



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2007–17  
ОУ У–70

С.В. Иванов

**ПРОДОЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ  
НЕПРЕРЫВНОГО ПУЧКА  
В ПРОТОННОМ СИНХРОТРОНЕ**

Протвино 2007

**Аннотация**

Иванов С.В. Продольная неустойчивость непрерывного пучка в протонном синхротроне: Препринт ИФВЭ 2007–17. — Протвино, 2007. — 11 с., 7 рис., библиогр.: 8.

Излагаются результаты расчета порога возникновения продольной когерентной неустойчивости непрерывного пучка, обращающегося в протонном синхротроне при постоянной энергии. “Непрерывным” называется пучок, находящийся в промежуточном состоянии, — он не сгруппирован в сгустки, но и не является однородным по азимуту. Такой пучок движется вне (возможно, вблизи) пустых ВЧ-сепаратрис продольного синусоидального электрического поля и имеет ленточный портрет на продольной фазовой плоскости. Методика расчетов используется для протонного синхротрона У–70 ИФВЭ, где в ходе стохастического медленного вывода циркулирующий пучок является “непрерывным” в указанном смысле. Он огибает пустые сепаратрисы ускоряющего поля частоты 200 МГц и в течение нескольких секунд взаимодействует с рабочим видом колебаний отключенных резонаторов основной ускоряющей системы частоты 5.5–6 МГц, что может привести к потере продольной устойчивости.

**Abstract**

Ivanov S.V. Longitudinal Instability of a Continuous Beam in a Proton Synchrotron: IHEP Preprint 2007–17. — Protvino, 2007. — p. 11, figs. 7, refs.: 8.

Outcomes of a study for threshold of a longitudinal coherent instability of a continuous beam circulating at a constant energy in a proton synchrotron are reported. Attribute “continuous” refers to a beam in an intermediate state, which is neither bunched nor azimuthally uniform. Such a beam wraps closely around (and outside of) empty RF buckets imposed by a longitudinal sine-wave electric field, thus having a stripe-like footprint in the longitudinal phase plane. The approach is applied to the U70 proton synchrotron of IHEP where, in course of a slow stochastic extraction, a waiting beam stack constitutes the “continuous beam” in question. It orbits around empty 200 MHz RF buckets while being subjected a-few-seconds-long interaction with a fundamental mode of idle ferrite-loaded accelerating cavities of the main 5.5–6 MHz RF system that might result in a loss of longitudinal stability.

## Введение

В работе излагаются результаты исследования продольной когерентной неустойчивости непрерывного пучка, циркулирующего в протонном синхротроне при постоянной энергии. *Непрерывным* называется пучок, движущийся вне (возможно, вблизи) пустых стационарных сепаратрис синусоидального ускоряющего электрического поля. Портрет непрерывного пучка на продольной фазовой плоскости имеет вид ленты, огибающей сепаратрисы, см. Рис. 1. Такой пучок не сгруппирован в сгустки, но и не является однородным по азимуту. (Приближение азимутально-однородного пучка достигается асимптотически по мере удаления непрерывного пучка от сепаратрис.)

Исследование особенностей развития продольной когерентной неустойчивости в непрерывном пучке представляет не только методический, но и практический интерес.

Действительно, в протонном синхротроне У-70 ГНЦ ИФВЭ с 2006 г. используется режим стохастического медленного вывода пучка [1], [2]. В этом режиме пучок сначала ускоряется до энергии 50–60 ГэВ с помощью основной ускоряющей системы частоты 5.5–6 МГц. На верхнем плато магнитного поля основная ускоряющая система отключается, а пучок разгруппировывается. Затем включается вспомогательная ускоряющая система частоты 200 МГц. Ее функции двояки:

- ◆ С одной стороны, она формирует пустые сепаратрисы вне циркулирующего пучка. Эти сепаратрисы перекрывают образ поперечного выводного резонанса на продольной фазовой плоскости, чем достигается локальное увеличение скорости вхождения захваченных частиц в выводной резонанс, приводящее к уменьшению пульсаций тока выведенного пучка.
- ◆ С другой стороны, эта же ускоряющая система возбуждает управляемый фазовый шум ускоряющего поля, приводящий к медленной диффузии циркулирующего пучка в направлении пустых сепаратрис. Сепаратриса играет роль “поглощающей стенки” (стока) задачи диффузии. Поэтому в У-70 одна из границ непрерывного пучка касается сепаратрис. На этой границе пучок имеет нулевую плотность и отличный от нуля градиент плотности частиц.

Длительность стохастического медленного вывода из У-70 достигает 3–3.5 с. Все это время непрерывный пучок, ожидающий вывода, взаимодействует с рабочим видом колебаний сорока отключенных (пассивных) резонаторов основной ускоряющей системы. Исследование особенностей развития продольной неустойчивости в этом случае представляет практический интерес для лучшего понимания возможностей стохастического медленного вывода при повышенной интенсивности пучка.

## 1. Исходные положения

Обозначим  $\vartheta = \Theta - \omega_0 t$  азимут в сопровождающей пучок системе координат. Здесь  $\Theta$  – обобщенный азимут синхротрона, отсчитываемый в направлении движения пучка;  $\omega_0$  – угловая скорость (частота обращения) равновесной частицы;  $t$  – время. Используем в качестве обобщенных координат и импульса пару переменных  $(\vartheta; \vartheta' = d\vartheta/dt)$ .

