(t)$ зависят от случайных координат $\eta^A(t)$ процесса $\eta(t)$, мы знаем из замены обычных переменных: $Q^A = F^A(Q^*(x), \lambda)$. Поэтому мы можем вычислить производные, стоящие в $d\lambda^\alpha(t)$. А вместо $d\eta^A(t)$ нужно подставить правую часть из его локального уравнения (4).

Таким образом, мы знаем, чему равен стохастический дифференциал $d\lambda^\alpha(t)$ в левой части стохастического дифференциального уравнения. Сопоставляя эту вычисленную часть с тем, что стоит справа в стохастическом дифференциальном уравнении, можно найти коэффициенты стохастического дифференциального уравнения для процесса $\lambda^\alpha(t)$.

Если проделать данные вычисления, а также ортогональное преобразование винеровского процесса $w^{\bar{N}}$, благодаря которому в уравнении для $x^i(t)$ останется лишь компонента $w^{\bar{k}}$, то мы в результате получим следующие локальные стохастические дифференциальные уравнения для процесса $\zeta(t)$:

$$\begin{aligned} dx^i(t) &= \frac{1}{2}\mu^2\kappa\Big[\frac{1}{\sqrt{h\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^n}(h^{ni}\sqrt{h\gamma})\Big]dt + \mu\sqrt{\kappa}X^i_{\bar{n}}(x(t))dw^{\bar{n}}(t), \\ d\lambda^\alpha(t) &= \mu^2\kappa\Big[-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h\gamma}h^{km}A^\nu_m\right)\bar{v}^\alpha_\nu(\exp\lambda) \\ &+\frac{1}{2}(\gamma^{\nu\epsilon} + h^{ij}A^\nu_i A^\epsilon_j)\bar{v}^\sigma_\nu(\exp\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda^\sigma}(\bar{v}^\alpha_\epsilon(\exp\lambda))\Big]dt \\ &+\mu\sqrt{\kappa}\bar{v}^\alpha_\nu(\exp\lambda)\bar{Y}^\nu_{\bar{\epsilon}}dw^{\bar{\epsilon}}(t) - \mu\sqrt{\kappa}X^i_{\bar{n}}A^\nu_i\bar{v}^\alpha_\nu(\exp\lambda)dw^{\bar{n}}(t)\ . \end{aligned} \tag{11}$$

В этих формулах через h и γ мы обозначили детерминанты: $h = \det h_{ij}(x)$ и $\gamma = \det\gamma_{\mu\nu}(x)$. Величины $\bar{Y}^\nu_{\bar{\epsilon}}(x)$ в этом уравнении выбраны так, что $\bar{Y}^\mu_{\bar{\beta}}(x)\bar{Y}^\nu_{\bar{\beta}}(x) = \gamma^{\mu\nu}(x)$ (индексы с чертой — евклидовы), а $X^i_{\bar{n}}(x) = (h^{ij}(x))^{1/2}$.

Выполненный в локальных координатах переход от процесса η_t к процессу $\zeta_t = (\xi_t, \lambda_t)$ относится к классу фазовых преобразований случайных процессов, про которые известно, что они сохраняют вероятности. В нашем случае это означает, что такое преобразование оставляет инвариантной меру в континуальном интеграле (5), который теперь можно переписать в виде

$$\psi_{t_b}(p_a, t_a) = \lim\nolimits_q \tilde{U}_{\zeta\varphi^P}(t_a, t_1)\cdot\ldots\cdot\tilde{U}_{\zeta\varphi^P}(t_{n-1}, t_b)\tilde{\phi}_0(x_a, \exp\lambda_a)\ , \tag{12}$$

[4] Обозначение второй компоненты процесса ζ_t у нас совпадает с обозначением нормальной групповой координаты.

где $\tilde{U}_{\zeta\varphi^P}$ получаются в результате преобразований локальных полугрупп $\tilde{U}_{\eta\varphi^{\mathcal{P}}}$ процесса η_t, т.е.

$$(\tilde{U}_{\zeta\varphi^P}(s,t)\tilde{\phi})(x_0,\lambda_0)=\mathrm{E}_{s,(x_0,\lambda_0)}[\tilde{\phi}(x^i(t),(\exp\lambda(t))^\alpha)],\ \ x(s)=x_0,\ \ \lambda(s)=\lambda_0\ . \tag{13}$$

В предыдущих уравнениях функция $\tilde{\phi}_0$ определена с помощью замены координат $\tilde{Q}=\tilde{F}(Q^*(x),(\exp\lambda))$ (что эквивалентно преобразованию $\tilde{Q}^A=\tilde{f}^A(x^i,h^\alpha(1,\lambda))$) следующим образом: $\tilde{\phi}_0\equiv\phi_0\circ(\varphi^{\mathcal{P}})^{-1}\circ\tilde{f}$.

В символической записи континуальный интеграл (12) (с учетом потенциального члена) есть

$$\psi_{t_b}(p_a,t_a)=\mathrm{E}\Big[\tilde{\phi}_0(\xi(t_b),\exp\lambda(t_b))\exp\{\frac{1}{\mu^2\kappa m}\int_{t_a}^{t_b}\tilde{V}(\xi(u))du\}\Big]\ , \tag{14}$$

где $\xi(t_a)=x_a$, $\lambda(t_a)=\lambda_a$ и $\varphi^P(p_a)=(x_a,\lambda_a)$.

