ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2008-10
ОЭФ

С.И. Битюков, Н.В. Красников

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЧЕРЕЗ ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Направлено в *ПТЭ*

Протвино 2008

УДК 519.223.2 М–24

Аннотация

Битюков С.И., Красников Н.В. Оценка параметров распределений через доверительные распределения: Препринт ИФВЭ 2008-10. – Протвино, 2008. – 18 с., библиогр.: 40.

В работе дан обзор основных направлений новой методологии в статистическом анализе. Точечное и доверительное оценивание, нахождение $p-$величин и проверка гипотез являются базовым инструментом статистиков, занимающихся обработкой экспериментальных данных. Доверительные распределения, которые можно назвать "распределениями оценок параметров", часто оказываются весьма удобными для построения всех перечисленных выше статистических процедур.

Abstract

Bityukov S.I., Krasnikov N.V. The Estimation of Distributions Parameters Via the Using of Confidence Distributions: IHEP Preprint 2008-10. – Protvino, 2008. – p. 18, refs.: 40.

This paper reviews the new methodology for statistical inferences. Point estimators, confidence intervals and p-values are fundamental tools for frequentist statisticians. Confidence distributions, which can be viewed as "distribution estimators", are often convenient for constructing all of the above statistical procedures plus more.

Введение

В качестве введения сформулируем несколько простых сценариев естественного возникновения понятий *доверительная плотность* и *доверительное распределение.*

0.1. Общие идеи

Если существует процедура, позволяющая установить взаимооднозначное соответствие между наблюдаемым значением случайной переменной и доверительным интервалом для оцениваемого параметра произвольного уровня значимости, то возможно решение более общей задачи — задачи восстановления соответствующей условной плотности распределения возможных значений параметров единственным образом. Эту восстановленную плотность можно назвать доверительной плотностью, а соответствующее ей распределение — доверительным распределением. Точные определения этих понятий будут сформулированы несколько позже в разделах 2 и 4.

Доверительное распределение здесь можно интерпретировать по аналогии с интерпретацией доверительного интервала. Из дуальности между проверкой гипотез и доверительным оцениванием кумулятивная функция доверительного распределения для параметра θ, определенная для θ_0, т.е. $F(\theta_0)$, является p-величиной в случае проверки гипотезы $H_0 : \theta \geq \theta_0$ против ее односторонней альтернативы. Данная модель является компактным представлением информации относительно параметра θ, содержащейся в наблюдаемых данных. Прежде чем данные наблюдались, доверительное распределение есть случайный элемент с интервалом $(F^{-1}(\alpha_1), F^{-1}(1-\alpha_2))$, который покрывает неизвестный параметр с вероятностью $1-\alpha_1-\alpha_2$. После наблюдения данных реализованное доверительное распределение не является распределением вероятностей в частотном смысле. Оно характеризует степень доверия к установленному доверительному интервалу относительно θ.

0.2. Построение Р.А. Фишера

Рассмотрим пример построения Р.А. Фишера (Efron, 1978; Hampel, 2006).

Пусть дана случайная переменная x с параметром θ:

$$x \sim \mathbf{N}(\theta, 1). \tag{1}$$

Здесь функция плотности вероятности есть

$$\varphi(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}. \tag{2}$$

Можно записать это в виде

$$x = \theta + \epsilon, \tag{3}$$

где $\epsilon \sim \mathbf{N}(0, 1)$ и параметр θ является константой.

Пусть $\hat{x}$ есть одиночное наблюдение случайной переменной x. Для нормального распределения $\hat{x}$ является несмещенной оценкой параметра θ, следовательно, $\hat{\theta} = \hat{x}$ можно записать

$$\theta|\hat{x} = \hat{x} - \epsilon. \tag{4}$$

Как известно, $(-\epsilon) \sim \mathbf{N}(0, 1)$ благодаря симметрии плотности нормального распределения относительно центральной точки, т.е.

$$\theta|\hat{x} \sim \mathbf{N}(\hat{x}, 1). \tag{5}$$

Итак, для каждого значения $\hat{x}$ единственным образом строится доверительная плотность параметра θ

$$\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\hat{x}-\theta)^2}{2}}. \tag{6}$$

Как отмечено в работе (Hampel, 2006), “Фишер (Fisher, 1930; 1933) дал корректную интерпретацию этого “заманчивого” результата. Однако, начиная с 1935 г. (Fisher, 1935), Фишер реально предположил, что статус параметра меняется из фиксированной неизвестной постоянной в случайную переменную пространства параметров с известным распределением”. [1]

В принципе, неизвестный параметр θ может быть случайной переменной, если само происхождение параметра имеет случайную природу. Например, масса широкого резонанса или социологические параметры тестируемой группы испытуемых при неконтролируемом случайном внешнем воздействии. В дальнейшем данная возможность в обзоре не рассматривается.