Рассмотрим режим накопления пучка в поле одной гармоники электрического поля. Совместим начало отсчета  $\vartheta = 0$  с центром одной (любой) из пустых сепаратрис. Гамильтониан невозмущенного продольного движения имеет вид

$$H(\vartheta, \vartheta') = U(\vartheta) + \vartheta'^2/2, \quad (1)$$

где  $U(\vartheta)$  – потенциальная энергия, равная

$$U(\vartheta) = \Omega_0^2(1 - \cos(q\vartheta))/q^2. \quad (2)$$

Здесь  $q$  – кратность ускорения;  $\Omega_0$  – круговая частота малых синхротронных колебаний:

$$\Omega_0 = \left( -\frac{\omega_0^2 \eta q e V_{RF} \sin \varphi_s}{2\pi \beta^2 \gamma E_0} \right)^{1/2}, \quad \eta \varphi_s < 0, \quad (3)$$

где  $V_{RF}$  – амплитуда ускоряющего напряжения частоты  $q\omega_0 = \omega_{RF}$ ;  $\varphi_s$  – синхронная фаза (равновесный прирост энергии  $\propto \cos \varphi_s = 0$ );  $\eta = \alpha - 1/\gamma^2$  – фактор скольжения частоты обращения;  $\alpha$  – коэффициент расширения орбит;  $E_0$  – энергия покоя частиц;  $e$  – элементарный заряд;  $\beta$  и  $\gamma$  – релятивистские факторы.

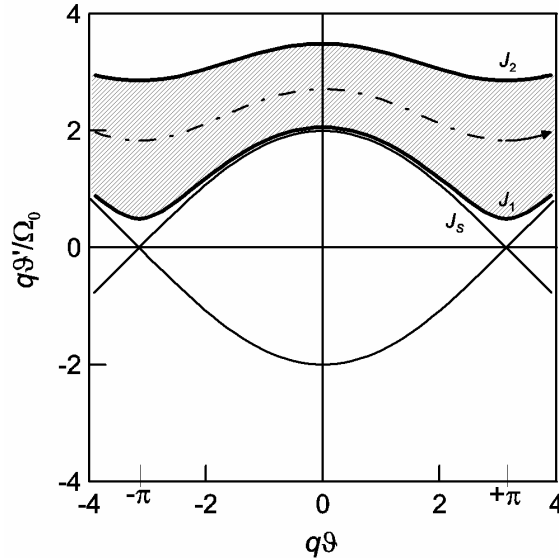


Рис. 1. Фазовый портрет непрерывного пучка. Один период ускоряющего поля кратности  $q$ .

Рассмотрим финитное орбитальное движение частиц вне (возможно, вблизи)  $q$  пустых сепаратрис. Энергия такого движения  $W = H(\vartheta, \vartheta') \geq W_s$ , где

$$W_s = 2\Omega_0^2/q^2 \quad (4)$$

есть энергия частицы на сепаратрисе. Весь пучок целиком находится в одной полуплоскости фазовой плоскости  $(\vartheta; \vartheta')$ , см. Рис. 1.

Обозначим  $(\psi; J)$  переменные угол–действие невозмущенного движения. Тогда

$$J(W) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(W - U(\vartheta))} d\vartheta, \quad (5)$$

а величина действия на сепаратрисе равна

$$J_s = J(W_s) = 4\Omega_0/\pi q. \quad (6)$$

Далее  $J_s$  используется как естественная единица измерения переменной  $J$ .

Уравнения движения в переменных  $(\psi; J)$  имеют канонический вид:

$$d\psi/dt = \partial W/\partial J = \Omega(J) \geq 0, \quad dJ/dt = -\partial W/\partial \psi = 0, \quad (7)$$

где  $\Omega(J)$  – частота нелинейного движения,  $\Omega(J_S) = 0$ . Частота  $\Omega(J)$  связана со средней частотой обращения частицы по орбите  $\omega(J)$  равенством

$$\omega(J) = \omega_0 + \Omega(J) \operatorname{sgn} \vartheta'. \quad (8)$$

Для  $J \gg J_S$  осуществляется переход к *приближению азимутально-однородного пучка*, когда

$$J = |\vartheta'|, \quad \psi = \vartheta \operatorname{sgn} \vartheta' + \psi_0, \quad \Omega(J) = |\vartheta'|, \quad (9)$$

где  $\psi_0$  есть величина угла  $\psi$  в точке начала отсчета азимута  $\vartheta$ .

Расчет одночастичной динамики системы (1), (2) проводится аналитически в терминах эллиптических функций. Так закон движения  $\vartheta(J, t)$  по фазовой траектории с действием  $J \geq J_S$ , существенные динамические функции  $J(W)$ ,  $\Omega(J)$  и другие (см., например, (31)) записываются в виде параметрической зависимости от независимой переменной  $1 \leq x < \infty$ :

$$q\vartheta(J(x), t)/2 = \operatorname{am}(x\Omega_0 t | x^{-1}) \operatorname{sgn} \vartheta', \quad \vartheta(J, t=0) = 0; \quad (10)$$

$$W(x)/W_S = x^2, \quad J(x)/J_S = xE(x^{-1}), \quad q\Omega(x)/\Omega_0 = \frac{\pi x}{K(x^{-1})}; \quad (11)$$

$$\frac{dJ}{d\Omega}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{x^2 - 1}{x^2} \cdot \frac{K^3(x^{-1})}{E(x^{-1})} > 0, \quad \frac{dJ}{d\Omega}(x) \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Здесь  $K(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода;  $\operatorname{am}(u | k)$  – эллиптическая амплитуда Якоби. Модуль  $k = x^{-1}$  эллиптических функций изменяется в стандартном отрезке  $[0; 1]$ . График зависимости  $\Omega(J)$  показан на Рис. 2. График функции (12) построен на Рис. 3. Эта функция используется при расчете порога продольной когерентной неустойчивости пучка, см. уравнение (39) далее. Пунктиром показан предел азимутально-однородного пучка.

