ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2006–28
ОАФ

В.В. Ежела

О КОРРЕКТНОМ ЧИСЛОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ СОВМЕСТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Расширенная и дополненная версия докладов на:
– *XXVIII International Workshop on the Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory: "New physics at Colliders and in Cosmic Rays", July 2005, Protvino, Russia*
– *20^{th} International CODATA Conference: "Scientific Data and Knowledge within the Information Society", October 2006, Beijing, China*

Протвино 2006

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Ежела В.В. **О корректном числовом представлении результатов совместных измерений**: Препринт ИФВЭ 2006–28. – Протвино, 2006. – 25 с., 1 табл., библиогр.: 40.

Представлена подборка примеров вредоносной практики числового выражения и представления результатов совместных измерений (оценок) нескольких случайных величин в научных публикациях, справочниках, учебниках и в авторитетных электронных ресурсах оцененных данных по фундаментальной метрологии и по фундаментальной физике.

Основная причина появления некорректных данных — это отсутствие международного стандарта на числовое выражение и представление результатов совместного измерения нескольких величин и неправомерное использование рекомендаций известного документа ISO GUM, разработанного для случая измерения (оценки) одной величины, вне области его применимости.

Предложены простые количественные параметры обеспечения корректности числового выражения оценок многомерных случайных величин и сформулированы “критерии состоятельности результата” оценки, которые предлагается включить в положения разрабатываемого расширения ISO GUM на многомерный случай.

Abstract

Ezhela V.V. **On the Correct Numerical Expression of the Results of Joint Measurements**: IHEP Preprint 2006–28. – Protvino, 2006. – p. 25, tables 1, refs.: 40.

Collection of the bad practice examples in the expression of results in the joint measurements of several measurands is presented. Examples are extracted from the scientific papers in respectable journals, handbooks, textbooks, and from electronic resources of the evaluated data in fundamental metrology and fundamental physics.

The origin of the appearance of incorrect data is the absence of international standard on the numerical expression and presentation of the results in joint measurements (estimation) of several measurands, and the inadmissable implementation of the famous ISO GUM outside the region if its applicability. Note that ISO GUM is intended for one measurand only.

Simple quantitative parameters to assure the correctness of the numerical expression the results of joint measurements of several measurands are proposed.

The “criteria of the results in joint measurements” is also proposed to be included as a part of the clauses in the expansion of the ISO GUM to several measurands.

Содержание

1. Введение

Существующие стандартные руководства по представлению результатов измерений или оценок физических величин, как правило, детально разработаны только для случая оценки одной величины [1], [2].

К сожалению, вопросы стандартизации представления результатов совместно оцененных физических величин в научно-технической документации, в традиционных и электронных публикациях, в базах данных, по-видимому, не попали еще в сферу неотложной активности фундаментальной и прикладной метрологии [1].

Между тем в исследовательской практике все чаще приходится сталкиваться с совместно оцениваемыми (измеряемыми) величинами [2]. Отсутствие согласованных процедур представления результатов совместно оцененных (измеренных) величин в публикациях иногда приводит к полной потере возможности сравнения результатов оценки одних и тех же величин, полученных в разных экспериментах, из-за неполноты их представления в публикациях.

Напомним, что для корректного количественного представления случайной величины необходима как минимум следующая структура данных: среднее значение и доверительная область или область рассеяния. Для скалярной величины — это среднее значение и интервал, определяемый величиной стандартного отклонения. В случае векторной величины — это вектор средних значений и доверительная область, определяемая по функции плотности распределения вероятностей.

Для m-мерного нормального распределения вероятностей доверительная область — это доверительный эллипсоид, определяемый $m \times m$-матрицей ковариаций или связанными с ней вектором стандартных отклонений и матрицей корреляций. Вот пример такой структуры для двух измерений:

$$\left(\begin{bmatrix}\zeta\\ \eta\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma_\zeta^2 & \sigma_\zeta\sigma_\eta\cdot r_{\zeta\eta}\\ \sigma_\zeta\sigma_\eta\cdot r_{\zeta\eta} & \sigma_\eta^2\end{bmatrix}\right) \Rightarrow \left(\begin{bmatrix}\zeta\pm\sigma_\zeta\\ \eta\pm\sigma_\eta\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & r_{\zeta\eta}\\ r_{\zeta\eta} & 1\end{bmatrix}\right). \tag{1}$$

Перенос стандартов и правил представления результатов оценок (измерений), разработанных для “скалярных” величин, на представление результатов совместных оценок компонент “векторных” величин, как правило, невозможен из-за необходимости оценки не только вариаций, но и ковариаций компонент векторов. Кроме того, появляются еще проблемы согласования числовых представлений разных компонент, связанные с появлением нового объекта оценки — матрицы ковариаций (корреляций) со свойствами симметрии, положительной определенности и с наличием дополнительных обязательных связей: координаты конца вектора средних значений должны принадлежать образу исходной области рассеяния при любых неособенных координатных преобразованиях оценок (и при округлениях).

Стандартные для скалярных величин правила числовых представлений и их преобразований (например, округлений) нельзя применять для средних значений компонент вектора, их стандартных отклонений и коэффициентов корреляций без учета свойств матрицы ковариаций (корреляций).

[1] Следует отметить, однако, что работа по улучшению [1] и обобщению опыта его практического использования началась сразу после его появления см. [4], [5], [6].

[2] Наиболее продвинутой областью в обработке коррелированных данных является, по-видимому, ядерная физика и ядерная технология [32].

Несмотря на очевидность сделанных выше замечаний, в литературе нередки случаи явной “порчи” результатов оценки (измерений) неадекватными формами и неполнотой представления (некорректное округление, сокрытие корреляций, …).

Для иллюстрации рассмотрим простой пример “порчи” данных некорректными представлениями двумерного вектора (x, y), полученного из вектора (ζ, η) простым поворотом на $\pi/4$:

$$\begin{bmatrix}\zeta\\ \eta\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}\sqrt{2}(1.500 \pm 0.100)\\ \sqrt{2}(0.345 \pm 0.001)\end{bmatrix}, r(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix}1.0 & 0.0\\ 0.0 & 1.0\end{bmatrix}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix}x = (\zeta + \eta)/\sqrt{2}\\ y = (\zeta - \eta)/\sqrt{2}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}1.845 \pm 0.100\\ 1.155 \pm 0.100\end{bmatrix}, r(x, y) = \begin{bmatrix}1.0000 & 0.9998\\ 0.9998 & 1.0000\end{bmatrix}\right). \tag{2}$$

Здесь вычисления проведены корректно (с достаточной вычислительной точностью). Ясно, что стандартные правила округления, сформулированные для скалярных величин, в этом примере неприменимы.

- **При округлении коэффициента корреляции матрица корреляций вектора (x, y) становится вырожденной, т.е. изначальная область рассеяния вырождается после поворота и округления в область меньшей размерности, что недопустимо.**

- **Запись значений компонент повернутого вектора, избыточная с точки зрения стандарта записи скалярных чисел с погрешностями, также корректна. Дальнейшее независимое округление недопустимо, так как округление компонент вектора по стандартным для скалярных величин правилам выводит вектор из доверительной области. Например, при первом шаге округления мы получаем вектор отклонения**

  $$\begin{bmatrix}\Delta x/\sigma_x\\ \Delta y/\sigma_y\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}-0.05\\ 0.05\end{bmatrix}, r(x, y) = \begin{bmatrix}1.0000 & 0.9998\\ 0.9998 & 1.0000\end{bmatrix}\right).$$

  Для характеризации степени отклонения удобно использовать квадратичную форму χ^2. Доверительная область в переменных $(\Delta x, \Delta y)$ определяется условием

  $$[\Delta x/\sigma_x, \Delta y/\sigma_y] \cdot \frac{1}{1 - 0.9998^2}\begin{bmatrix}1.0000 & -0.9998\\ -0.9998 & 1.0000\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\Delta x/\sigma_x\\ \Delta y/\sigma_y\end{bmatrix} = \chi^2(\Delta x, \Delta y) \le 1.$$

  Подставляя значения относительных отклонений после первого шага округления, получаем

  $$\chi^2(-0.005, 0.005) = \frac{0.0025}{1.9998 \cdot 0.0002} \cdot [-1, 1] \cdot \begin{bmatrix}1.0000 & -0.9998\\ -0.9998 & 1.0000\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = 25 > 1.$$

  Это значение χ^2 соответствует уходу конца округленного вектора из доверительной области более чем на три “стандартных отклонения”. Если округлять компоненты повернутого вектора сразу до одного десятичного знака $(1.845 \pm 0.100, 1.155 \pm 0.100) \Longrightarrow (1.8 \pm 0.1, 1.2 \pm 0.1)$, то $\chi^2(-0.045, 0.045) = 2025 \gg 1$, что соответствует уходу конца округленного вектора из доверительной области более чем на 30 стандартных отклонений.