Производящий генератор у новой полугруппы получается с помощью стохастических дифференциальных уравнений (11) и формулы дифференцирования Ито. В координатах (x^i,λ^α) он будет

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mu^2\kappa\Big\{\triangle_M(x)+h^{ij}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\Big(\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}+h^{ij}A_i^\alpha A_j^\beta\bar{L}_\alpha\bar{L}_\beta-2h^{in}A_n^\alpha\bar{L}_\alpha\frac{\partial}{\partial x^i}\\&-h^{in}\frac{\partial A_n^\alpha}{\partial x^i}\bar{L}_\alpha-\frac{h^{in}}{\sqrt{h}}\frac{\partial\sqrt{h}}{\partial x^i}A_n^\alpha\bar{L}_\alpha-h^{in}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^i}A_n^\alpha\bar{L}_\alpha-\frac{\partial h^{in}}{\partial x^i}A_n^\alpha\bar{L}_\alpha+\gamma^{\alpha\beta}\bar{L}_\alpha\bar{L}_\beta\Big\}\ ,\end{aligned}$$

где $\triangle_M$ — оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathcal{M}$, а $\bar{L}_\alpha=\bar{v}_\alpha^\epsilon(\exp\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda^\epsilon}$ — правоинвариантные векторные поля.

Другое представление этого оператора есть

$$\frac{1}{2}\mu^2\kappa\Big\{\Box_H+h^{ij}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\Big(\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^i}\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}+\gamma^{\alpha\beta}\bar{L}_\alpha\bar{L}_\beta-h^{in}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\Big(\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^i}\Big)A_n^\alpha\bar{L}_\alpha\Big\}\ ,$$

$\Box_H$ — “горизонтальный” лапласиан.

Редукция в континуальном интеграле

Процедура редукции в нашем континуальном интеграле, как и в [1], основана на применении уравнения нелинейной фильтрации из теории случайных процессов. Благодаря марковскому свойству случайного процесса ζ_t, мы можем представить правую часть равенства (14), определяющую локальную полугруппу $\tilde{U}_{\zeta\varphi^P}$, в виде повторного интеграла

$$(\tilde{U}_{\zeta\varphi^P}(s,t)\tilde{\phi})(x_0,\lambda_0)=\mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\Big[\tilde{\phi}(x(t),\exp\lambda(t))\mid(\mathcal{F}_x)_s^t\Big]\Big]\ .$$

Оказывается, что для условного среднего $\mathrm{E}[\tilde{\phi}\mid(\mathcal{F}_x)_s^t]$ существует [10, 11] специальное нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение (уравнение нелинейной фильтрации), которое в нашем случае, если обозначить условное среднее от функции $\tilde{\phi}$ через

$$\hat{\tilde{\phi}}(x(t))\equiv\mathrm{E}\Big[\tilde{\phi}(x(t),\exp\lambda(t))\mid(\mathcal{F}_x)_s^t\Big]\ ,$$

имеет следующий вид:

$$d\hat{\tilde{\phi}}(x(t)) = \mu^2\kappa\Big[-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h\gamma}h^{km}A^{\nu}_m\right)\Big]\,\mathrm{E}[\bar{L}_{\nu}\tilde{\phi}(x(t),\exp\lambda(t))\mid(\mathcal{F}_x)^t_s]dt$$
$$+\frac{1}{2}\mu^2\kappa(\gamma^{\alpha\beta}+h^{ij}A^{\alpha}_iA^{\beta}_j)\mathrm{E}[\bar{L}_{\alpha}\bar{L}_{\beta}\tilde{\phi}(x(t),\exp\lambda(t))\mid(\mathcal{F}_x)^t_s]dt$$
$$-\mu\sqrt{\kappa}A^{\nu}_kX^k_{\bar{m}}\,\mathrm{E}[\bar{L}_{\nu}\tilde{\phi}(x(t),\exp\lambda(t))\mid(\mathcal{F}_x)^t_s]dw^{\bar{m}}(t)\ . \tag{15}$$

В этом уравнении $\bar{L}\equiv\bar{L}(\exp\lambda(t))$.

Дальнейшее преобразование уравнения (15) аналогично случаю обычных координат. Оно состоит из подстановки в уравнение разложения функции $\tilde{\phi}(x(t),(\exp\lambda(t)))$ (как функции на группе) в ряд по неприводимым представлениям группы $\mathcal{G}$

$$\tilde{\phi}(x,\exp\lambda)=\sum_{\nu,p,q}c^{\nu}_{pq}(x)D^{\nu}_{pq}(\exp\lambda)\ .$$

В нормальных координатах действие правоинвариантного векторного поля $\bar{L}_{\alpha}(\exp\lambda)$ на $D^{\nu}_{pq}(\exp\lambda)$ является таким же, как и в случае, когда на группе заданы обычные координаты

$$\bar{L}_{\alpha}D^{\nu}_{pq}(\exp\lambda)=\sum_{q'}(J_{\alpha})^{\nu}_{pq'}D^{\nu}_{q'q}(\exp\lambda)\ ,$$

$(J_{\alpha})^{\nu}_{pq}$ — генераторы представления D^{ν}, $(J_{\alpha})^{\nu}_{pq}\equiv(\frac{\partial D^{\nu}_{pq}(a)}{\partial a^{\alpha}})|_{a=e}$.