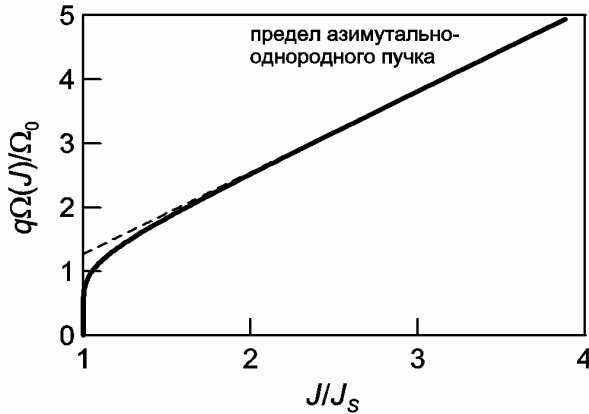


Рис. 2. Частота нелинейного движения.

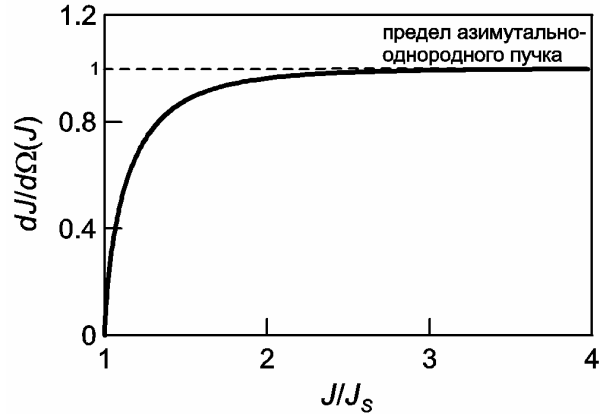


Рис. 3. Закон нелинейности (12).

## 2. Характеристическое уравнение

Для вывода характеристического уравнения неустойчивости применим последовательный подход к вопросу о продольной неустойчивости сгруппированного пучка, разработанный в [5]. Используем формальную физическую аналогию между двумя возможными типами финитного циклического движения частицы в синхротроне — в пределах одного сгустка, как в [5], и орбитального за пределами сепаратрис в режиме накопления с  $\cos\varphi_s = 0$ .

Примем зависимость от времени  $t$  в сопровождающей системе в виде  $\propto \exp(-i\Omega t)$ . Частота  $\Omega$  наблюдается в лабораторной системе как боковая линия гармоник частоты обращения пучка по орбите  $\omega = k\omega_0 + \Omega$ , где  $k$  – произвольное целое число.

Стационарная функция распределения пучка  $F_0(J)$  не зависит от угловой переменной  $\psi$  и времени  $t$ . Однако под действием волн продольного электрического поля  $E_k(\Omega)\exp(ik'\vartheta - i\Omega t)$ , распространяющихся по орбите, возникает нестационарная когерентная добавка  $\Delta F(J, \psi, t)$  к  $F_0(J)$ . Она периодична по углу  $\psi$  с периодом  $2\pi$  и допускает мультипольное разложение вида  $\sum_m \Delta F_m(J, t)\exp(im\psi)$ , где  $m$  – целое число. Решив линеаризованное по возмущению уравнение А.А. Власова относительно фурье-образов  $\Delta F_m(J, \Omega)$ , найдем передаточную функцию “амплитуда гармоники напряженности электрического поля  $E_k$  — амплитуда когерентной добавки к току пучка  $I_k$ ” в виде:

$$I_k(\Omega) = L \frac{i\Delta J}{\pi R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \int_{J_1}^{J_2} dJ \frac{dF_0(J)/dJ}{\Omega - m\Omega(J)} D_{mk}(J) \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \frac{D_{mk'}^*(J)}{k'} E_{k'}(\Omega). \quad (13)$$

Здесь функция распределения пучка  $F_0(J)$  определена для  $J \in [J_1; J_2]$  с  $J_1 \geq J_S$ . Для ее нормировки выбрано условие

$$\int_{J_1}^{J_2} F_0(J) dJ = \Delta J / 2, \quad \Delta J = (J_2 - J_1) / 2, \quad (14)$$

где  $\pm\Delta J$  имеет смысл максимального разброса по  $J$  в пучке. В формуле (13)  $L$  обозначает длину ускорителя. Коэффициент  $R$  имеет размерность сопротивления:

$$R = \frac{\beta^2 \eta \gamma E_0}{e I_0} \left( \frac{\Delta J}{\eta \omega_0} \right)^2, \quad (15)$$

где  $I_0 = eN\omega_0/2\pi$  – средний по орбите ток пучка,  $N$  – полное число частиц в ускорителе. Знак  $R$  изменяется с отрицательного на положительный при переходе через критическую энергию.

Пусть электрическое поле кратности  $q$  включается медленно, а пустые сепаратрисы формируются вне ожидающего пучка. Тогда распределение частиц по координате  $J - J_S$  является адиабатически инвариантным. Инвариантом оказывается и разброс  $\Delta J$ . Если исходный пучок однороден по азимуту  $\vartheta$ , то для него выполнены соотношения (9). Тогда для правого множителя в определении (15) получим равенство

$$\left( \frac{\Delta J}{\eta \omega_0} \right)^2 = \left( \frac{\Delta p(0)}{p_0} \right)^2, \quad (16)$$

где  $\pm\Delta p(0)$  – максимальный разброс по импульсам в исходном пучке;  $p_0$  – импульс равновесной частицы.

При стохастическом медленном выводе пучка из У-70 после включения шумового наведения разброс  $\Delta J$  увеличивается по сравнению с начальной величиной (16).

В ряд (13) в качестве весовых множителей входят коэффициенты разложения плоской волны в ряд по мультипольным колебаниям:

$$D_{mk}^*(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ik'\vartheta(J, \psi) - im\psi) d\psi. \quad (17)$$

Для азимутально-однородного пучка (9) имеем

$$D_{mk}^*(J) = \delta_{m, k' \operatorname{sgn} \vartheta'}, \quad (18)$$

где  $\delta_{mk}$  – дельта-символ Кронекера ( $\delta_{mk} = 1$  при  $m = k$  и  $0$  при  $m \neq k$ ). В этом частном случае передаточная функция пучка (13) оказывается диагональной по индексам  $k$  и  $k'$  азимутальных гармоник тока и поля.