- **Нередко в аналогичных ситуациях авторы вычислений ограничиваются только приведением оценок неопределенностей преобразованных компонент, но не приводят и даже не вычисляют ковариации компонент. Из примера видно, что подобное пренебрежение почти полностью разрушает результат измерения.**

Итак, мы убедились, что при представлении и использовании оценок совместно оцененных (измеренных) случайных величин в каждом шаге числовых преобразований оценок необходимо контролировать и обеспечивать полноту и точность вычислений, достаточную для сохранения основных свойств компонент оценок, таких как компактность доверительной области и принадлежность конца преобразованного вектора средних значений наиболее полному образу исходной доверительной области.

В следующем разделе будут представлены примеры небрежного оформления результатов измерений (оценок) в публикациях авторитетных исследовательских организаций, издательств и редакций научно-технической литературы.

2. Примеры некорректных представлений коррелированных данных в исследовательских и метрологических публикациях

Из-за отсутствия общепринятого детального стандарта на представление коррелированных данных в научно-технической документации и явно некорректных установок "авторитетного" и широко используемого руководства (ISO GUM) [1] в литературе часто встречаются всевозможные искажения данных, а иногда, как будет показано далее, и полное разрушение полученных дорогостоящих результатов вследствие необоснованных округлений и неполноты представления данных.

В дальнейшем нам потребуются многократные отсылки на некоторые постановочные утверждения из раздела **0 Introduction** основного документа ISO GUM. Так как это труднодоступный документ, ниже приведены необходимые для нас утверждения из оригинала и его перевода на русский язык, выполненного во ВНИИМ [3], полностью.

0.1 When reporting the result of a measurement of a physical quantity, it is obligatory that some quantitative indication of the quality of the result be given so that those who use it can assess its reliability. Without such an indication, measurement result cannot be compared, either among themselves or with reference values given in a specification or standard. It is therefore necessary that there be a readily implemented, easily understood, and generally accepted procedure for characterizing the quality of a result of a measurement, that is, for evaluating and expressing its *uncertainty*.

0.1 При составлении отчета о результате измерения физической величины необходимо дать какое-либо количественное указание о качестве результата так, чтобы те, кто используют этот результат, могли бы оценить его надежность. Без такого указания измерения нельзя сличать как друг с другом, так и со справочными значениями, данными в спецификации или в стандарте. Поэтому необходимо наличие простой в применении, понятной и общепризнанной методики для характеристики качества результатов измерения, т.е. для оценки и выражения его *неопределенности*.

0.2 The concept of *uncertainty* as a quantifiable attribute is relatively new in the history of measurement, although *error* and *error analysis* have been long a part of the practice of measurement science or metrology. It is now widely recognized that, when all of the known or suspected components of error have been evaluated and the appropriate corrections have been applied, there still remains an uncertainty about the correctness of the stated result, that is, a doubt about how well the result of the measurement represents the value of the quantity being measured.

0.3 Just as the nearly universal use of the International System of Units (SI) has brought coherence to all scientific and technological measurements, a worldwide consensus on the evaluation and expression of uncertainty in measurement would permit the significance of a vast spectrum of a measurement results in science, engineering, commerce, industry, and regulation to be readily understood and properly interpreted. In this era of the global marketplace, it is imperative that the method for evaluating and expressing uncertainty be uniform throughout the world so that measurements performed in different countries can be easily compared.

0.4 The ideal method for evaluating and expressing the uncertainty of the result of a measurement should be:

universal: the method should be applicable to all kinds of measurements and to all types of input data used in measurements.

The actual quantity used to express uncertainty should be:

0.2 Понятие *неопределенности*, как определяемого в количественном отношении атрибута, является относительно новым в истории измерения, хотя термины *погрешность* и *анализ погрешностей* давно используются в практике науки об измерениях или в метрологии. Сейчас общепризнанно, что, когда все известные или предполагаемые компоненты погрешности оценены и внесены соответствующие поправки, все еще остается неопределенность относительно истинности указанного результата, т.е. сомнение в том, насколько точно результат измерения представляет значение измеряемой величины.

0.3 Так же, как Международная система единиц (СИ), будучи системой практически универсального использования, привнесла согласованность во все научные и технологические измерения, всемирное единство в оценке и выражении неопределенности измерения обеспечило бы должное понимание и правильное использование широкого спектра результатов измерений в науке, технике, торговле, промышленности и регулирующих актах. В эру глобального рынка настоятельно необходимо, чтобы метод для оценки и выражения неопределенности был единым во всем мире так, чтобы измерения, проводимые в разных странах, можно было легко сличать.

0.4 Идеальный метод для оценки и выражения неопределенности результатов измерения должен быть:

универсальным: метод должен быть применим ко всем типам входящих данных, используемых в измерениях;

Величина, непосредственно используемая для выражения неопределенности, должна быть:

internally consistent: it should be directly derivable from the components that contribute to it, as well as independent of how these components are grouped and of the decomposition of the components into subcomponents;

transferable: it should be possible to use directly the uncertainty evaluated for one result as a component in evaluating the uncertainty of another measurement in which the first result is used. ...

ISO GUM [1], p. vii

внутренне согласующейся: она должна непосредственно выводиться из компонентов, составляющих ее, а также быть независимой от того, как эти компоненты группируются, и от деления компонентов на подкомпоненты;

допускающей передачу: должна существовать возможность непосредственного использования неопределенности, оцененной для одного результата, как составляющей при оценке неопределенности другого измерения, в котором используется первый результат. ...

ISO GUM (перевод ВНИИМ)[3], с. vi-vii

Эти утверждения можно отнести к общим требованиям состоятельности процесса познания и освоения физической действительности. Они вытекают из структуры формализованного коллективного (явного) знания, составляют основу **критерия результата** решения задачи измерения (оценки) физических величин и должны лежать в основе языка описания и передачи физических знаний в научно-технической сфере.

Детальное раскрытие этих общих требований в документе должно было стать основой фокусирования усилий экспертов метрологов и практикующих физиков на формирование стандартных методик проведения измерений (оценок) и представления результатов в традиционной и электронной формах. Вот пример такой более детальной рекомендации из раздела **7 Reporting uncertainty** руководства ISO GUM.

7.1.4 Although in practice the amount of information necessary to document a measurement result depends on its intended use, the basic principle of what is required remains unchanged: when reporting the result of a measurement and its uncertainty, it is preferable to err on the side of providing too much information rather than too little. For example, one should

a) describe clearly the methods used to calculate the measurement result and the uncertainty from the experimental observations and input data;

7.1.4 Хотя на практике количество информации, необходимое для того, чтобы задокументировать результат измерения, зависит от его предполагаемого использования, основной принцип назначения требований к ним остается неизменным: при составлении отчета о результате измерения и его неопределенности лучше дать слишком много информации, чем слишком мало. Например, следует

a) ясно описать методы, используемые для вычисления результата измерения и его неопределенности из экспериментальных наблюдений и входных данных;

b) list all uncertainty components and document fully how they were evaluated;

c) present data analysis in such a way that each of its important steps can be readily followed and the calculation of the reported results can be independently repeated if necessary;

d) give all corrections and constants used in the analysis and their sources.

A test of the foregoing list is to ask oneself "Have I provided enough information in a sufficiently clear manner that my result can be updated in the future if new information or data become available?"

ISO GUM [1], p. 25

b) перечислить все составляющие неопределенности и полностью задокументировать, как они оценивались;

c) представить анализ данных таким образом, чтобы можно было легко следовать всем его важным этапам и в случае необходимости независимо повторить вычисление сообщаемого результата;

d) дать все поправки и константы, используемые в анализе, и их источники.

Для того чтобы проверить приведенный выше список, нужно спросить себя: "Дал ли я достаточно информации в достаточно ясном виде для того, чтобы мой результат можно было улучшить в будущем, если появится новая информация или новые данные?"

ISO GUM (перевод ВНИИМ) [3], с.27

Руководство ISO GUM существует более десяти лет, а соответствующих общепринятых методик представления результатов все еще нет. Нет и согласованных научными издательствами и редакциями журналов правил представления экспериментальных (измерительных) данных в публикациях, т.е. правил, гарантирующих качество представления экспериментальных знаний в публикациях на уровне требований **0.0.1–0.0.4, 7.1.4** ISO GUM.

По-видимому, это отчасти связано с тем, что ISO GUM еще весьма сырой документ [3], особенно в подразделах представления результатов совместных измерений нескольких величин, где присутствуют рекомендации, противоречащие здравому смыслу и математике. Для конкретности эти рекомендации приведены ниже полностью.

7.2.5 If a measurement determines simultaneously more than one measurand, that is, if it provides two or more output estimates y_i (see H.2, H.3, and H.4), then, in addition to giving y_i and $u_c(y_i)$, give the covariance matrix element $u(y_i, y_j)$ or the element $r(y_i, y_j)$ of the **correlation coefficient matrix** (C.3.6, note 2) (and preferably both).