Такое свойство приводит к тому, что получающееся уравнение для условного среднего $\hat{D}^{\nu}_{pq}(x(t))\equiv\mathrm{E}[D^{\nu}_{pq}(\exp\lambda(t))\mid(\mathcal{F}_x)^t_s]$ является линейным, и решение уравнения может быть записано в виде мультипликативного стохастического интеграла

$$\hat{D}^{\nu}_{pq}(x(t))=(\overleftarrow{\exp})^{\nu}_{pn}(x(t),t,s)\,\mathrm{E}[D^{\nu}_{nq}(\exp\lambda(s))\mid(\mathcal{F}_x)^t_s]\ ,$$

где

$$(\overleftarrow{\exp})^{\nu}_{pn}(x(t),t,s)=\overleftarrow{\exp}\int_s^t\Big\{\mu^2\kappa\Big[\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(x(u))(J_{\alpha})^{\nu}_{pr}(J_{\beta})^{\nu}_{rn}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{h\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{h\gamma}h^{km}A^{\alpha}_m\right)(J_{\alpha})^{\nu}_{pn}\Big]du-\mu\sqrt{\kappa}A^{\alpha}_k(x(u))(J_{\alpha})^{\nu}_{pn}X^k_{\bar{m}}(x(u))dw^{\bar{m}}(u)\Big\}$$

$(h,\gamma$ зависят от $x(u))$. Также заметим, что $\mathrm{E}[D^{\nu}_{nq}(\exp\lambda(s))\mid(\mathcal{F}_x)^t_s]=D^{\nu}_{nq}(\exp\lambda_0)$.

В результате локальная эволюционная полугруппа (13) перейдет в

$$(\tilde{U}_{\zeta^{\varphi^P}}(s,t)\tilde{\phi})(x_0,\lambda_0)=\sum_{\nu,p,q,q'}\mathrm{E}[c^{\nu}_{pq}(x(t))(\overleftarrow{\exp})^{\nu}_{pq'}(x(t),t,s)]D^{\nu}_{q'q}(\exp\lambda_0)\ . \tag{16}$$

Таким образом, в локальных полугруппах данного случая факторизация меры проходит в соответствии с тем, что было ранее, когда на $\mathcal{G}$ использовались обычные координаты.

Из (16) можно получить представление для локальной функции Грина через континуальный интеграл. Для этого вместо функции $\tilde{\phi}(x,\exp\lambda)$ нужно взять функцию, которая получается из дельта–функции $\phi(Q) = \frac{1}{\sqrt{G(Q_b)}}\ \delta\ (Q - Q_b)$ после перехода к локальным координатам. Тогда $\tilde{G}_{\rm P}(x_b, \lambda_b, t_b; x_a, \lambda_a, t_a)$ будет равна

$$
\sum_{\nu,p,q,q'} {\rm E}\Big[\frac{1}{\sqrt{h(x_b)}\sqrt{\gamma(x_b)}}\delta(x(t_b) - x_b)(\overleftarrow{\exp})^{\nu}_{pq'}(x(t), t_b, t_a)\Big] \times
$$
$$
D^{\nu}_{q'q}(\exp\lambda_a)\bar{D}^{\nu}_{pq}(\exp\lambda_b) =
$$
$$
= \sum_{\nu,p,q,q'} (G)^{\nu}_{pq'}(x_b, t_b; x_a, t_a) D^{\nu}_{q'q}(\exp\lambda_a)\bar{D}^{\nu}_{pq}(\exp\lambda_b)\ . \tag{17}
$$

(В этом выражении начальные и конечные индексы у локальных координат были обозначены через a и b.)

$(G)^{\nu}_{pq}(x_b, t_b; x_a, t_a)$ является фундаментальным решением (функцией Грина) для дифференциального уравнения с оператором гамильтона (дифференциальным генератором локального случайного процесса ξ_t)

$$
\frac{1}{2}\mu^2\kappa\{[\triangle_M + h^{ni}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x^i}](I^{\nu})_{pq} - 2h^{ni}A^{\alpha}_n(J_\alpha)^{\nu}_{pq}\frac{\partial}{\partial x^i}
$$
$$
-\frac{1}{\sqrt{h\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\sqrt{h\gamma}h^{nm}A^{\alpha}_m\right)(J_\alpha)^{\nu}_{pq} + (\gamma^{\alpha\sigma} + h^{ij}A^{\alpha}_i A^{\sigma}_j)(J_\alpha)^{\nu}_{pq'}(J_\sigma)^{\nu}_{q'q}\}
$$

($(I^{\nu})_{pq}$ — единичная матрица).

Волновые функции для этого оператора нормированы с мерой, которая кроме инвариантного объема на многообразии $\mathcal{M}$, равного $dv_{\mathcal{M}}(x) = \sqrt{h(x)}dx^1...dx^{n_{\mathcal{M}}}$, содержит еще и множитель $\sqrt{\gamma(x)}$.

4. Эволюция на главном расслоении (общий случай)

Если у исходного уравнения (1) существует фундаментальное решение [5], то после определения атласа $\mathfrak{A}^{\mathcal{P}}$ на многообразии $\mathcal{P}$ и задания соответствующего разложения единицы, подчиненного покрытию многообразия $\mathcal{P}$ окрестностями из $\mathfrak{A}^{\mathcal{P}}$, решение уравнения можно представить в виде

$$
\psi_{i_a}(Q_a, t_a) = \sum_{i_b}\int_{\varphi_{i_b}(U^{\mathcal{P}}_{i_b})} \tilde{\mu}_{i_b}(Q_b) G_{\mathcal{P}}(i_b, Q_b, t_b; i_a, Q_a, t_a)\phi_{0 i_b}(Q_b) dv_{\mathcal{P}}(Q_b)\ . \tag{18}
$$

Переход на $\mathcal{P}$ в каждой окрестности $U^{\mathcal{P}}_i \in \pi^{-1}(U^{\mathcal{M}}_i)$ к координатам главного расслоения приводит к замене координат Q^A на $(x^k, \lambda^{\alpha}_i)$. Координаты на группе $\mathcal{G}$ определяются теперь с помощью правотранслированных карт $(\mathcal{V}_0\hat{g}_i, \varphi_{\hat{g}_i})$, а вся область интегрирования на группе разбивается на сумму областей, изоморфных базовой окрестности единицы группы: $\mathcal{G} = \bigcup_i(\mathcal{V}_0\hat{g}_i)$. (Выбором специального разбиения единицы на группе можно добиться того, чтобы локальные области интегрирования не пересекались.)