В общем случае фазовые траектории невозмущенного непрерывного пучка периодичны по азимуту  $\vartheta$  с периодом  $2\pi/q$ . Учтем, что

$$\vartheta(J, \psi + 2\pi/q) = \vartheta(J, \psi) + 2\pi \operatorname{sgn} \vartheta' / q, \quad (19)$$

и перейдем в (17) к интегрированию по одному ВЧ-периоду в окрестности точки начала отсчета  $\vartheta = 0$ . В результате получим

$$D_{mk'}^*(J) = I_{mk'}^*(J) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_{m, k' \operatorname{sgn} \vartheta' + qj}, \quad (20)$$

где

$$I_{mk'}^*(J) = \frac{q}{2\pi} \int_{\psi_0 - \pi/q}^{\psi_0 + \pi/q} \exp(ik' \vartheta(J, \psi) - im\psi) d\psi, \quad \vartheta(J, \psi_0) = 0. \quad (21)$$

Подставив представление (20) в формулу (13), получим передаточную функцию пучка в виде

$$I_k(\Omega) = L \frac{i\Delta J}{\pi R} \sum_{j=-\infty}^{\infty} m \int_{J_1}^{J_2} dJ \frac{dF_0(J)/dJ}{\Omega - m\Omega(J)} I_{mk}(J) \sum_{j'=-\infty}^{\infty} \frac{I_{mk'}^*(J)}{k'} E_{k'}(\Omega), \quad (22)$$

$$m = k \operatorname{sgn} \vartheta' + qj, \quad k' = k + qj'. \quad (23)$$

Электродинамические свойства вакуумной камеры характеризуются продольным импедансом  $Z_k(\omega)$ , связывающим комплексные амплитуды гармоник тока пучка и продольного электрического поля равенством [5]:

$$E_k(\Omega) = -\frac{1}{L} Z_k(k\omega_0 + \Omega) I_k(\Omega), \quad (24)$$

$$Z_{-k}(-\omega)^* = Z_k(\omega), \quad \operatorname{Re} Z_k(\omega) \geq 0.$$

После подстановки (24) в (22) получим бесконечную систему линейных однородных уравнений для амплитуд гармоник тока пучка:

$$RI_k(\Omega) = \sum_{j'=-\infty}^{\infty} Y_{kk'}(\Omega) \frac{Z_{k'}(k'\omega_0 + \Omega)}{k'} I_{k'}(\Omega). \quad (25)$$

Величины  $Y_{kk'}(\Omega)$  являются дисперсионными интегралами:

$$Y_{kk'}(\Omega) = -i \frac{\Delta J}{\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} m \int_{J_1}^{J_2} \frac{dF_0(J)/dJ}{\Omega - m\Omega(J)} I_{mk}(J) I_{mk'}^*(J) dJ. \quad (26)$$

В рядах (25) и (26) суммирование идет по индексам (23).

Значения  $\Omega$ , при которых система (25) имеет нетривиальные решения, являются частотами собственных когерентных колебаний пучка. При  $\operatorname{Im}\Omega > 0$  соответствующий вид колебаний пучка неустойчив.

Пусть импеданс вакуумной камеры определяется узкополосным резонансным элементом с центральной частотой  $\omega_c$  и шириной полосы  $\Delta\omega$ , удовлетворяющим ограничениям

$$\Delta\omega \ll q\omega_0, \quad |\omega_c - lq\omega_0/2| \gg \Delta\omega, \quad (27)$$

где  $l$  – произвольное целое число. Тогда в правой части (25) останется единственное слагаемое с  $k' = k$  и  $||k\omega_0| - \omega_c| \leq \Delta\omega$ . Это приводит к характеристическому уравнению вида

$$R = Y_{kk}(\Omega) \frac{Z_k(k\omega_0 + \Omega)}{k} \quad \text{для} \quad \left| |k| - \omega_c / \omega_0 \right| \leq \Delta\omega / \omega_0. \quad (28)$$

В синхротроне У-70 условия (27) выполнены для импеданса выключенных резонаторов основной ускоряющей системы:  $\omega_c / 2\pi \cong 2.8$  МГц и  $q\omega_0 / 2\pi \cong 200$  МГц.

### 3. Весовые множители

Для расчета весовых множителей (21) удобно совместить точки начала отсчета азимута  $\vartheta$  и угла  $\psi$ , когда

$$\psi_0 = 0; \quad \vartheta(J, \psi = 0) = 0; \quad \vartheta(J, \psi = \pm\pi/q) = \pm\pi \operatorname{sgn} \vartheta' / q. \quad (29)$$

Тогда функция (21) оказывается чисто вещественной,

$$I_{mk'}(J) = \frac{q}{\pi} \int_0^{\pi/q} \cos(k' \vartheta(J, \psi) - m\psi) d\psi. \quad (30)$$

(При отказе от предположения (29) здесь пришлось бы учесть несущественный фазовый множитель  $\exp(-im\psi_0)$ .)

Далее, подстановка закона движения в виде (10) приводит к параметрическому представлению для  $I_{mk'}(J)$  в виде:

$$I_{mk'}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \left( 2 \frac{k' \operatorname{sgn} \vartheta'}{q} \operatorname{am} \left( \frac{1}{\pi} \mathbf{K}(x^{-1}) \varphi \middle| x^{-1} \right) - \frac{m}{q} \varphi \right) d\varphi \quad (31)$$

вместе с функцией  $J(x)$  из (11). Легко видеть, что помимо текущей переменной  $1 \leq x < \infty$  из формул (10)–(12) функция (31) зависит еще от двух параметров:

$$r = |k'|/q, \quad n = m \operatorname{sgn}(k' \vartheta') / q. \quad (32)$$

Азимутальная модуляция стационарного непрерывного пучка (ее период  $2\pi/q$ ) и периодичность когерентного возмущения пучка (период  $2\pi$ , вся орбита) учитываются выбором индексов  $k'$  и  $m$  в виде (23).