7.2.5 Если процедура измерения определяет одновременно более одной измеряемой величины, т.е. если она дает значения двух или более выходных оценок y_i (смотри H.2, H.3 и H.4), то кроме y_i и $u_c(y_i)$ для каждой нужно дать элементы ковариационной матрицы $u(y_i, y_j)$ или элементы $r(y_i, y_j)$ **матрицы корреляции** (C.3.6, Примечание 2), а лучше и те, и другие.

[3] Обсуждения необходимости критического рассмотрения положений ISO GUM для выявления путей согласования их с аналогичными положениями российской нормативной метрологической документации продолжаются с 1994 года [7], [8], [9].

7.2.6 The numerical values of the estimates y and its standard uncertainty $u_c(y)$ or expanded uncertainty U should not be given with an excessive number of digits. It usually suffices to quote $u_c(y)$ [as well as the standard uncertainty $u(x_i)$ of the input estimates x_i] to at most two significant digits, although in some cases it may be necessary to retain additional digits to avoid round-off errors in subsequent calculations.

In reporting final results it may sometimes be appropriate to round uncertainties up rather than to the nearest digit. For example, $u_c(y) = 10.47\ m\Omega$ might be rounded to 11 $m\Omega$. However, common sense should prevail and a value such as $u_c(y) = 28.05$ kHz should be rounded down to 28 kHz. Output and input estimates should be rounded to be consistent with their uncertainties; for example, if $y = 10.05762\ \Omega$ with $u_c(y) = 27\ m\Omega$, y should be rounded to 10.058 Ω. Correlation coefficients should be given with three-digit accuracy if their absolute values are near unity.

ISO GUM [1], p. 26-27

7.2.6 Численные значения оценки y и ее стандартной неопределенности $u_c(y)$ или расширенной неопределенности U не следует давать с избыточным числом цифр. Обычно достаточно привести $u_c(y)$ и U (а также стандартной неопределенности $u(x_i)$ входных оценок x_i) от силы с двумя значащими цифрами, хотя в некоторых случаях может быть необходимо сохранить дополнительные цифры для того, чтобы избежать погрешностей округления в последующих расчетах.

При сообщении окончательных результатов иногда может быть уместным округлить неопределенности в сторону увеличения, а не до ближайшей цифры. Например, $u_c(y) = 10.47$ мОм можно округлить до 11 мОм. Однако здравый смысл должен возобладать, и значение, такое как $u_c(y) = 28.05$ кГц, следует округлить до 28 кГц. Выходные и входные оценки должны округляться так, чтобы соответствовать своим неопределенностям; например, если $y = 10.05762$ Ом с $u_c(y) = 27$ мОм, то y следует округлить до 10.058 Ом. Коэффициенты корреляции должны даваться с точностью до третьей цифры, если их абсолютные значения близки к единице.

ISO GUM (перевод ВНИИМ) [3], с. 29

2.1. Некорректное представление в ISO GUM

Ясно, что рекомендации ISO GUM по числовому представлению коррелированных данных не применимы уже для простого случая поворота вектора, рассмотренного во введении. Применение рекомендаций **7.2.6** в примерах H.2 раздела **Annex H: Examples** руководства ISO GUM также показывает их явную несостоятельность. В самом деле, приведенная в таблицах H.3 и H.4 матрица корреляций в соответствии с рекомендацией **7.2.6** представлена с тремя десятичными знаками справа от десятичной точки

$$\begin{bmatrix} 1. & -0.588 & -0.485 \\ -0.588 & 1. & 0.993 \\ -0.485 & 0.993 & 1. \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Собственные числа этой матрицы [2.403 740 76, 0.596 712 77, −0.000 453 53], т.е. она испорчена округлением по правилу **7.2.6**.

Правильная матрица, вычисленная по данным таблицы H.2 с 16 десятичными знаками, имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1. & -0.588\,276\,855\,797\,0084 & -0.485\,064\,613\,663\,1822 \\ -0.588\,276\,855\,797\,0084 & 1. & 0.992\,507\,542\,132\,0323 \\ -0.485\,064\,613\,663\,1822 & 0.992\,507\,542\,132\,0323 & 1. \end{bmatrix},$$

ее собственные значения все положительные, как и должно быть у матрицы корреляций по ее определению:

$$2.403\,564\,371\,235\,8685, \quad 0.596\,435\,606\,493034, \quad 2.227\,109\,758\,149\,771 \times 10^{-8}.$$

Согласно оценке минимального числа десятичных знаков справа от десятичной точки в матричных элементах положительно определенной матрицы корреляций, гарантирующего положительную определенность округленной матрицы, мы можем представить вычисленную матрицу в более обозримом виде:

$$\begin{bmatrix} 1. & -0.588\,276\,86 & -0.485\,064\,61 \\ -0.588\,276\,86 & 1. & 0.992\,507\,54 \\ -0.485\,064\,61 & 0.992\,507\,54 & 1. \end{bmatrix}.$$

Замечание. Отметим непоследовательность в логике изложения материала в ISO GUM. С одной стороны, в тексте есть предостережение о том, что документ применим только для случая числового представления одной случайной величины, а с другой, при обсуждении методики оценки погрешности одной случайной величины, но зависящей от нескольких других случайных величин, мы с неизбежностью сталкиваемся с проблемой корректности числового выражения нескольких совместно измеренных (оцененных) величин. К сожалению, нелепость рекомендаций 7.2.6 ISO GUM по округлению матричных элементов матрицы корреляций, как и недопустимое искажение матрицы корреляций в примере H.2 остались незамеченными в метрологическом сообществе. Они воспроизводятся в других метрологических нормативных документах (см. [2], [3]), в недавнем обзоре “передовой практики” [29] (см. стр. 20), используются в публикациях, в монографиях и учебниках (см. следующие подразделы и, например, учебник [10] стр. 128–129).

2.2. Эксперимент CLEO в Physical Review

В работе [11] сотрудничества CLEO представлены результаты по измерениям нескольких относительных вероятностей распадов τ-лептона. “Поправленная” матрица корреляций погрешностей, приведенная в Erratum, имеет следующий вид:

TABLE XII. Correlation coefficients between branching fraction measurements.

$\boldsymbol{C_\tau}$	B_e	B_μ	B_h	B_μ/B_e	B_h/B_e
B_e	1.00	0.50	0.48	−0.42	−0.39
B_μ		1.00	0.50	0.58	0.08
B_h			1.00	0.07	0.63
B_μ/B_e				1.00	0.45
B_h/B_e					1.00

Собственные значения этой матрицы (2.1735, 1.7819, 1.0550, −0.0075, −0.0028) явно противоречат требованию положительной определенности матрицы корреляций.

2.3. Эксперимент CERN-LEP-DELPHI в European Physical Journal

Представленные в [12] результаты эксперимента по измерению относительных вероятностей распадов

$$B_1(\tau^- \to h^-\, neutrals), \quad B_3(\tau^- \to h^+\, 2h^-\, neutrals), \quad B_5(\tau^- \to 2h^+\, 3h^-\, neutrals)$$

можно собрать из текста статьи в структуру (см. [12] стр. 636 и Table 6.):

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_5 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0.85316 \pm 0.000929_{stat} \pm 0.000492_{syst} \\ 0.14569 \pm 0.000929_{stat} \pm 0.000477_{syst} \\ 0.00115 \pm 0.000126_{stat} \pm 0.000059_{syst} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.00 & -0.98 & -0.08 \\ -0.98 & 1.00 & -0.08 \\ -0.08 & -0.08 & 1.00 \end{bmatrix} \right), \tag{4}$$

в которой матрица корреляций — это матрица корреляций полных погрешностей (статистических и систематических). В приведенных выше примерах (2) и (3) показано, что округление матричных элементов матрицы корреляций — это опасное преобразование, особенно когда присутствуют большие (близкие к 1 по абсолютной величине) их значения. Полный коррелятор, представленный в публикации, округлен до двух знаков (см. (4)), это настораживает. Кроме того, в тексте статистические и систематические погрешности приведены отдельно (4), а как получена приведенная в [12] на стр. 636 "полная" матрица корреляций, в статье не сообщается. Попытки согласовать данные, приведенные в разных разделах статьи, оказались безуспешными из-за сокрытия авторами деталей преобразований числовых выражений результатов. Опишем процедуры, использованные при попытке получить самосогласованное представление результатов, некорректно представленных в [12]. Будем использовать данные из [12], представленные там на стр. 63 и в таблице (Table 6):

$(Source\, of\, systematic)_i$	$\sigma_i(B_1) \times 10^6$	$\sigma_i(B_3) \times 10^6$	$\sigma_i(B_5) \times 10^6$
1 Dilepton background	110	-109	-1
2 Cosmic ray background	5	-5	1
3 Four fermin background	42	-41	-1
4 $Z \to \bar{q}q$ background	25	-24	-1
5 Neural Network $\bar{q}q$ rejection	50	-48	-5
6 Tracking	157	-152	-16
7 VD efficiency	55	-60	6
8 Conversions	126	-121	-8
9 Inelasic Nucl. reinteractons	90	-80	-10
10 Elastic Nucl. reinteractions	24	-24	-2
11 Electron identification	104	-97	-7
12 δ-ray weights	8	-8	1
13 K_S regeneration	5	-5	1
14 Exclusive BRs	228	-204	-44
15 3-prong decay modelling	116	-121	10
16 Trigger	15	-15	1
17 E and p scales	19	-20	1
18 τ polarization	18	-19	1
19 Simulation statistics	310	-310	31
Total systematic	492	477	59
Statistical	929	929	126