[5] Существование фундаментального решения (функции Грина) связано с гладкостью и ограниченностью коэффициентов исходного дифференциального уравнения.

Делая следующую замену координат в (18):

$$\tilde{Q}^A = \tilde{F}^A_{\hat{g}_i}(Q^*(x^k), (\exp\lambda_i)^{\alpha}_{(\hat{g}_i)}) \cong \tilde{f}^A_{\hat{g}_i}(x^k, (\exp\lambda_i)^{\alpha}) \cong \tilde{f}^A(x^k, \Phi^{\alpha}((\exp\lambda_i), \hat{g}_i)) \tag{19}$$

(Φ — функция задающая групповое умножение в пространстве групповых параметров), мы преобразуем (18) в

$$\sum_{\alpha_b, i_b} \int\limits_{\varphi^{\mathcal{M}}_{\alpha_b}(\mathcal{U}^{\mathcal{M}}_{\alpha_b})\times\varphi(\mathcal{V}_0)} \tilde{\tilde{\mu}}_{\alpha_b}(x_b,\lambda_b) G_{\mathrm{P}}(\alpha_b, \hat{g}_{i_b}, x_{\alpha_b}, \lambda_{i_b}, t_b; \beta_a, \hat{g}_{i_a}, x_{\beta_a}, \lambda_{i_a}, t_a)$$
$$\times\tilde{\phi}_0(x_{\alpha_b}, (\exp\lambda_{i_b})\hat{g}_{i_b}) dv(x_{\alpha_b}) d\mu(\lambda_{i_b})\ . \tag{20}$$

В этой формуле $\varphi(\mathcal{V}_0) = ((h^{\alpha})^{-1}\circ\varphi^{\mathcal{G}})(\mathcal{V}_0)$, $(h^{\alpha})^{-1}$ — обратная функция к функции $a^{\alpha} = h^{\alpha}(1,\lambda)$, задающей экспоненциальное отображение, а

$$G_{\mathrm{P}}(\alpha_b, \hat{g}_{i_b}, x_{\alpha_b}, \lambda_{i_b}, t_b; \beta_a, \hat{g}_{i_a}, x_{\beta_a}, \lambda_{i_a}, t_a) =$$
$$G_{\mathcal{P}}(\alpha_b, \tilde{f}_{\hat{g}_{i_b}}(x_{\alpha_b}, \lambda_{i_b}), t_b; \beta_a, \tilde{f}_{\hat{g}_{i_a}}(x_{\beta_a}, \lambda_{i_a}), t_a)\ .$$

Мера $d\mu(\lambda)$ в (20) есть $d\mu(\lambda) = \det(\bar{u}^{\sigma}_{\nu}(\exp\lambda)) d\lambda^1\cdot\ldots\cdot d\lambda^{n_{\mathcal{G}}}$.

Заметим, что в локальных функциях Грина элементы $\hat{g}_i$, сдвигающие исходную окрестность $\mathcal{V}_0$ единичного элемента группы, выполняют роль индексов для координатных окрестностей на группе.

В исходном континуальном интеграле (5), который определен как суперпозиция локальных эволюционных полугрупп, также делается замена координат (19). Ввиду того, что локальные стохастические дифференциальные уравнения в нашей задаче инвариантны относительно правого действия группы, в рассматриваемом случае мы можем использовать прежние стохастические дифференциальные уравнения (11). Это приводит к такими же, как и в (15), уравнениям нелинейной фильтрации, и весь процесс факторизации меры в локальных континуальных интегралах в основном совпадает с уже рассмотренным случаем. Незначительное отличие связано лишь с учетом постоянных элементов $\hat{g}_i$, индексирующих групповые карты.

Для изучения этого вопроса можно было бы сразу использовать нормальные координаты как групповые координаты на главном расслоении, но для большей ясности мы рассмотрим здесь последовательную замену переменных в континуальном интеграле, когда на групповом многообразии сначала вводятся обычные координаты, а затем их заменяют на нормальные.

Мы будем делать “замену переменных” в континуальном интеграле для локальной функций Грина. В таком континуальном интеграле в качестве начальной функции $\tilde{\phi}$ используется дельта–функция.

После перехода на $\mathcal{P}$ к координатам главного расслоения (x^i, g^{α}) и преобразовании случайного процесса $\eta^A(t)$ в процесс $\zeta^A(t) = (x^i(t), g^{\alpha}(t))$ фундаментальное решение $G_{\mathrm{P}}(\alpha_b,\, x_{\alpha_b}, g_b, t_b; \beta_a, x_{\beta_a}, g_a, t_a)$ будет описываться следующим, записанным в виде среднего, континуальным интегралом:

$$\mathrm{E}\Big[\frac{1}{\sqrt{h(x_{\alpha_b})}\sqrt{\gamma(x_{\alpha_b})}\bar{u}(g_b)}\delta(x(t_b) - x_{\alpha_b})\delta(g(t_b) - g_b)\Big], \tag{21}$$

где усреднение идет по случайному процессу $\zeta^A(t)$, с начальными условиями $\zeta(t_a) = (x(t_a) = x_{\beta_a},\, g(t_a) = g_a)$, и мы предполагаем, что элемент $g_a \in \mathcal{V}_0\hat{g}_{i_a}$, а g_b принадлежит окрестности $\mathcal{V}_0\hat{g}_{i_b}$, которая пересекается с окрестностью $\mathcal{V}_0\hat{g}_{i_a}$.