Для  $r = 1$  и целых  $n$  интеграл (31) вычисляется аналитически:

$$I_{mk'}(x) = \left( \frac{\pi x}{\mathbf{K}(x^{-1})} \right)^2 \left[ \frac{n}{\operatorname{sh} \left( \frac{\pi n}{\mathbf{K}(x^{-1})} \mathbf{K}(\sqrt{1-x^{-2}}) \right)} + \frac{n}{\operatorname{ch} \left( \frac{\pi n}{\mathbf{K}(x^{-1})} \mathbf{K}(\sqrt{1-x^{-2}}) \right)} \right], \quad n \neq 0, \quad (33)$$

$$I_{mk'}(x) = 1 - 2x^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{E}(x^{-1})}{\mathbf{K}(x^{-1})} \right), \quad n = 0.$$

Последняя функция приведена для общности. Она соответствует  $m = 0$  и в суммировании (22) и (26) не участвует.

Выражение (33) решает задачу расчета двух пар весовых множителей  $I_{mk} I_{mk'}^*$  для  $k = \pm q$  и  $k' = \pm q$  (выбор знаков независим). Они характеризуют взаимодействие пучка с рабочим видом колебаний (узкополосной) ускоряющей системы частоты  $\omega_{\text{RF}} = q\omega_0$ .

Графики нескольких низших функций (33) показаны на Рис. 4 (сплошные линии). С ростом  $|n - r|$  нетривиальная часть графиков все более приближается к сепаратрисам.



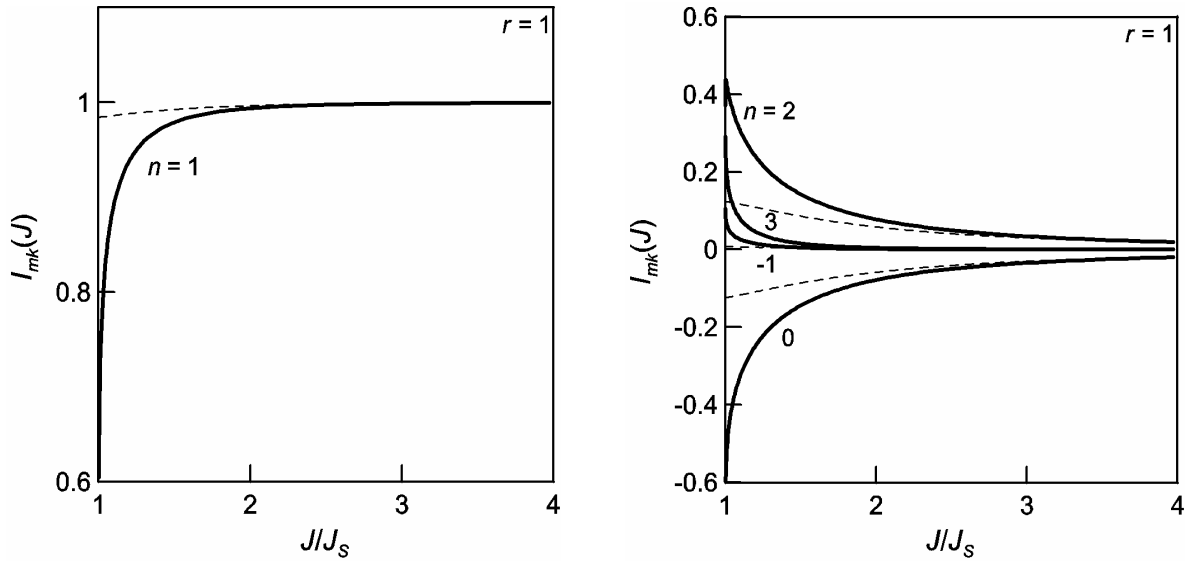


Рис. 4. Графики низших весовых функций для  $r = 1$ .

Для произвольных значений параметра  $r \neq 1$  требуется численное интегрирование по формуле (31). В У-70 наибольший практический интерес представляет случай  $r \ll 1$ , когда возможны дальнейшие упрощения.

Действительно, воспользуемся аппроксимацией эллиптической амплитуды  $\text{am}(u|k)$  при модуле  $k \ll 1$  тригонометрическими функциями, см. (16.13.4) в [3]. Тогда для целых  $n - r$  получим оценку асимптотического поведения интегралов (31) в виде:

$$I_{mk'}(x) \cong J_{n-r} \left( \frac{r}{4x^2} \right), \quad x^2 \gg 1, \quad (34)$$

где  $J_{n-r}(y)$  – функция Бесселя порядка  $n - r$ . Для иллюстрации графики таких асимптот при  $r = 1$  показаны на Рис. 4 пунктирными линиями.

В упрощенном характеристическом уравнении (28) участвуют только диагональные ( $k = k'$ ) весовые множители вида

$$|I_{mk}(x)|^2 \cong J_{n-r}^2 \left( \frac{r}{4x^2} \right), \quad n - r = j \text{sgn}(k\vartheta'), \quad x^2 \gg 1. \quad (35)$$

Отсюда понятно, что для длинноволновых возмущений пучка с  $r \ll 1$  получим

$$|I_{mk}(x)|^2 \cong J_0^2 \left( \frac{r}{4x^2} \right) \cdot \delta_{j0} \cong 1 \cdot \delta_{j0}, \quad x^2 \gg 1 \gg r. \quad (36)$$

Таким образом, в сумме по  $j$  в уравнении (28) можно не только оставить одно слагаемое с  $j = 0$ , но и не учитывать зависимость его весового множителя от переменной действия  $J$ . Отброшенные мультипольные гармоники с  $j \neq 0$  проявляются только в узком слое вблизи сепаратрис. Размер этого слоя по координате  $J$  изменяется примерно пропорционально  $(r/|j|)^{1/2}$ . Для отключенных резонаторов основной ускоряющей системы в ускорителе У-70 параметр  $r \cong 0.014 \ll 1$ .