Матрица систематических ковариаций статистического происхождения (неопределенности типа A, см. [1], [2]) вычисляется как матрица Грама векторов $\vec{\sigma}(B_1)$,$\vec{\sigma}(B_3)$,$\vec{\sigma}(B_5)$ – вкладов от источников в систематические ковариации наблюдаемых величин (см. также монографию [13] стр. 180, формулы (8.53)–(8.56) и стр. 277, формулы (12.10), (12.11)). На практике "из экономических" соображений так вычисляют систематические ковариации от всех источников (включая и погрешности типа Б). Поступая как "на практике", получаем:

$$Cov_{ij}^{syst} = \vec{\sigma}(B_i) \cdot \vec{\sigma}(B_j) = \begin{bmatrix} 2.42595 \times 10^{-7} & -2.34695 \times 10^{-7} & -4.485 \times 10^{-9} \\ -2.34695 \times 10^{-7} & 2.27629 \times 10^{-7} & 3.065 \times 10^{-9} \\ -4.485 \times 10^{-9} & 3.065 \times 10^{-9} & 3.54 \times 10^{-9} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Соответствующие вектор стандартных отклонений и матрица корреляций имеют вид

$$\begin{bmatrix} 0.000492539 \\ 0.000477105 \\ 0.000059498 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1. & -0.998732 & -0.153045 \\ -0.998732 & 1. & 0.107973 \\ -0.153045 & 0.107973 & 1. \end{bmatrix}.$$

Отметим, что округление матричных элементов полученной матрицы корреляций, когда оставляют только три знака справа от десятичной точки, как рекомендовано в ISO GUM.7.2.6, недопустимо, так как это приведет к разрушению положительной определенности округленной матрицы.

По данным структуры (4) построим полную матрицу ковариаций и, вычитая из нее матрицу (5), получаем вариант статистической матрицы ковариаций, все собственные числа которой положительные $(1.70453 \times 10^{-6}, 3.449919 \times 10^{-8}, 2.93866 \times 10^{-9})$.

Однако статистическая матрица ковариаций должна быть вырожденной матрицей по построению процедуры оценивания. Она строится как ковариационная матрица трех наблюдаемых B_1, $B_3 = 1 - B_1 - B_5$, B_5, линейно зависящих от двух коррелированных наблюдаемых B_1, B_5.

Таким образом, имеется явное противоречие в представленных данных. Мы видим три причины, которые могли бы привести к такой ситуации: авторское искажение данных при подготовке текста публикации; опечатки в журнале; наша неверная интерпретация текста статьи.

Есть возможность оценить статистическую матрицу ковариаций по-другому, воспользовавшись оценками (4) статистических погрешностей и уравнением связи.

Из уравнения связи $B_3 = 1 - B_1 - B_5$ вариация $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_5^2 + 2\sigma_1\sigma_5 r_{stat}(B_1, B_5)$, откуда теперь можно получить скрытый авторами коэффициент корреляции $r_{stat}(B_1, B_5)$ и построить "правильную" матрицу статистических ковариаций, которая вырождена, как легко проверить:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & -(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_5^2)/2 & (\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_5^2)/2 \\ -(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_5^2)/2 & \sigma_3^2 & -(\sigma_3^2 + \sigma_5^2 - \sigma_1^2)/2 \\ (\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_5^2)/2 & -(\sigma_3^2 + \sigma_5^2 - \sigma_1^2)/2 & \sigma_5^2 \end{bmatrix},$$

и ее числовое представление

$$\begin{bmatrix} 8.63041 \times 10^{-7} & -8.55103 \times 10^{-7} & -7.938 \times 10^{-9} \\ -8.55103 \times 10^{-7} & 8.63041 \times 10^{-7} & -7.938 \times 10^{-9} \\ -7.938 \times 10^{-9} & -7.938 \times 10^{-9} & 1.5876 \times 10^{-8} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Собственные числа этой матрицы $(1.718144 \times 10^{-6}, 2.3814 \times 10^{-8}, 1.2 \times 10^{-22})$, последнее из которых следует считать нулевым (машинный ноль). Теперь мы можем получить "правильную" комбинированную матрицу ковариаций и сравнить ее с представленной в публикации и в выражении (4):

$$\begin{bmatrix} 1. & -0.9924148111607243 & -0.08478919616844724 \\ -0.9924148111607243 & 1. & -0.03348650681292892 \\ -0.08478919616844724 & -0.03348650681292892 & 1. \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Собственные числа ее $\{1.993743788696688, 1.0056742957244327, 0.0005819155788786556\}$.

Согласно оценке минимального числа десятичных знаков справа от десятичной точки, в матричных элементах положительно определенной матрицы корреляций, гарантирующего положительную определенность округленной матрицы [22] (см. раздел 4.), можно представить матрицу (7) в более обозримом виде:

$$\begin{bmatrix} 1. & -0.9924 & -0.0848 \\ -0.9924 & 1. & -0.0335 \\ -0.0848 & -0.0335 & 1. \end{bmatrix}. \tag{8}$$

При этом минимальное число десятичных знаков справа от десятичной точки, гарантирующее сохранение конца округленного вектора внутри области рассеяния, равно 5.

Попытки получить корректное числовое представление результатов от авторов также не привели к успеху. Корректные числовые результаты, на которых основана публикация, по-видимому, утеряны навсегда.

2.4. Некорректное представление данных по фундаментальным физическим постоянным в Reviews of Modern Physics и в авторитетных перепечатках

Рассмотрим теперь примеры некорректного представления данных по фундаментальным постоянным на примере выборки избранных постоянных из последних трех последовательных переоценок.

Все три матрицы корреляций представлены в табл. 1 в соответствии с рекомендацией 7.2.6 в ISO GUM с тремя десятичными знаками, которых явно недостаточно, так как такое округление привело к потере их положительной полуопределенности.

Наборы собственных чисел, приведенных в этой таблице матриц, содержат отрицательные собственные значения, далеко отстоящие от "машинного нуля" $\sim 10^{-17}$:

$$\begin{array}{ll} CODATA: 1986 & \{2.99891,\ 1.00084,\ \ \ 0.000420779,\ -0.000172106\}; \\ CODATA: 1998 & \{2.99029,\ 1.01003,\ -0.000441572,\ \ \ 0.00012358\}; \\ CODATA: 2002 & \{2.99802,\ 1.00173,\ \ \ 0.000434393,\ -0.000183906\}. \end{array}$$

Замечание. В мае 2005 г. на сайте NIST раскрыта новая версия набора фундаментальных физических постоянных (v.4.2).

В версии 4.2 устранены обнаруженные в версии 4.0 опечатки и впервые раскрыты все файлы с оцененными данными для так называемых базовых постоянных в виде, пригодном для компьютерных вычислений.

Данные, содержащиеся в машиночитаемых файлах, приведены с исчерпывающей полнотой, свободны от представленной в [22] критики предыдущих версий, и их можно и нужно использовать для высокоточных вычислений.

Таблица 1. Сравнение значений избранных постоянных, рекомендованных CODATA в 1986 г. [14], 1998 г. [15] и 2002 г. версия 4.0 [16].

CODATA:1986	Symbol [units]	Value (uncertainty)×scale	Correlations		
Elementary charge	e [C]	$1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19}$	e	h	m_e
Plank constant	h [J s]	$6.626\,075\,5(40) \times 10^{-34}$	0.997		
Electron mass	m_e [kg]	$9.109\,389\,7(54) \times 10^{-31}$	0.975	0.989	
$1/\alpha(0)$	$\alpha(0)^{-1}$	$137.035\,989\,5(61)$	−0.226	−0.154	−0.005

CODATA:1998	Symbol [units]	Value (uncertainty)×scale	Correlations		
Elementary charge	e [C]	$1.602\,176\,462(63) \times 10^{-19}$	e	h	m_e
Plank constant	h [J s]	$6.626\,068\,76(52) \times 10^{-34}$	0.999		
Electron mass	m_e [kg]	$9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31}$	0.990	0.996	
$1/\alpha(0)$	$\alpha(0)^{-1}$	$137.035\,999\,76(50)$	−0.049	−0.002	0.092

CODATA:2002	Symbol [units]	Value (uncertainty)×scale	Correlations		
Elementary charge	e [C]	$1.602\,176\,53(14) \times 10^{-19}$	e	h	m_e
Plank constant	h [J s]	$6.626\,0693(11) \times 10^{-34}$	1.000		
Electron mass	m_e [kg]	$9.109\,3826(16) \times 10^{-31}$	0.998	0.999	
$1/\alpha(0)$	$\alpha(0)^{-1}$	$137.035\,999\,11(46)$	−0.029	−0.010	0.029

Предостережение.