Если на главном расслоении групповая часть локальной эволюции происходит в окрестности $\mathcal{V}_0\hat{g}_{i_a}$, то в этой окрестности мы можем перейти от обычных координат на группе к нормальным координатам. (Элемент g_b принадлежит окрестности $\mathcal{V}_0\hat{g}_{i_b}$, которая пересекается с $\mathcal{V}_0\hat{g}_{i_a}$.)

В окрестности $\mathcal{V}_0\hat{g}_{i_a}$ замена локального случайного процесса $g(t)$ с начальным условием $g(t_a) = g_a$ на случайный процесс $\lambda(t)$ с помощью равенства $g(t) = \exp\lambda(t)\hat{g}_{i_a}$, причем $g(t_a) = \exp\lambda(t_a)\hat{g}_{i_a} = (\exp\lambda_a)\hat{g}_{i_a}$, не изменяет вида стохастического дифференциального уравнения (11) для случайного процесса $\lambda(t)$. Но постоянный элемент $\hat{g}_{i_a}$ при такой замене изменяет начальное значение случайного процесса.

Переход к случайному процессу $\lambda(t)$ в континуальном интеграле (21), если в дополнении еще выразить нашу дельта–функцию на группе, стоящую под знаком среднего, через стандартную дельта–функцию посредством соотношения

$$\frac{1}{\bar{u}(g_b)}\delta(g(t) - g_b) = \sum_{\nu,p,q,} D^{\nu}_{pq}(g(t))\bar{D}^{\nu}_{pq}(g_b)\ ,$$

приводит к

$$\sum_{\nu,p,q,q'} \mathrm{E}\Big[\frac{1}{\sqrt{h(x_{\alpha_b})}\sqrt{\gamma(x_{\alpha_b})}}\delta(x(t_b) - x_{\alpha_b})D^{\nu}_{pq'}(\exp\lambda(t_b)\Big] \times$$
$$D^{\nu}_{q'q}(\hat{g}_{i_a})\bar{D}^{\nu}_{pq}(g_b)\ .$$

(При таком преобразовании постоянные величины были вынесены за знак усреднения.)

В полученном представлении функции Грина через континуальный интеграл (средний по мере, порожденной случайным процессом $(x^i(t), \lambda^\alpha(t))$), с помощью уравнения нелинейной фильтрации можно “разделить” переменные $x^i(t)$ и $\lambda^\alpha(t)$. В результате мы получим

$$\sum_{\nu,p,q,q',\sigma} \mathrm{E}\Big[\frac{1}{\sqrt{h(x_{\alpha_b})}\sqrt{\gamma(x_{\alpha_b})}}\delta(x(t_b) - x_{\alpha_b})(\overleftarrow{\exp})^{\nu}_{p\sigma}(x(t), t_b, t_a)\Big] \times$$
$$D^{\nu}_{\sigma q'}(\exp\lambda_{i_a})D^{\nu}_{q'q}(\hat{g}_{i_a})\bar{D}^{\nu}_{pq}(g_b)\ .$$

Преобразуя это выражение, мы окончательно получаем, что функция Грина $\tilde{G}_{\mathrm{P}}(\alpha_b, \hat{g}_{i_b}, x_{\alpha_b},\, \lambda_b, t_b; \beta_a, \hat{g}_{i_a}, x_{\beta_a}, \lambda_a, t_a)$ будет равна

$$\sum_{\nu,p,q,q',\sigma,r} (G)^{\nu}_{p\sigma}(x_{\alpha_b}, t_b; x_{\beta_a}, t_a)D^{\nu}_{\sigma q'}(\exp\lambda_{i_a})\bar{D}^{\nu}_{pr}(\exp\lambda_{i_b})D^{\nu}_{q'q}(\hat{g}_{i_a})\bar{D}^{\nu}_{rq}(\hat{g}_{i_b})\ . \qquad (22)$$

Сравнивая (22) с выражением (17) для эволюции вблизи калибровочной поверхности, мы видим, что функции Грина для локальной эволюции общего случая содержат дополнительные множители $D^{\nu}_{q'q}(\hat{g}_{i_a})$ и $\bar{D}^{\nu}_{rq}(\hat{g}_{i_b})$, которые служат для согласования эволюций на пересекающихся групповых окрестностях.

Заключение

В работе рассмотрены особенности применения нормальных групповых координат при локальной редукции в континуальных интегралах винеровского типа, описывающих движение скалярной частицы на гладком многообразии, на котором задано свободное собственное изометрическое гладкое действие компактной полупростой группы Ли. Проведенное исследование показало, что на данный случай также распространяются развитые в предыдущих работах [1] методы факторизации меры в континуальных интегралах.

В работе были получены представления для локальных факторизованных функций Грина через континуальные интегралы. При этом глобальная эволюционная полугруппа получается как результат суперпозиции локальных факторизованных полугрупп. Для случая, когда нормальные координаты являются координатами группового многообразия на главном расслоении, она будет включать в себя дополнительное суммирование по картам группового многообразия.

Полученные в работе представления для локальных факторизованных функций Грина через континуальные интегралы можно применить и для непосредственного вычисления глобальных эволюционных полугрупп, если исходную полугруппу представить в виде композиции последовательных эволюций, отвечающих разбиению начального разностного группового элемента $(g_b g_a^{-1})$ на конечное произведение групповых элементов, взятых в окрестности единицы компактной группы.