0.3. Соотношение между плотностью вероятности случайной переменной и доверительной плотностью параметра

Рассуждения, приведенные выше, возможны как следствие тождества

$$\int_{-\infty}^{\hat{x}-\alpha_1} \varphi(x|\hat{x})dx + \int_{\hat{x}-\alpha_1}^{\hat{x}+\alpha_2} \tilde{\varphi}(\theta|\hat{x})d\theta + \int_{\hat{x}+\alpha_2}^{\infty} \varphi(x|\hat{x})dx = 1, \tag{7}$$

[1] Историю и развитие поздних идей Фишера можно найти в работе (Hannig, Iyer & Patterson, 2006).

где $\hat{x}$ есть наблюдаемое значение случайной переменной x, а $\hat{x} - \alpha_1$ и $\hat{x} + \alpha_2$ — границы доверительного интервала для параметра положения θ.

Наличие тождеств этого типа (7) является свойством статистически самодуальных распределений [2] (Bityukov & Krasnikov, 2005; Bityukov, Krasnikov, Smirnova & Taperechkina, 2007):

- нормального и нормального

$$\varphi(x|\theta,\sigma) = \tilde{\varphi}(\theta|x,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma = const\ ;$$

- Коши и Коши

$$\varphi(x|\theta,b) = \tilde{\varphi}(\theta|x,b) = \frac{b}{\pi(b^2+(x-\theta)^2)}, \quad b = const\ ;$$

- Лапласа и Лапласа

$$\varphi(x|\theta,b) = \tilde{\varphi}(\theta|x,b) = \frac{1}{2b}e^{-\frac{|x-\theta|}{b}}, \quad b = const.$$

Также самодуальными распределениями являются (Nadarajah, 2008) двойное распределение Рэлея и отраженное гамма-распределение. Тождество (7) позволяет восстановить соответствующую доверительную плотность $\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x},\ldots)$ параметра θ единственным образом.

0.4. Соотношение между плотностью вероятности случайной переменной и доверительной плотностью параметра в случае асимметричных распределений

В случае распределения Пуассона и гамма-распределения также возможен обмен местами случайной переменной и параметра положения при сохранении той же самой формулы распределения вероятностей:

$$f(i|\theta) = \tilde{f}(\theta|i) = \frac{\theta^i e^{-\theta}}{i!}.$$

В этом случае можно использовать другое тождество для связи между плотностью вероятности случайной переменной и доверительной плотностью параметра для однозначного восстановления доверительной плотности (Bityukov & Krasnikov, 2000; Bityukov, 2002; Bityukov & Krasnikov, 2003) (любое другое построение доверительной плотности несовместимо с данным тождеством и, следовательно, нарушает сохранение вероятности):

[2] *Пусть $\phi(x,\theta)$ является функцией двух переменных. Если ту же самую функцию можно рассматривать как семейство плотностей вероятности $\varphi(x|\theta)$ случайной переменной x с параметром θ и как другое семейство плотностей вероятности $\tilde{\varphi}(\theta|x)$ случайной переменной θ с параметром x (т.е. $\phi(x,\theta) = \varphi(x|\theta) = \tilde{\varphi}(\theta|x)$), то данную пару семейств можно назвать статистически дуальными распределениями.*

Если x и θ играют симметричную роль (т.е. $\varphi(x|\theta)$ и $\tilde{\varphi}(\theta|x)$, принадлежат одному и тому же семейству плотностей), то такие распределения называются самодуальными.

$$\sum_{i=\hat{x}+1}^{\infty} f(i|\theta_1) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{f}(\theta|\hat{x})d\theta + \sum_{i=0}^{\hat{x}} f(i|\theta_2) = 1, \tag{8}$$

для любых действительных $\theta_1 \geq 0$ и $\theta_2 \geq 0$ и неотрицательных целых $\hat{x}$. Доверительная плотность $\tilde{f}(\theta|i)$ в данной формуле является плотностью вероятности гамма-распределения $\Gamma_{1,i+1}$.