Обратим внимание на исторически сложившуюся парадоксальную ситуацию с сопровождением оценок фундаментальных физических постоянных (ФФП). Оказывается, что сопровождением оценок и их согласованием профессионально занимаются только в NIST (USA), и нет ни одной другой (открытой) организации, которая проводила бы независимую работу по полномасштабной оценке и согласованию физических постоянных и могла бы сравнивать полученные результаты с оценками NIST.

Все национальные метрологические службы безоговорочно воспринимали рекомендации CODATA и перепечатывали таблицы NIST без внимательного критического анализа результатов и методики их получения.

Так, например, в СССР и в России поверка таблиц ФФП, производимых NIST, и сертификация их для использования в научно-технической сфере и в образовании никогда не проводилась национальными метрологическими организациями. Все российские справочники и учебники воспроизводят испорченные переокруглением данные о ФФП из публикаций NIST разных лет.

Почти во всех авторитетных изданиях перепечатки данных NIST приводятся без предостерегающих комментариев о наличии больших корреляций погрешностей (см. [17], [18], [19], [20], [21]).

3. Критерий состоятельности результата совместной оценки нескольких физических величин

3.1. Безопасное совместное округление

В приведенных выше примерах показано, что перенос стандартных правил числового представления результатов измерения одной величины на случай совместного измерения нескольких величин нередко приводит к разрушению результата. Этого можно избежать, если следовать правилам безопасного округления оценок многомерных случайных величин — **не переходить порогов равномерных округлений.**

В этом разделе воспроизводится (см. [22]) построение оценок минимального числа десятичных знаков справа от десятичной точки (порогов округлений), которые с необходимостью должны сохраняться в числовых представлениях совместно измеренных (оцененных) случайных величин. Для этого нам понадобятся несколько математических утверждений из теории матриц.

Теорема Вейля (см. [23] стр. 103 и [25] стр.218):
Пусть $C = A + B$, где $A, B, C \in R^{n\times n}$ — симметрические матрицы и $(\alpha_1 \leq \alpha_2 \cdots \leq \alpha_n)$, $(\beta_1 \leq \beta_2 \cdots \leq \beta_n)$, $(\gamma_1 \leq \gamma_2 \cdots \leq \gamma_n)$ — их собственные числа соответственно.
Тогда $\forall i$ имеют место неравенства

$$\alpha_i + \beta_{min} \leq \gamma_i \leq \alpha_i + \beta_{max}. \tag{9}$$

Теорема Гершгорина (см. [23] стр. 247, [24] стр. 390 и [25] стр. 413):
Каждое собственное число α_i матрицы A всегда расположено в одном из кругов

$$|a_{ii} - \alpha_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i\neq j}|. \tag{10}$$

Теорема Шура (см. [25] стр. 231):
Пусть матрица $B \in R^{n\times n}$ симметрична, значения её диагональных элементов $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ (в любом порядке) и собственные числа $\beta_1 \leq \beta_2 \cdots \leq \beta_n$, тогда $\forall k \leq n$

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i \ , \tag{11}$$

причем равенство имеет место только при $k = n$.

Используя утверждения этих теорем, мы увидим, как простые и естественные требования к качеству числового представления результатов измерений приводят к правилам формирования корректных числовых представлений результатов совместных измерений нескольких величин.

Рассмотрим сначала проблему безопасного округления представлений оценок нескольких совместно измеренных или оцененных величин x_i: средних значений $\langle x_i\rangle$, их погрешностей u_i, и корреляций r_{ij} десятичными числами с достаточной точностью.

Пусть $\{\langle x_i\rangle,\, u_i,\, r_{ij},\, N^r_{dig}\}$, $i,j = 1,\ldots,n$ — список десятичных чисел, представляющих результаты совместного измерения или оценки n физических величин, где:

$\langle x_i\rangle$ — вещественное среднее значение i-той наблюдаемой в десятичном представлении;

u_i — погрешность среднего значения, представленная положительным числом в десятичном представлении;

r_{ij} — вещественная, симметричная и положительно определенная матрица в десятичном представлении со свойствами

$$r_{ii} = 1 \quad \forall\, i = 1,\ldots,n, \qquad |r_{i\neq j}| < 1.0\ ;$$

N^r_{dig} — целое неотрицательное число, характеризующее единую десятичную точность представления недиагональных матричных элементов матрицы корреляций r_{ij}.

Это список минимального набора характеристик для содержательного количественного описания случайной векторной величины $\{x_i\}$ и ее области рассеяния, определяемой "радиусом доверительности" $R_{g,CL}$ для совместного распределения плотности вероятности g при уровне доверительности CL

$$\sum_{ij}^{n} \frac{x_i - \langle x_i\rangle}{u_i} \cdot r^{-1}_{ij} \cdot \frac{x_j - \langle x_j\rangle}{u_j} < R^2_{g,CL}. \tag{12}$$

В случае, когда g неизвестна, а матрица вторых моментов известна, используется эллипсоид рассеяния Крамера с $R^2 = n+2$ (см. [27] стр. 80–81, [28] стр. 102)

Введение дополнительного элемента элемента N^r_{dig} в традиционную структуру данных продиктовано необходимостью обеспечения гарантии качества данных и его сохранения при обменах и преобразованиях. Оценка этой дополнительной характеристики получается из требования ограниченности области рассеяния (положительной определенности матрицы корреляций).

Рассмотрим две структуры $D = \{\langle x_i\rangle,\, u_i,\, r_{ij}, N^r_{dig}\}$ и $D^* = \{\langle x_i\rangle^*,\, u^*_i,\, r^*_{ij}, N^{r,*}_{dig}\}$, полученную из D "равномерным" округлением: $N^r_{dig} \to N^{r,*}_{dig} < N^r_{dig}$.
Пусть R_{ij} — вещественная матрица "округлятор" недиагональных матричных элементов матрицы r_{ij}, т.е. матрица, добавление которой к матрице r_{ij} приведет к матрице $r^*_{ij} = r_{ij} + R_{ij}$ с сохранением всех свойств матрицы корреляций: симметрии, положительной определенности, все $|r^*_{i\neq j}| < 1$ десятичные числа с $N^{r,*}_{dig}$ знаками справа от десятичной точки.

Матрица R_{ij} имеет свойства

$$R_{ii} = 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n; \qquad |R_{i\neq j}| \leq 5.0 \times 10^{-N^{r,*}_{dig}-1}. \tag{13}$$

Пусть далее $c_1 \leq \cdots \leq c_n$, $\rho_1 \leq \cdots \leq \rho_n$, и $c^*_1 \leq \cdots \leq c^*_n$ представляют упорядоченные наборы собственных чисел матриц r_{ij}, R_{ij} и r^*_{ij} соответственно. Тогда по теореме Вейля (9) $\forall l = 1,\ldots,n$ мы будем иметь $c_l + \rho_1 \leq c^*_l \leq c_l + \rho_n$.

По теореме Гершгорина (10)

$$\rho_1 \geq -(n-1)\cdot 5 \cdot 10^{-(N^{r,*}_{dig}+1)} = -\frac{(n-1)}{2} \cdot 10^{-N^{r,*}_{dig}}\ ,$$

и, следовательно, для обеспечения положительной определенности r^*_{ij} достаточно потребовать выполнения условия

$$0 < c_1 - \frac{(n-1)}{2} \cdot 10^{-N^{r,*}_{dig}} \leq c^*_1\ .$$

Из левого неравенства получаем окончательную оценку минимального числа десятичных знаков справа от десятичной точки в представлении недиагональных матричных элементов положительно определенной матрицы корреляций r_{ij} с минимальным собственным числом $c_1 = \lambda^r_{min}$

$$\boldsymbol{N^{r,*}_{dig} \geq N^{r,th}_{dig} = \left\lceil \log_{10}\left(\frac{n-1}{2\cdot\lambda^r_{min}}\right)\right\rceil.} \tag{14}$$

Замечание. Согласно утверждениям теорем Вейля (9), Гершгорина (10) и Шура (11), любое округление недиагональных матричных элементов положительно полуопределенной матрицы корреляций недопустимо, так как при любом округлении вырожденной матрицы корреляций у округленной матрицы появляются отрицательные собственные значения.

В самом деле, так как матрица округлятор является эрмитовой матрицей с нулевой главной диагональю, то по неравенствам (11) она имеет отрицательное минимальное собственное значение. Далее, по левому неравенству (9) минимальное собственное число у матрицы, полученной округлением недиагональных элементов вырожденной матрицы корреляций, с неизбежностью будет отрицательным.

Итак, мы видим, что требование положительной определенности матрицы корреляций накладывает ограничения на свободу выбора точности представления матричных элементов округленной матрицы корреляций десятичными числами.

Минимальное количество десятичных знаков справа от десятичной точки в представлении матричных элементов положительно определенной матрицы корреляций определяется ее минимальным собственным числом по формуле (14) [4].

Убедимся теперь, что аналогичное ограничение свободы округления десятичных представлений средних значений $\langle x_i\rangle$ и стандартных погрешностей u_i тоже определяется минимальным собственным числом матрицы корреляций.