Заметим, что рассмотренные в работе локальные методы факторизации меры могут быть, в принципе, распространены и на функциональные интегралы калибровочных теорий поля. Однако в этом случае группой симметрии является калибровочная группа, которая бесконечномерна. Поэтому для выяснения вопроса о возможном появлении новых членов в якобиане факторизации меры (и в редуцированном гамильтониане), которые связаны с глобальным поведением эволюционной полугруппы требуется дополнительное исследование.

В связи с этим сошлемся на работу [12], где было показано, что при обобщении классической формулы интегрирования Вейля на функциональные интегралы необходимо учитывать топологическую структуру пространства полей, по которым идет интегрирование.

Благодарности

Автор благодарен А. В. Разумову за обсуждение многих вопросов, возникавших во время работы над статьей, и за полезные советы.

Список литературы

[1] S. N. Storchak. *Bogolubov transformation in path integrals on manifold with a group action.* IHEP Preprint 98–1, Protvino, 1998;
S. N. Storchak. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 9329;
С. Н. Сторчак. *ЯФ.* **64,** n.12 (2001) 1–7;
S. N. Storchak. *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 7019–7038.

[2] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators* (Springer–Verlag, Berlin, 1992, 1996).

[3] C. Teitelboim. *J. Math. Phys.* **25** n.4, (1984) 1093–1101.

[4] G.C. Rossi, M. Testa. *Nucl.Phys.* **B163** (1980) 109; **B176.** (1980) 77.

[5] H. Cheng, E. C. Tsai.*Canonical Quantization of Nonabelian Gauge Field Theries.* MIT Preprint 85-0196, 1985.

[6] Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий. *УМН.* **37,** n.3 (1982) 95;
Ю. Л. Далецкий.*УМН.* **38,** n.3 (1983) 87;
Ю. Л. Далецкий, Я. И. Белопольская. *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия.* – Киев, Выща школа, 1989.

[7] R. Abraham, J. E. Marsden. *Foundation of Mechanics, 2nd Ed.* (Addison-Wesley Redwood City, 1985).

[8] O. A. Khrustalev, A. V. Razumov, A. Yu. Taranov. *Nucl. Phys.* **B172** (1980) 44;
А. В. Разумов, А.Ю. Таранов. *ТМФ.* **52** (1982) 34;
А.В. Разумов. Преобразование Боголюбова и квантовая теория систем со связями. *Докторская дисертация* (ИФВЭ, Протвино, 1991).

[9] H. Hüffel, G. Kelnhofer. *Ann. of Phys.* **266** (1998) 417; *Ann. of Phys.* **270** (1998) 231.

[10] Р.Ш. Липцер, А. Н.Ширяев. *Статистика случайных процессов.* – Москва, Наука, 1974.

[11] В. С. Пугачев, И. Н. Синицын. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация.* – Москва, Наука,1990.

[12] M. Blau, G. Thompson. *J. Math. Phys.* **36** n.3 (1995) 2192.

[13] М.М. Постников. *Лекции по геометрии. Семестр 5. Группы Ли и алгебры Ли.* – Москва, Наука, 1982.

[14] Р. Рихтмайер. *Принципы современной математической физики, т.2.* – Москва, Мир, 1984.

[15] С. Хелгасон. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* – Москва, Мир, 1964.

Рукопись поступила 5 декабря 2005 г.

Приложение

Нормальные координаты на группе

В основе построения нормальных координат на группе Ли лежит понятие экспоненциального отображения, которое является частным случаем экспоненциального отображения, определенного для многообразий, когда каждому вектору из окрестности касательного пространства ставится в соответствие определенный элемент исходного многообразия.

Известно, что если на многообразии задано векторное поле X, то его траектория $\varphi_a(t)$, проходящая в момент $t = 0$ через точку a (и определенная в некоторой окрестности этой точки), может быть найдена из решения следующего уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)) \\ \varphi(0) = a. \end{cases} .$$

Для подходящего класса функций, заданных на многообразии, можно определить (формальным образом) линейный оператор

$$e^X = (I + X + \frac{X^2}{2} + \dots) .$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию $F(t) = f(\varphi_a(t))$, нетрудно показать [13], что действие формально определенного линейного оператора на функции f из этого класса задается следующим образом:

$$(e^X f)(a) = f(\varphi_a(1)).$$

При определении экспоненциального отображения на группе Ли в качестве векторного поля X берется левоинвариантное векторное поле, и рассматриваются его траектории $\varphi_e(t)$ в окрестности единичного элемента e. В этом случае действие линейного оператора на функции будет

$$(e^X f)(e) = f(\varphi_e(1)) .$$

Функция $\varphi_e(1)$, участвующая в таком определении действия оператора, задает отображение левоинвариантного векторного поля X на соответствующий элемент группы Ли $\mathcal{G}$, принадлежащий окрестности единичного элемента группы. Так как левоинвариантные векторные поля отождествляются с элементами алгебры Ли, то можно также говорить и об отображении из алгебры Ли в группу.

Для $\varphi_e(1)$ вводится обозначение

$$\varphi_e(1) = \exp X .$$

Следовательно, действие линейного оператора можно записать в виде

$$(e^X f)(e) = f(\exp X) .$$

Отображение $\exp : \mathfrak{g} \to \mathcal{G}$ есть диффеоморфизм из окрестности единицы алгебры на соответствующую окрестность единичного элемента группы. Используя композицию экспоненциального отображения вместе с взаимнооднозначным и гладким отображением из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в евклидово пространство, можно определить координаты элементов группы, лежащих в окрестности $\mathcal{V}_0$ единичного элемента группы Ли.