0.5. Неявные распределения

В статье (Hassairi, Masmoudi & Kokonendji, 2005) предложен подход к использованию неявных распределений для оценки параметра. Неявные распределения, с одной стороны, напоминают апостериорное распределение параметра θ в присутствии определенного априорного распределения для θ. С другой стороны, неявное распределение является фидуциальным распределением θ в отсутствие какого бы то ни было априорного распределения для θ. Упрощенная нормальная модель может быть представлена в следующем виде:

$$p(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}, -\infty \ < \ x, \ \theta \ < \ \infty. \tag{9}$$

Таким образом, при фиксированном θ наблюдаемое значение случайной величины X подчиняется нормальному или Гауссовскому распределению $\mathbf{N}(\theta, 1)$. Авторы отмечают, что x и θ играют симметричные роли (см. подраздел 0.2 во Введении) и, следовательно, θ может также быть рассмотрена как Гауссовская случайная переменная с математическим ожиданием, равным x. Фраза “неявное распределение” была введена в работе (Jϕrgenson, 1997). В статье (Hassairi, Masmoudi & Kokonendji, 2005) неявные распределения объясняются следующим образом: “Так как это — условное распределение параметра, определенное через наблюдаемые данные, неявное распределение может играть ту роль, которую апостериорное распределение играет в Байесовском подходе, в частности, для оценки параметра."

Критический анализ этого подхода дается в статье (Mukhopadhyay, 2006), в которой отмечается, “что авторы работы (Hassairi, Masmoudi & Kokonendji, 2005) могли бы открывать фидуциальные распределения Фишера снова и снова” и, в качестве вывода, делается утверждение о неединственности “неявного распределения” при построении. Тем не менее нужно заметить, что единственность распределений такого типа имеет место во многих случаях. Например, тождества (7) и (8) в данном обзоре обеспечивают соответствующую однозначность для упомянутых выше статистически дуальных распределений.

1. Немного истории

Точечное и доверительное оценивание, определение p-величин в течение долгого времени являются базовым инструментом статистиков-частотников. Доверительные распределения, которые можно рассматривать как “распределение оценок”, часто оказываются востребованными при построении всех указанных выше процедур и дают дополнительные возможности. Понятие доверительное распределение возникло из понятия фидуциальное распределение, введенного Фишером (Fisher, 1930); однако доверительные распределения рассматриваются как чисто частотная концепция. Вместе с тем, как указано в работе (Schweder & Hjort, 2002),

данная концепция является “Неймановской интерпретацией фидуциальных распределений Фишера (Neyman J., 1941)”.

Развитие понятия доверительные распределения шло от статьи (Fisher, 1930) через различные исследования (перечислим только некоторые из них): Колмогорова (Колмогоров, 1942), Питмэна (Pitman, 1957), Эфрона (Efron, 1993; 1998), Фрэзера (Fraser, 1991; 1996), Лемана (Lehmann, 1993), Сингха, Ксие и Стродермана (Singh, Xie & Strawderman, 2001, 2007), Шведера и Хьерта (Schweder & Hjort, 2002, 2003) и других. В работах Битюкова (Bityukov, 2002), Битюкова и Красникова (Bityukov & Krasnikov, 2000, 2003, 2005) развивался подход к восстановлению доверительной плотности параметра через нахождения и использование соответствующих связей между случайной переменной и параметрами. Полученные результаты были проверены методами Монте-Карло (Bityukov, Medvedev, Smirnova & Zernii, 2004), (Barkova, Bityukov, Smirnova, Taperechkina, 2006).

Важным направлением практического использования доверительных распределений является мета-анализ [3]. Последовательная теория комбинирования информации различных независимых источников через использование доверительных распределений предложена в работе (Singh, Xie & Strawderman, 2005). Недавно предложен метод (Bickel, 2006) включения экспертных знаний при комбинировании обобщенных доверительных распределений в частотном подходе. Свойства доверительных плотностей можно использовать при построении комбинированной значимости превышения сигнала над фоном (Bityukov, Krasnikov & Nikitenko, 2006).

Таким образом, рассматриваемая методология активно развивается. Обзор строится в основном на следующих работах: Singh, Xie & Strawderman (2005, 2007), Schweder (2003), Bityukov, Krasnikov (2003), Bityukov, Krasnikov, Smirnova & Taperechkina (2007). В тексте, по возможности, использованы обозначения из оригинальных работ с соответствующими объяснениями там, где это необходимо.

2. Доверительные распределения (Singh, Xie & Strawderman, 2005)

Предположим $X_1, X_2, \ldots, X_n$ есть n независимых случайных величин с функцией распределения $\mathbf{F}$ и χ — выборочное пространство, соответствующее возможным наборам данных $\mathbf{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$. Далее, пусть θ — параметр ассоциированный с $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F}$ может содержать также незначимые параметры) и пусть Θ — пространство параметров.