Пусть x^R_i — "округляющий" вектор

$$|x^R_i|[unit_i] \leq 5\cdot 10^{-(N^x_{dig,i}+1)}[unit_i] \tag{15}$$

такой, что получаемый округленный вектор $\langle x_i\rangle^* = \langle x_i\rangle + x^R_i$ лежит внутри исходного эллипсоида рассеяния, определяемого неокругленной матрицей корреляций (12)

$$\sum_{ij}^{n} \frac{x^R_i}{u_i}\cdot[r^{-1}]_{ij}\cdot\frac{x^R_j}{u_j} < R^2_{g,CL}\ . \tag{16}$$

В базисе из собственных векторов исходного коррелятора r_{ij} выражение (16) преобразуем к

$$\sum_{ij}^{n}\sum_{lm}^{n} \frac{x^R_i}{u_i}\cdot[L^{-1}]_{il}\cdot\frac{\delta_{lm}}{\lambda_m}\cdot[L]_{mj}\cdot\frac{x^R_j}{u_j} < R^2_{g,CL}, \tag{17}$$

где L — матрица поворота, а λ_m — собственные числа коррелятора.

[4] Эта оценка в других терминах и ряд других аналогичных оценок получены недавно в работе [26].

Так как мы ищем достаточные условия принадлежности округленного вектора средних значений к исходной области рассеяния (17), то нам достаточно потребовать справедливость неравенства, полученного из (17), заменой всех собственных значений коррелятора на минимальное. Тогда неравенство (17) перейдет в следующее неравенство:

$$\sum_{i}^{n} \left(\frac{x_i^R}{u_i} \right)^2 < (R_{g,CL}^2) \lambda_{min}^r \ . \tag{18}$$

Неравенство (18) означает, что мы можем независимо округлять компоненты вектора средних значений только внутри гиперкуба, "вписанного" в исходный эллипсоид рассеяния:

$$\frac{|x_i^R|}{u_i} < \sqrt{\frac{(R_{g,CL}^2) \cdot \lambda_{min}^r}{n}} \ . \tag{19}$$

Подставляя в неравенство (19) ограничения на компоненты округляющего вектора (15), после несложных преобразований получаем достаточную оценку на минимальные числа $N_{dig,i}^x$ десятичных знаков справа от десятичной точки в представлении округленного вектора средних значений, при которых конец округленного вектора средних значений лежит внутри исходного эллипсоида рассеяния:

$$\boldsymbol{N_{dig,i}^x > \left\lceil \frac{1}{2} \log_{10} \left(\frac{n}{4 \cdot (R_{g,CL}^2) \cdot \lambda_{min}^r \cdot (u_i/[unit_i])^2} \right) \right\rceil} \ . \tag{20}$$

В соответствии с общепринятой практикой и с рекомендациями 7.2.2, 7.2.4 ISO GUM [1], что число десятичных знаков справа от десятичной точки в числовом представлении среднего значения и стандартной неопределенности u_i должно быть одним и тем же, мы полагаем

$$N_{dig,i}^u = N_{dig,i}^x, \quad \forall i = 1, \ldots, n \ . \tag{21}$$

Таким образом, мы видим, что независимое равномерное округление чисел в структуре $\{\langle x_i \rangle,\, u_i,\, r_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, представляющей результаты совместного измерения (оценки) n случайных величин, допустимо только с соблюдением ограничений, накладываемых требованием компактности "округленной" области рассеяния и принадлежности конца округленного вектора средних значений к "округляемой" области рассеяния (определяемой исходной матрицей корреляций).

Как показано выше, выполнение этих требований гарантируется специальным выбором точностей представления чисел структуры. Критические точности определяются минимальным собственным числом матрицы корреляций округляемой структуры и вычисляются по простым правилам (14), (20), (21).

3.2. Критерий состоятельности результата совместной оценки

В случае совместного измерения или оценки нескольких случайных величин с нормальной совместной функцией распределения для содержательного количественного представления результата необходима структура $\{\langle x_i\rangle,\, u(x_i),\, r(x_i, x_j)\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, которую предлагается расширить до структуры

$$\{\{\langle x_i\rangle,\, u(x_i),\, N^x_{dig,i}\}, \{r(x_i, x_j), N^{r,th}_{dig}\}\}, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{22}$$

и использовать как стандарт для числового представления результатов коррелированных измерений (оценок). Такое расширение необходимо как средство гарантии качества результата и как средство информирования пользователей о необходимой точности данных для хранения и обмена между вычислительными процедурами.

В самом деле, для формирования структуры данных (22) потребуются:

- вычисление матричных элементов матрицы корреляций с вычислительной точностью, достаточной для обеспечения ее положительной определенности и для вычисления соответствующей пороговой точности округлений $N^{r,th}_{dig}$;
- вычисление средних значений и их стандартных отклонений с точностями не менее пороговых $N^x_{dig,i}$.

4. Неизбежность нелинейных приближений в процедурах переноса погрешностей в многомерном случае

В этом разделе будет показано, что проблема корректного числового представления коррелированных оценок требует перехода к интегральным или нелинейным дифференциальным процедурам переноса погрешностей при любой нелинейности.

Пусть мы имеем задачу переноса погрешностей в m переменных $\{\langle x_\alpha\rangle, u(x_\alpha), r(x_\alpha, x_\beta)\}$ с положительно определенной матрицей корреляций $r(x_\alpha, x_\beta)$ на систему n функций $y_i = \{f_i(x_\alpha)\}_1^n$. Это означает, что мы должны получить оценку $\{\langle y_i\rangle, u(y_i), r(y_i, y_j)\}$. В общем случае при известной совместной функции плотности вероятности $g(x_1, \ldots, x_m)$ эта задача формулируется следующим образом:

1) вычислить

$$\mu_i = \langle y_i\rangle = \int f_i(x_\alpha)\cdot g(x_\alpha) d^m x\ , \tag{23}$$

2) вычислить

$$u(y_i, y_j) = u(y_i)\cdot r(y_i, y_j)\cdot u(y_j) = \int (f_i(x_\alpha) - \mu_i)\cdot (f_j(x_\alpha) - \mu_j)\cdot g(x_\alpha) d^m x \tag{24}$$

с достаточной вычислительной точностью для обеспечения состоятельности оценки.

В силу неотрицательной определенности функции $g(x_\alpha)$ матрица ковариаций (24), вычисленная с достаточной точностью, является положительно определенной матрицей для линейно независимой системы функций $\{f_i(x_\alpha)\}_1^n$ (см. [25] стр. 483, теорема 7.2.10).

Покажем это для функций $f_i(x_\alpha)$, принадлежащих функциональному пространству бесконечно дифференцируемых и квадратично интегрируемых по мере определяемой $g(x_\alpha)$. В самом деле, матрица (24) есть $n \times n$ числовая матрица Грама n бесконечномерных векторов $f_i(x_\alpha) - \mu_i$ из функционального пространства с положительно определенным скалярным произведением. Она является эрмитовой матрицей и, следовательно, обладает базисом из собственных векторов в R^n с вещественными собственными значениями. Если система функциональных векторов $f_i(x_\alpha) - \mu_i$ линейно независима, то все собственные значения матрицы (24) положительны. Предположим противное: существует ненулевой вектор z из R^n, такой что

$$\sum_1^n u(y_i, y_j) \cdot z_j = 0.$$

Это значит, что

$$\int \left(\sum_i^n (f_i(x_\alpha) - \mu_i) \cdot z_i \right)^2 g(x_\alpha) d^m x = 0,$$

а это возможно только при условии

$$\sum_i^n (f_i(x_\alpha) - \mu_i) \cdot z_i = 0$$

в области определения $g(x_\alpha)$. Для гладких функций f_i это условие переходит в условие

$$\sum_i^n (f_i(x_\alpha) - \mu_i) \cdot z_i \equiv 0,$$

означающее линейную зависимость функциональных векторов $f_i(x_\alpha) - \mu_i$. Полученное противоречие доказывает положительную определенность матрицы ковариаций (24) для системы линейно независимых функций.

В реальности функции плотности вероятности неизвестны, но известны первые моменты и в большинстве случаев вычисления проводятся в рамках "дифференциального закона переноса погрешностей", который получается из интегрального (24) заменой $f_i(x_\alpha) - \mu_i$ полиномом — отрезком разложения в ряд Тейлора в окрестности $\langle x_\alpha \rangle$

$$f_i(x_\alpha) - \mu_i \ \Rightarrow \ P_i^N(x_\alpha) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_k}} \right|_{\langle x_\alpha \rangle} \cdot \Delta x_{\alpha_1} \cdots \Delta x_{\alpha_k}, \tag{25}$$

где $\Delta x_{\alpha_j} = x_{\alpha_j} - \langle x_{\alpha_j} \rangle$ и по повторяющимся индексам α_j подразумевается суммирование (см. в этой связи ISO GUM: 5.1.2 формула (10) и её некорректное расширение до четвертого порядка по $u(x_\alpha) = \sqrt{\langle (\Delta x_\alpha)^2 \rangle}$).