#### 4. Пороговые диаграммы

Для определения порога возникновения продольной неустойчивости непрерывного пучка воспользуемся графоаналитическим методом пороговых диаграмм в том виде, как он изложен в работах [6], [7].

Будем считать, что  $|\Omega| \ll \Delta\omega$  и потому допустима замена

$$Z_k(k\omega_0 + \Omega) \cong Z_k(k\omega_0). \quad (37)$$

Тогда характеристическое уравнение (28) можно записать в виде равенства, допускающего использование метода пороговых диаграмм:

$$\frac{R}{Z_k(k\omega_0)/k} = Y_{kk}(\Omega) \quad \text{для} \quad \left| |k| - \omega_c / \omega_0 \right| \leq \Delta\omega / \omega_0. \quad (38)$$

Функция  $Y_{kk}(\Omega)$  отображает верхнюю полуплоскость комплексной переменной  $\Omega$  на часть комплексной плоскости  $Y$ , ограниченную пороговой кривой  $C$ . Замкнутая пороговая кривая является отображением линии  $\text{Im}\Omega \rightarrow +0$ . Ее параметрическое уравнение в длинноволновом приближении (36) имеет вид:

$$\text{Re} Y^{(C)}(\Omega) = -\text{sgn}(k\vartheta') \Delta J \frac{dF_0}{dJ}(J_*) \left| \frac{dJ}{d\Omega}(J_*) \right|, \quad (39)$$

$$\text{Im} Y^{(C)}(\Omega) = -\text{p.v.} \frac{\Delta J}{\pi} \int_{J_1}^{J_2} \frac{dF_0}{dJ}(J) \frac{1}{\frac{\Omega}{k \text{sgn} \vartheta'} - \Omega(J)} dJ, \quad (40)$$

где p. v. – главное значение интеграла,  $J_*$  – решение уравнения

$$\Omega(J) = \frac{\Omega}{k \text{sgn} \vartheta'}, \quad J \in [J_1; J_2].$$

Частота нелинейного движения  $\Omega(J)$  и функция  $dJ/d\Omega(J)$  определены в уравнениях (11) и (12). Графики этих функций показаны на Рис. 2 и Рис. 3. Из них видно, что нелинейность движения оказывает заметное стабилизирующее воздействие, когда внешняя граница пучка  $J_2 \leq (2-3)J_s$ .

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы представляющая точка

$$Y^{(k)} = \frac{R}{Z_k(k\omega_0)/k}, \quad (41)$$

заданная левой частью равенства (38), находилась вне области, ограниченной пороговой кривой  $C$  вблизи начала координат комплексной плоскости  $Y$ .

В общем случае распределение  $F_0(J)$  не является четной функцией относительно центра пучка. (Так происходит, скажем, при стохастическом медленном выводе протонов из У-70.) Тогда пороговая кривая  $C$  заведомо не будет симметричной относительно мнимой оси плоскости  $Y$ .

Смена знака  $k$  зеркально отображает и точку  $Y^{(k)}$  и кривую  $C$  относительно мнимой оси плоскости  $Y$ . Такое преобразование пороговой диаграммы не изменяет формулировку условий устойчивости. Поэтому без ограничения общности далее можно выбрать  $k > 0$ .

Переход через критическую энергию изменяет знак  $R$ , смотри (15). Тогда точка  $Y^{(k)}$  инвертируется относительно начала координат плоскости  $Y$ , а кривая  $C$  остается прежней. Условия устойчивости системы изменятся. Они зависят от знака  $\eta$ .

При смене полуплоскости фазовой плоскости ( $\vartheta; \vartheta'$ ), в которой размещается фазовый портрет непрерывного пучка, кривая  $C$  зеркально отображается относительно мнимой оси плоскости  $Y$ , а точка  $Y^{(k)}$  остается на прежнем месте. Поэтому условия устойчивости системы изменятся. Причина в том, что для выбранной функции  $F_0(J)$  (по предположению, она не является четной относительно центра пучка) и смене знака  $\vartheta'$  меняется вид физического распределения частиц по частотам обращения по орбите  $\omega(J)$ , (8).

## 5. Пороги неустойчивости в У-70

Рассмотрим характерные пороговые диаграммы на примере пучка протонного синхротрона У-70. Для детального анализа выберем функцию  $F_0(J)$ , которая имеет гладкое ядро вида

$$F_0(J) \propto \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{J - J_B}{\Delta J_B}\right)^2\right)^2 & \text{для } |J - J_B| \leq \Delta J_B; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (42)$$

Здесь  $J_B$  – координата центра ядра,  $\pm\Delta J_B$  – его размер. Пусть с функцией (42) гладко сопряжен клиновидный хвост распределения, обращающийся в 0 при  $J = J_S$ . Графики функции распределения и ее производной показаны на Рис. 5 и Рис. 6. Область определения:  $J/J_S \in [1; 6.4]$ ; условие нормировки (14) с  $\Delta J/J_S = 2.7$ . Параметры ядра (42):  $J_B/J_S = 4$  и  $\Delta J_B/J_S = 2.4$ . Подобный вид имеют расчетные распределения ожидающего пучка на последовательных стадиях процесса стохастического медленного вывода протонов из У-70 [1].