Рассмотрим, как определяется экспоненциальное отображение на группе в координатах. Если на группе Ли $\mathcal{G}$ как на многообразии заданы какие–либо обычные координаты, т.е. $\varphi^\alpha(g) = a^\alpha$, то элементу e_α базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $[e_\alpha, e_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$, ставится в соответствие левоинвариантное векторное поле $L_\alpha = v^\beta_\alpha(a)\frac{\partial}{\partial a^\beta}$, где v — функции, определяемые с помощью функции Φ, задающей групповое умножение в пространстве групповых параметров $v^\beta_\alpha(a) = \frac{\partial \Phi^\beta(a,b)}{\partial b^\alpha}|_{b=e}$. При этом произвольному элементу алгебры $\lambda = \lambda^\alpha e_\alpha$ сопоставляется векторное поле $X = \lambda^\alpha L_\alpha$.

Решая уравнение

$$\begin{cases} \dfrac{da^\alpha(t)}{dt} = \lambda^\beta v^\alpha_\beta(a(t)) \\ a(0) = e, \end{cases} ,$$

мы находим траекторию $a^\alpha = h^\alpha(t, \lambda^\beta)$ на группе Ли $\mathcal{G}$, проходящую в момент времени $t = 0$ через единицу группы e. Тогда $\exp \lambda$ есть элемент группы $\mathcal{G}$, чьи групповые координаты $\tilde{a}^\alpha$ определяются через координаты λ^α элемента алгебры $\lambda = \lambda^\alpha e_\alpha$ посредством соотношения $\tilde{a}^\alpha = h^\alpha(1, \lambda^\beta)$.

Определенные таким образом координаты (и пока только в окрестности $\mathcal{V}_0$ единичного элемента группы) называются нормальными (или каноническими) координатами на группе.

Отображение трансляции, имеющееся на связной группе Ли, дает возможность с помощью сдвига карты $(\mathcal{V}_0, \varphi)$ определить координаты в окрестности произвольного элемента группы $\mathcal{G}$. Выбор между правыми или левыми трансляциями на группе не принципиален. Но в связи с тем, что мы будем применять нормальные координаты в качестве групповых координат главного расслоения, рассмотрим случай правотранслированных карт.

Так, если g принадлежит окрестности $\mathcal{V}_0\hat{g}$, то g можно представить в виде $g = h\hat{g}$, где $h \in \mathcal{V}_0$, и, следовательно, $g = \exp \lambda\hat{g}$. Для правотранслированной карты $(\mathcal{V}_0\hat{g}, \varphi_{\hat{g}})$ в качестве координатного отображения $\varphi_{\hat{g}}$ берется $\varphi_{\hat{g}} = \varphi \circ R_{\hat{g}^{-1}}$. Тогда

$$\varphi_{\hat{g}}(g) = \varphi(\exp(\lambda^\alpha(g)\mathrm{e}_\alpha)) = (\lambda^1(g), \ldots, \lambda^r(g)) \ ,$$

т.е. φ — обратная функция (“$\ln$”) к экспоненциальному отображению, и $\{\lambda^\alpha(g)\}_{1,r}$ — нормальные координаты элемента g из окрестности $\mathcal{V}_0\hat{g}$.

Функция φ может быть определена с помощью обратной функции к функции h из $a^\alpha = h^\alpha(1, \lambda^\beta)$ и обычных координатных отображений на группе $\mathcal{G}$:

$$\varphi = (h^\alpha)^{-1} \circ \varphi^{\mathcal{G}}.$$

При этом $\varphi_{\hat{g}} = (h^\alpha)^{-1} \circ \varphi^{\mathcal{G}} \circ R_{\hat{g}^{-1}} \equiv (h^\alpha)^{-1} \circ \tilde{\varphi}_{\hat{g}}$.

Соответственно, если взять обратное к φ отображение в виде $\varphi^{-1}_{\hat{g}} = R_{\hat{g}} \circ \varphi^{-1}$, то

$$\varphi^{-1}_{\hat{g}}(\lambda) = (R_{\hat{g}} \circ \varphi^{-1})(\lambda) = \exp \lambda\hat{g} = g \ .$$

$(\varphi^{-1}_{\hat{g}}(\lambda) = (R_{\hat{g}} \circ (\varphi^{\mathcal{G}})^{-1} \circ h^\alpha \equiv (\tilde{\varphi}_{\hat{g}})^{-1} \circ h^\alpha.)$ Следовательно, с помощью групповых трансляций нормальные координаты можно определить и на всей группе $\mathcal{G}$.

По поводу доказательства существования нормальных координат на группе Ли мы сошлемся на соответствующие разделы книг [14, 13, 15].

Групповое умножение в нормальных координатах

На группе Ли операция группового умножения может быть реализована как отображение многообразий

$$\Phi : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G} \ ,$$

где, как обычно, под произведением двух многообразий понимается единое многообразие. Атлас такого многообразия состоит из произведения карт многообразий – сомножителей, а координатным отображением карт являются отображения $\varphi_{\hat{a},\hat{b}} = \varphi_{\hat{a}} \times \varphi_{\hat{b}}$.

Таким образом, операция группового умножения на группе Ли задается набором локальных отображений, являющихся представителями отображения Φ на картах многообразия.