Оказывается, что требование положительной определенности матрицы ковариаций во многих случаях делает невозможным "экономное" применение дифференциальной процедуры переноса погрешностей, даже в самом благоприятном случае когда $\mu_i \approx f_i(\langle x_\alpha \rangle)$, т.е. когда линейное приближение справедливо (старшие моменты пренебрежимо малы).

В самом деле, максимальное число $T(N,m)$ линейно независимых функциональных векторов вида (25) определяется соотношением

$$\boldsymbol{T(N,m) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)! \cdot k!} = \frac{(N+m)!}{N! \cdot m!} - 1 \ .} \tag{26}$$

Отсюда получаем утверждение: **если матрица ковариаций системы n функций $\{f_i(x_\alpha)\}_1^n$ от m случайных переменных $\{x_\alpha\}_1^m$ определяется по дифференциальной процедуре (25) порядка N такого, что $T(N,m) < n$, то она вырождена, и любое ее числовое представление будет матрицей по крайней мере с одним неположительным собственным числом.**

В частности, широко используемое линейное $(N = 1)$приближение

$$f_i(x_\alpha) - \mu_i \approx \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\bigg|_{\langle x_\alpha \rangle} (x_\alpha - \langle x_\alpha \rangle) \tag{27}$$

для $n > m$ недопустимо, а при $n \le m$ опасно, так как возможно существование скрытых функциональных соотношений $\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = const$.

В самом деле, пусть $n \le m$. Тогда выходная матрица в линейном приближении в общем случае не вырождена, однако, если между функциям f_i имеется хотя бы одно функциональное соотношение $\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = const$, то матрица $u(f_i, f_j)$ определенная по линейному дифференциальному приближению, вырождена. Действительно, если функция $\Phi(f_i)$ дифференцируема, то ее градиент по переменным $\{x_\alpha\}_1^m$, с одной стороны, выражается как линейная комбинация градиентов f_i,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{\alpha_i}} = \frac{\partial \phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{\alpha_i}} + \frac{\partial \phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_{\alpha_i}} + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial f_n} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{\alpha_i}} = 0,$$

а с другой, — он нулевой вектор, т.е. градиенты f_i линейно зависимы, и, следовательно, матрица ковариаций определяемая линейным дифференциальным приближением вырождена. Однако матрица $u(f_i, f_j)$, вычисляемая с достаточной точностью по ее интегральному определению (24) с учетом функционального соотношения $\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = const$

$$u(f_i, f_j) = \int (f_i(x_\alpha) - \mu_i) \cdot (f_j(x_\alpha) - \mu_j) \cdot g(x_\alpha) \cdot \delta(\Phi(f_i) - const) d^m x, \tag{28}$$

где $\delta(\ldots)$ — неотрицательно определенная функция Дирака, является положительно определенной матрицей. Таким образом, мы видим, что проверка положительной определенности матриц корреляций (ковариаций) является необходимой мерой обеспечения надежности вычислений и корректности числового представления результатов.

Примечание. К сожалению, в большинстве известных автору текстов по статистической обработке данных, необходимость положительной определенности декларируется, но не контролируется ни в аналитических выкладках, ни в вычислениях. Ограничимся примером рекомендации из ISO GUM:

5.1.2 The combined standard uncertainty $u_c(y)$ is the positive square root of the combined variance $u_c^2(y)$, which is given by

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \qquad (10)$$

where f is the function given in equation (1). Each $u(x_i)$ is a standard uncertainty evaluated as described in 4.2 (Type A evaluation) or as in 4.3 (Type B evaluation). The combined standard uncertainty $u_c(y)$ is an estimated standard deviation and characterizes the dispersion of the values that could reasonably be attributed to the measurand Y (see 2.2.3).

Equation (10) and its counterpart for correlated input quantities, equation (13), both of which are based on a first-order Taylor series approximation of $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$, express what is termed in this Guide *the law of propagation of uncertainty* (see E.3.1 and E.3.2).

Note – When nonlinearity of f is significant, higher-order terms in the Taylor series expansion must be included in the expression for $u_c^2(y)$, equation (10). When the distribution of each X_i is symmetric about the mean, the most important terms of next highest order to be added to the terms of equation (10) are

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial^2 x_j}\right) u^2(x_i) u^2(x_j)$$

See H.1 for an example of a situation where the contribution of higher-order terms to $u_c^2(y)$ needs to be considered.

ISO GUM [1], p. 19

5.1.2 Суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ представляет собой положительный квадратный корень из суммарной дисперсии $u_c^2(y)$, полученной из формулы:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \qquad (10)$$

где f — функция, приведенная в уравнении (1), каждая $u(x_i)$ — стандартная неопределенность, оцененная, как описано в 4.2 (оценка по типу А) или в 4.3 (оценка по типу В). Суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ представляет собой оцененное стандартное отклонение и характеризует разброс значений, которые могут быть с достаточным основанием приписаны измеряемой величине Y (см. 2.2.3).

Уравнение (10) и его эквивалент для коррелированных входных величин – уравнение (13), оба из которых базируются на аппроксимации $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ рядом Тейлора первого порядка, выражают закон распространения неопределенности в терминах данного руководства (см. Е.3.1 и Е.3.2).

Примечание.
При значительной нелинейности f члены более высокого порядка в разложении в ряд Тейлора должны быть включены в выражение для $u_c^2(y)$, уравнение (10). Когда распределение каждого X_i располагается симметрично относительно его среднего значения, самыми важными членами следующего более высокого порядка, которые надо добавить к членам уравнения (10), являются

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial^2 x_j}\right) u^2(x_i) u^2(x_j).$$

Смотри Н.1 в качестве примера ситуации, где необходимо рассмотреть вклад членов более высокого порядка в $u_c^2(y)$.

ISO GUM (перевод ВНИИМ) [3], стр. 20

В этой рекомендации в формуле для вклада в вариацию $u_c^2(y)$ от членов четвертого порядка по $u(x_i)$ слагаемые, содержащие третью производную, включены по ошибке и для некоторых функций f будут приводить к отрицательным значениям $u_c^2(y)$. К сожалению, эта математическая некорректность рекомендации 5.1.2 ISO GUM не была замечена переводчиками из ВНИИМ и воспроизводится в других метрологических документах (смотри [29], стр.68–70), и в недавней публикации [39] по теме “On higher-order corrections for propagating uncertainties”. Правильные формулы приведены, например, в книге [13] в разделе 12.4.2 (стр. 278–280).

5. Заключение

На нескольких примерах мы убедились в том, что сложившаяся практика оценки, числового представления и передачи результатов измерений устарела[5] и требует существенной

[5]Распространенность некорректных представлений числовых данных в литературе и в системах статистического анализа отмечалась неоднократно [31], [33], [35], [36], [38].

коррекции. Проблема модернизации "выражения результатов измерений" обострена в фундаментальных разделах естествознания, где требования к корректности и точности числовых представлений результатов измерений (оценок) постоянно повышаются, методики проведения измерений и вычислений развиваются, а практика представления (публикации) и обмена измерительными данными, стандартизация и обучение "подстраиваются" недостаточно оперативно. Это запаздывание и приводит к появлению неполных и искаженных данных в журналах, в базах данных и в респектабельных научных информационных ресурсах, "скованных" устаревшими стандартами и методическими рекомендациями уважаемых международных организаций (смотри аналогичные рассуждения D.L.Smith [32] стр. 134-135 и P. De Bièvre [34]).

В первую очередь, необходима переработка ISO GUM. Представляется более правильным не коррекция ISO GUM в указанных выше местах, а полная ревизия его текста с учетом: новых наработок по программе SSfM [5] (см., например, [4], [29], [30], [6]); результатов рабочей группы NNDC(BNL) Cross Section Evaluation Working Group, представленных в [37] (см. разделы 30.–40.); критики и предложений из [38], [40] и возможностей, предоставляемых электронными публикациями [6].

Затем необходима коррекция руководств, справочников, учебников и (баз данных ?), использующих устаревшие положения ISO GUM.

Далее представляется необходимым ускорить формирование "GUM Supplement 2", в текст которого предлагается ввести следующие положения:

- В качестве обязательных элементов структуры данных следует приводить числовые характеристики состоятельности результата измерения (оценки): значения оцененных авторами порогов округления для средних (или наиболее вероятных) значений компонент вектора наблюдаемых величин, порогов округления матричных элементов матриц корреляций, и компонент вектора стандартных отклонений если использовалось равномерное округление. Если использовалось неравномерное округление, то обязательно детальное описание направленного округления (directed rounding) каждого числа представленного результата совместных измерений нескольких величин.

- Если в процессе получения оценок использовались заимствованные измерительные данные совместных измерений, приведенных в первоисточнике без указания порогов округления, то в тексте предъявления результатов должны быть приведены результаты "входного" контроля качества заимствованных данных.