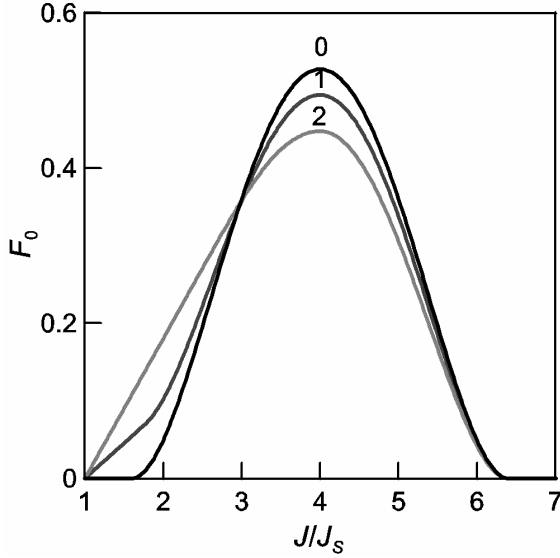


Рис. 5. Функция распределения пучка.

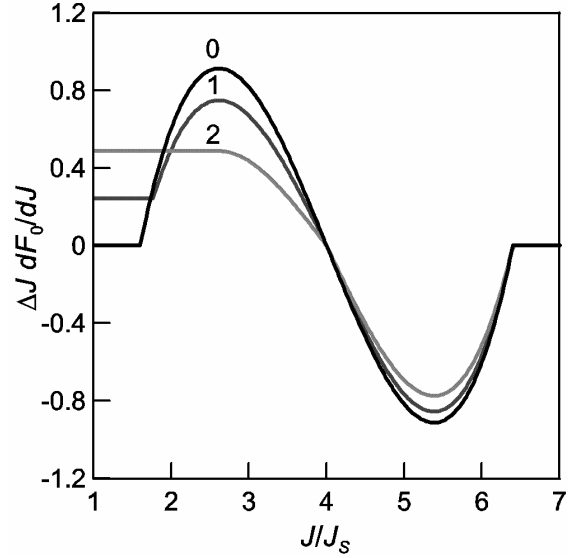


Рис. 6. Производная функции распределения.

При выбранной здесь нормировке (14) площадь под кривыми Рис. 5 постоянна. Убыль интенсивности пучка в ходе вывода учитывается путем уменьшения величины среднего тока  $I_0$  в определениях (15) и (41).

Пороговые диаграммы для трех реалистичных распределений пучка, показанных на Рис. 5 и Рис. 6, построены на Рис. 7. Вдоль положительной части оси  $\text{Im}Y$  проходит разрез. Он соответствует устойчивости системы. Номер гармоники  $k > 0$ . Пучок расположен в верхней полуплоскости фазовой плоскости ( $\vartheta; \vartheta'$ ), как это принято при стохастическом выводе из ускорителя У-70.

Вывод протонов из У-70 производится за критической энергией ( $\eta > 0$ ). Поэтому представляющая точка  $Y^{(k)}$  находится в правой полуплоскости комплексной плоскости  $Y$ , а когерентные возмущения пучка локализуются на правом склоне  $F_0(J)$ . Ход трансформации пороговой диаграммы при стохастическом выводе благоприятен — размер области неустойчивых параметров уменьшается. При этом точка  $Y^{(k)}$  еще и удаляется от начала координат по радиусу  $\propto 1/I_0$  из-за убыли среднего тока  $I_0$ . Поэтому в процессе вывода пучок уходит от порога возникновения когерентной неустойчивости.

Из Рис. 7 также видно, что пучок был бы более устойчив в случае  $\eta\vartheta' < 0$ . Тогда “рабочим” оказался бы левый участок пороговой кривой  $S$ , ограничивающий заметно меньшую по

размеру область неустойчивых параметров вблизи начала координат плоскости  $Y$ . Однако такой выбор для ускорителя  $Y-70$  невозможен по техническим причинам (рабочая клетка бетатронных частот и знак горизонтальной хроматичности на верхнем плато магнитного поля).

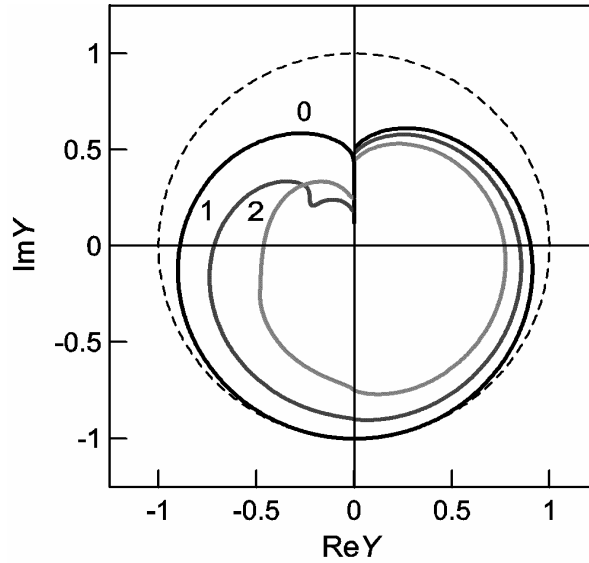


Рис. 7. Пороговая диаграмма.

Достаточное условие устойчивости для системы с пороговой диаграммой, показанной на Рис. 7, имеет вид неравенства  $|Y^{(k)}| \geq \Lambda \cong 1$  (окружность радиуса  $\Lambda$  построена пунктиром). Отсюда следует ограничение на допустимый продольный импеданс:

$$\left| \frac{Z_k(k\omega_0)}{k} \right| \leq \frac{|R|}{\Lambda} \cong \frac{1}{\Lambda} \frac{\beta^2 |\eta| \gamma E_0}{e I_0} \left( \frac{\Delta J}{\eta \omega_0} \right)^2. \quad (43)$$

В приближении азимутально-однородного пучка (9) неравенство (43) переходит в известный критерий устойчивости [4].