Для карт $\mathcal{V}_0\hat{a} \times \mathcal{V}_0\hat{b} \to \mathcal{V}_0\hat{a}\hat{b}$ отображение Φ будет

$${}_{\hat{a}\hat{b}}\Phi_{\hat{a},\hat{b}} = \varphi_{\hat{a}\hat{b}} \circ \Phi \circ \varphi^{-1}_{\hat{a},\hat{b}} \ .$$

Если $\tilde{a} = h_1\hat{a}$ принадлежит окрестности $\mathcal{V}_0\hat{a}$, а $\tilde{b} = h_2\hat{b}$ — окрестности $\mathcal{V}_0\hat{b}$, (элементы $h_1, h_2 \in \mathcal{V}_0$), то $\tilde{c} = \tilde{a}\tilde{b} = h_1\hat{a}h_2\hat{b}$ будет находиться в окрестности $\mathcal{V}_0\hat{a}\hat{b}$ [14].

Нормальные координаты элемента группы $\tilde{c}$ будут определяться следующим образом: $\ln(h_1(\hat{a}\hat{b})(\hat{b}^{-1}h_2\hat{b})(\hat{a}\hat{b})^{-1})$.

Для элементов группы, взятых из единичной окрестности $\mathcal{V}_0$, справедлива формула Кэмпбелла–Бейкера–Хаусдорфа, которая определяет групповое произведение в нормальных координатах. Если воспользоваться этой формулой, то нормальные координаты элемента $\tilde{c}$ можно определить в виде

$$H(\ln(h_1), \ln((\hat{a}\hat{b})(\hat{b}^{-1}h_2\hat{b})(\hat{a}\hat{b})^{-1})) \ ,$$

где символ H означает, что берется произведение Кэмпбелла–Бейкера–Хаусдорфа.

С другой стороны, если $\tilde{c} = h_3\hat{a}\hat{b}$, то, согласно отображению ${}_{\hat{a}\hat{b}}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}$, действующему на картах, мы будем иметь

$$\ln(h_3) = {}_{\hat{a}\hat{b}}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}(\ln h_1, \ln h_2) \ .$$

Если сопоставить правую часть последней формулы с предыдущим выражением, то отображение ${}_{\hat{a}\hat{b}}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}$ можно выразить через формулу произведения Кэмпбелла–Бейкера–Хаусдорфа.

Заметим также, что с помощью такого сопоставления на отображение ${}_{\hat{a}\hat{b}}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}$ переносятся свойства произведения Кэмпбелла–Бейкера–Хаусдорфа.

Действие группы на многообразии в нормальных координатах

Под действием группы Ли $\mathcal{G}$ на многообразии $\mathcal{P}$ понимается отображение многообразий

$$\mathcal{P} \times \mathcal{G} \to \mathcal{P}.$$

Считается, что произведение двух многообразий $\mathcal{P} \times \mathcal{G}$ в данном отображении есть единое многообразие, атлас которого состоит из карт $(U_{A\hat{g}}, \varphi_{A,\hat{g}}) = (U_A \times \mathcal{V}_0\hat{g}, \varphi_A \times \varphi_{\hat{g}})$.

Действие группы Ли на картах многообразия можно задать следующим образом:

$${}_BF_{A,\hat{g}} = \varphi_B \circ F \circ \varphi^{-1}_{A,\hat{g}} \ ,$$

т.е., если под действием элемента g из окрестности $\mathcal{V}_0\hat{g}$, $g = \exp\lambda\hat{g}$ точка p с координатами $Q_{(A)} = \varphi_A(p)$ переходит в точку $\tilde{p} = pg$, которая имеет координаты $\tilde{Q}_{(\tilde{B})} = \varphi(\tilde{p})$, то

$$\tilde{Q}_{(\tilde{B})} = \varphi_{\tilde{B}} F(\varphi_A^{-1}(Q), \varphi_{\hat{g}}^{-1}(\lambda)) = {}_{\tilde{B}}F_{A,\hat{g}}(Q,\lambda)\ .$$

Таким образом, действие группы Ли на многообразии определено набором функций ${}_{\tilde{B}}F_{A,\hat{g}}$.

Отметим важное свойство функции ${}_BF_{A,\hat{g}}$, которое вытекает из ассоциативности действия группы на многообразии $(pg_1)g_2 = p(g_1g_2)$:

$${}_CF_{B,\hat{g}_2}({}_BF_{A,\hat{g}_1}(Q,\lambda_1),\lambda_2) = {}_CF_{A,\hat{g}_1\hat{g}_2}(Q, \Phi_{\hat{g}_1,\hat{g}_2}(\lambda_1,\lambda_2))\ .$$

Вместо функций ${}_BF_{A,\hat{g}}$ также можно использовать и другие функции — ${}_B\tilde{F}_{A,\hat{g}}$:

$${}_B\tilde{F}_{A,\hat{g}} = \varphi_B \circ F \circ (\varphi_A^{-1} \times (\tilde{\varphi}_{\hat{g}})^{-1},$$

для которых

$$\tilde{Q}_B = {}_B\tilde{F}_{A,\hat{g}}(Q_{(A)}, h^\alpha(1,\lambda)_{(\hat{g})}) = {}_B\tilde{F}_{A,\hat{g}}(Q_{(A)}, (\exp\lambda)^\alpha_{(\hat{g})})\ .$$

С.Н.Сторчак.
Применение нормальных координат в задачах факторизации мер континуальных интегралов при редукции динамических систем.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В. Ежела. Технический редактор

Подписано к печати 9.12.2005. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 2.5. Уч.-изд.л. 2,1. Тираж 90. Заказ 25. Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142281, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2005–44, И Ф В Э, 2005