- Если в процессе получения результата использовался дифференциальный перенос погрешностей, то процедура переноса должна быть детально описана с указанием использованного порядка приближения полиномом Тейлора и процедуры оценки старших моментов совместной функции распределения вероятностей независимых переменных.

После появления первой официальной версии "ISO GUM Supplement 2" весьма желательно распространение призыва к редакторам всех научно-технических журналов, научно-

[6]Предложения по оптимальной форме отчета о результатах поисковых экспериментов содержатся в [13] (в разделе 13.2 Desiderata for an optimal report of search results, стр.28-6-287).

технических информационных агентств и сайтов, аналогичного призыву P. De Bièvre в 1997 году:

> "...So, a result without reliability (uncertainty) statement cannot be published or communicated because it is not (yet) a result. I am appealing to my colleagues of all analytical journals not to accept papers anymore which do not respect this simple logic."
>
> Paul De Bièvre [35]

Благодарности

Автор благодарен R.M. Barnett (LBNL), А.Н. Толстенкову (МАГАТЭ), А.В. Емельяненко (DeltaConcept), Н.В. Емельяненко (ЦЕРН), А.Д. Рябову (ИФВЭ), предоставившим мне возможность работы с труднодоступной литературой по метрологии, математике, методам вычислений и статистическому анализу данных, а также И.И. Дегтяреву (ИФВЭ), указавшему на релевантные документы по обработке ядерных данных, и коллегам из сотрудничеств PDG и КОМПАС за плодотворные обсуждения и комментарии.

Благодарю представителей комитета CODATA А.Д. Гвишиани (ГФЦ РАН, Россия), Krishan Lal (NPL, India) и P.J. Mohr (NIST, USA) за критику и предложения по улучшению текста статьи.

Особая благодарность РФФИ и Г.В. Ежеле за финансовую поддержку участия в работе конференции CODATA-2006.

Список литературы

[1] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”, 1995. ISBN 92-67-10188-9, Second Edition ISOGUM.

[2] B. N. Taylor and Ch. E. Kuyatt. “Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results”, NIST Technical Note 1297, 1994 Edition NIST-GUM.

[3] “Руководство по выражению неопределенности измерения”/ Перевод с англ. под. науч. ред. проф. Слаева В.А. – ГП “ВНИИМ им. Д.И. Менделеева,” Санкт-Петербург, 1999. 134 с.

[4] M. Cox, P. Harris. “The GUM and its planned supplemental guides”, Accred. Qual. Assur. **8** (2003) 375.

[5] http://www.npl.co.uk/ssfm/.

[6] ISO/PRF Guide 99998. “Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) – Supplement 1: Numerical methods for the propagation of distributions”, under development, 2006. GUM Supplement 1.

[7] М.Н. Селиванов. “Неопределенность результата измерения и доверительная погрешность результата измерений.” Измерительная Техника. **8** (1994) 14.

[8] Ю.В. Тарбеев, В. А. Слаев, А. Г. Чуновкина. "Проблемы применения в России международного руководства по выражению неопределенности измерения." Измерительная Техника. **1** (1997) 69.

[9] V.A. Slaev. "Recommendations on Application of the Document "Guide to the Expression of Unsertainty in Measurement" in Russia." VNIIM-2000.

[10] I. Lira. "Evaluating the Measurement Uncertainty. Fundamentals and practical guidance". IoP Publishing Ltd, Bristol and Philadelpha, 2002.

[11] A. Anastassov *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. D **55** (1997) 2559 [Erratum-ibid. D **58** (1998) 119904].

[12] P. Abreu *et al.* [DELPHI Collaboration], "A measurement of the tau topological branching ratios", Eur. Phys. J. C **20** (2001) 617.

[13] G. D'Agostini. "Bayesian Reasoning in Data Analysis. A Critical Introduction", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2003.

[14] E.R. Cohen and B. N. Taylor. "The 1986 adjustment of the fundamental physical constants". Rev. Mod. Phys. **59** (1987) 1121.

E.R. Cohen and B. N. Taylor. "The 1986 CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants,"
Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. **92** (1987) 85,
http://physics.nist.gov/cuu/Constants/archive1986.html.

[15] P. J. Mohr and B. N. Taylor. "CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998", Rev. Mod. Phys. **72** (2000) 351,
http://physics.nist.gov/cuu/Constants/archive1998.html.

[16] P.J. Mohr and B. N. Taylor. "The 2002 CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants, Web Version 4.0", available at
http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html.

P.J. Mohr and B. N. Taylor. "CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002". Rev. Mod. Phys. **77** (2005) 1.

[17] И.С. Григорьев (ред.), Е.З. Мейлихов (ред.) "Физические величины". – М.: Энергоатомиздат, 1991.

[18] А.А. Радциг (перевод из [15]). "Фундаментальные физические постоянные (1998)". УФН **173** (2003) 339.

[19] W.M. Yao *et al.* [Particle Data Group], "Review of particle physics". J. Phys. G **33** (2006) 1.

[20] С.Г. Каршенбойм. "Фундаментальные физические константы: роль в физике и метрологии и рекомендованные значения." УФН **175** (2005) 271.

[21] D.R. Lide (ed.) "Handbook of Chemistry and Physics. 85-th Edition", CRC Press, 2004-2005.

[22] V.V. Ezhela, Y.V. Kuyanov, V.N. Larin and A.S. Siver. “The Inconstancy of the Fundamental Physical Constants: Computational Status”,
web.ihep.su/library/ps/2004-36.pdf

[23] Дж.Х. Уилкинсон. “Алгебраическая проблема собственных значений”. – М.: “Наука”, 1970.

J.H. Wilkinson. “The Algebraic Eigenvalue Problem”, Clarendon Press, Oxford, 1965.

[24] Ф.Р. Гантмахер. “Теория Матриц”. – М.: “Наука”, 1988.

[25] Р. Хорн, Ч. Джонсон. “Матричный Анализ”. М.: “Мир”, 1989.

R.A. Horn, C.R. Johnson. “Matrix Analysis”, Cambridge University Press, 1986.

[26] J. Rohn. “Nonsingularity, Positive Definiteness, and Positive Invertibility Under Fixed-Point Data Rounding”, submitted to Applications of Mathematics , September 2005.
MSTeP server.

[27] Т. Андерсон. “Введение в многомерный статистический анализ”. – М.: Физматгиз, 1963.

T.W. Anderson. “An Introduction to Multivariate Statistical Analysis”. New York, John Willey & Sons, Inc.

[28] А.А. Боровков, – “Математическая Статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез”, – М.: “Наука”, 1984.

[29] M. Cox, P. Harris. “Uncertainty Evaluation. Best Practice Guide No. 6. Software Support for Metrolog,”, NPL Report, DEM-ES-11, National Physics Laboratory, Teddington, UK, September 2006.

[30] M. Cox, P. Harris. SSfM Best Practice Guide No 11.
“Numerical analysis for algorithm design in metrology.’ Technical report, NPL, Teddington, UK, 2004.

[31] L. Fox. “How to get meaningless answers in scientific computation (and what to do about it)”. IMA Bull., **7** (1971) 296.

[32] D.L. Smith. “Probability, Statistics, and Data Uncertainties in Nuclear Science and Technology”. LaGrange Park, Illinois, USA: American Nuclear Society (1991).

[33] W. Kahan. “The Improbability of PROBABILISTIC ERROR ANALYSES for Numerical Computations”, 1996.
www.cs.berkeley .edu/wkahan/improber.pdf.

[34] P. De Bièvre. “Reliability is a State-of-the-Mind.” Accred. Qual. Assur. **2** (1997) 1.

[35] P. De Bièvre. “Measurement results without statements of reliability (uncertainty) should not be taken seriously.” Accred. Qual. Assur. **2** (1997) 269.

[36] S.A. Badikov. “Statistical analysis of correlated data and evaluation of the neutron cross sections” (in Russian). Atomic Energy, **84** (1998) 426.

[37] M. Herman (ed.), "ENDF- 6 Formats Manual. Data Formats and Procedures for the Evaluated Nuclear Data File ENDF/B-VI and ENDF/B-VIIN", Document ENDF-102, Report BNL-NCS-44945-05-Rev, June 2005. ENDF-102.

[38] S. Ferson et al. "Dependence in probabilistic modeling, Dempster-Shafer theory, and probability bounds analysis", SAND2004-3072, Unlimited release, Printed October 2004 (см. стр. 59-60,107). SAND2004-3072.

[39] C.M. Wang and H.R. Iyer. "On higher-order corrections for propagating uncertainties" Metrologia **42** (2005) 406.

[40] S. Ferson et al. "Experimental uncertainty estimation and statistics for data having interval uncertainty", SAND2006-XXXX[review draft 2], Unlimited release, Printed XXXX 2006. SAND2006-XXXX.

Рукопись поступила 25 декабря 2006 г.

В.В. Ежела
О корректном числовом представлении результатов совместных измерений.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В.Ежела.

Подписано к печати 27.12.06. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 3,25. Уч.-изд.л. 2,75. Тираж 80. Заказ 1. Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142281, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2006-28, И Ф В Э, 2006