Параметры ускорителя  $Y-70$  и ускоряющего напряжения частоты 200 МГц при стохастическом выводе на верхнем плато магнитного поля 1.0470 Т и кинетической энергии пучка 60 ГэВ следующие:  $\gamma E_0 = 60.94$  ГэВ;  $\gamma = 64.95$ ;  $\beta = 0.9999$ ;  $\alpha = 0.01112$ ;  $\eta = 0.01088$ ;  $q = 990$ ;  $\omega_0/2\pi = 202.034$  кГц;  $\omega_{RF}/2\pi = 200.013$  МГц;  $V_{RF} = 500$  кВ;  $\Omega_0/2\pi = 760$  Гц;  $J_S = 6.1$  рад/с. Рассмотрим пучок, содержащий  $N = 3 \cdot 10^{13}$  протонов. Средний ток такого пучка  $I_0 = 0.97$  А. Пороговая величина приведенного импеданса (43) составляет  $|Z_k(k\omega_0)/k| = 0.98$  кОм. Это совпадает с оценкой для азимутально-однородного пучка с распределением (42) и разбросом по импульсам  $\Delta p/p_0 = \pm 1.2 \cdot 10^{-3}$ .

Наиболее неустойчивым оказывается непрерывный пучок перед началом медленного вывода. Размер этого пучка по  $J$  достаточно велик и составляет  $2\Delta J_B = 4.8J_S$ . Области сильной стабилизирующей нелинейности вне пустых сепаратрис соответствует полоса с шириной по  $J$ , примерно равной  $(1-2)J_S$ . Такая локальная нелинейность не в состоянии сколько-нибудь заметно стабилизировать (большой) исходный пучок в  $Y-70$ . Этому также способствует и условие  $\eta\vartheta' > 0$ . Из-за него когерентные возмущения пучка локализуются на склоне  $F_0(J)$ , дальнем от пустых сепаратрис, где продольное движение частиц уже линейно.

Для повышения интенсивности стохастического медленного вывода из  $Y-70$  следует продолжить разработку мер по уменьшению видимого пучком импеданса выключенных (пассивных) резонаторов основной ускоряющей системы, скажем, с помощью цепей обратной связи [8]. Дополнительно имеется возможность использовать вспомогательную ускоряющую систему частоты 200 МГц как для обычной (например, скачок  $\omega_{RF}$ ), так и для шумовой ВЧ-гимнастики.

Ее цель — контролируемое изменение функции распределения  $F_0(J)$  до начала процесса шумового наведения, уменьшающее размер области неустойчивых параметров на пороговой диаграмме Рис. 7.

В ходе же собственно стохастического медленного вывода из У–70 непрерывный пучок, ожидающий вывода, становится все более устойчивым. Он удаляется от порога возникновения продольной неустойчивости быстрее, чем  $1/I_0$ , где  $I_0$  – средний ток пучка в ускорителе. В этом состоит одно из преимуществ метода шумового наведения по сравнению с традиционной схемой медленного вывода, использующей перестраиваемые магнитооптические элементы.

### Заключение

Разработан общий подход к расчету порога возникновения продольной когерентной неустойчивости *непрерывного пучка* (Рис. 1) в протонном синхротроне. Детально рассмотрен частный случай импеданса вакуумной камеры, определяемого доминирующим *узкополосным резонансным элементом* (27), и *длинноволнового возмущения* (36), когда возможно использование известного метода пороговых диаграмм. Такой именно случай реализуется на практике при стохастическом медленном выводе пучка из протонного синхротрона У–70 ГНЦ ИФВЭ.

### Список литературы

- [1] Иванов С.В., Лебедев О.П. *Экспериментальное исследование режима стохастического медленного вывода пучка из синхротрона У–70*. — Приборы и техника эксперимента, 2006, № 2, стр. 14–31.
- [2] Иванов С.В., Лебедев О.П. *Цепь обратной связи для стохастического вывода протонов из синхротрона ИФВЭ. Разработка и эксперименты на пучке*. — Приборы и техника эксперимента, 2006, № 6, стр. 15–28; препринт ИФВЭ ОУ У70 2006 – 3, Протвино, 2006.
- [3] Абрамовиц М., Стиган И. (ред.). *Справочник по специальным функциям*. — М.: Наука, 1979.
- [4] Keil E., Schnell W. *Concerning Longitudinal Stability in the ISR*: Preprint CERN/ISP-RF-TH/69–48, Geneva, 1969.
- [5] Лебедев А.Н. *Когерентные синхротронные колебания при наличии пространственного заряда*. — Атомная Энергия, 1968, том 25, вып. 2, стр. 100 – 104.
- [6] Балбеков В.И., Иванов С.В. *Микроволновая неустойчивость пучка в протонных синхротронах*. — Атомная Энергия, 1985, том 59, вып. 1, стр. 42 – 48; препринт ИФВЭ ОУНК 84 – 28, Серпухов, 1984.
- [7] Балбеков В.И., Иванов С.В. *Пороги продольной неустойчивости сгруппированного пучка в протонных синхротронах*. — Атомная Энергия, 1986, том 60, вып. 1, стр. 45 – 51; препринт ИФВЭ ОУНК 84 – 211, Серпухов, 1984.
- [8] Иванов С.В., Лебедев О.П. *Подавление самогруппировки пучка в ускорителе У–70*: Препринт ИФВЭ ОУ У–70 99 – 39, Протвино, 1999.

*Рукопись поступила 15 октября 2007 г.*

С.В. Иванов

Продольная неустойчивость непрерывного пучка в протонном синхротроне.

Редактор Л.Ф. Васильева.

---

Подписано к печати 17.10.2007. Формат 60x84/8. Офсетная печать.  
Печ. л. 1,625. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 80. Заказ 93. Индекс 3649.  
ЛР №020498 06.04.97.

---

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий,  
142281, Протвино Московской обл.