Определение 1: *Функция $H_n(\cdot) = H_n(X_n, (\cdot))$, определенная на $\chi \times \Theta \to [0,1]$, называется* **доверительным распределением** *для параметра θ, если*
(i) для каждого заданного $\mathbf{X}_n \in \chi$, $H_n(\cdot)$ является непрерывной кумулятивной функцией распределения;
(ii) для истинного значения параметра $\theta = \theta_0, H_n(\theta_0) = H_n(\mathbf{X}_n, \theta_0)$, как функция выборки $\mathbf{X}_n$, имеет равномерное распределение $U(0,1)$ [4].

Функция $H_n(\cdot)$ называется **асимптотическим доверительным распределением**, *если требование (ii) заменить на (ii)‘: для значения $\theta = \theta_0, H_n(\mathbf{X}_n, \theta_0) \xrightarrow{W} U(0,1)$ при $n \to +\infty$ и опустить условие непрерывности для $H_n(\cdot)$.*

[3] Современный термин для направления статистического анализа, занимающегося объединением результатов различных экспериментов (например, Hedges & Olkin, 1985, Cousins, 2007).

[4] В случае статистически дуальных распределений, рассмотренных выше, это следует прямо из существования тождеств, подобных тождествам (7) или (8).

Назовем в случае существования $h_n(\theta) = H_n^{'}(\theta)$ **доверительной плотностью**.

Пункт *(i)* требует, чтобы функция $H_n(\cdot)$ была функцией распределения для каждой выборки.

Пункт *(ii)* подразумевает то, что функция $H_n(\cdot)$ задает информацию на вероятностной шкале, и это обеспечивает нахождение доверительных интервалов и p-величин.

Это следует из определения доверительных распределений при условии $\theta < \theta_0,\ H_n(\theta) \overset{sto}{\leq} 1 - H_n(\theta)$ и $\theta > \theta_0,\ 1 - H_n(\theta) \overset{sto}{\leq} H_n(\theta)$. Здесь знак $\overset{sto}{\leq}$ означает стохастическое сравнение двух случайных переменных, т.е. если для двух случайных переменных Y_1 и Y_2 выполнено $P(Y_1 \leq t) \geq P(Y_2 \leq t)$ при всех t, то $Y_1 \overset{sto}{\leq} Y_2$. Таким образом, доверительное распределение работает, в некотором смысле, подобно стрелке компаса. Оно указывает направление в сторону θ_0 в случае $\theta \neq \theta_0$, придавая стохастически больше массы той стороне (левой или правой) от θ, которая содержит θ_0. Когда они совпадают, то $H_n(\theta) = H_n(\theta_0)$ имеет равномерное распределение $U[0,1]$ и, таким образом, не информативно в смысле выбора направления.

Пусть для каждого α на интервале $(0,1)$ полуинтервал $(-\infty, \xi_n(\alpha)]$ будет $100\alpha\%$ левосторонним доверительным интервалом, где $\xi_n(\alpha) = \xi_n(\mathbf{X}_n, \alpha)$ непрерывна и увеличивается по α для каждой выборки $\mathbf{X}_n$. Тогда $H_n(\cdot) = \xi_n^{-1}(\cdot)$ будет доверительным распределением. В этом случае

$$\{\mathbf{X}_n : H_n(\theta) \leq \alpha\} = \{\mathbf{X}_n : \theta \leq \xi_n(\alpha)\} \tag{10}$$

для любых α на интервале $(0,1)$ и θ из $\Theta \subseteq \mathrm{R}$. Таким образом, при $\theta = \theta_0, P\{H_n(\theta_0) \leq \alpha\} = \alpha$ и $H_n(\theta_0)$ имеет равномерное распределение $U(0,1)$.

3. Информация для статистического вывода, содержащаяся в доверительном распределении (Singh, Xie & Strawderman, 2005)

Доверительное распределение содержит количество информации, сопоставимое, но несколько отличное от содержащегося в распределениях, построенных в рамках Байесовского подхода. Доверительное распределение (или асимптотически доверительное), полученное из функции распределения вероятностей, может также интерпретироваться как апостериорное распределение в объективном Байесовском выводе.

3.1. Примеры

Пример 1. Среднее и дисперсия нормального распределения: Положим $X_1, X_2, \ldots, X_n$ является выборкой из $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, с μ и σ^2 неизвестными. Доверительное распределение μ есть $H_n(y) = F_{t_{n-1}}(\dfrac{y - \bar{X}}{s_n/\sqrt{n}})$, где $\bar{X}$ и s^2 являются, соответственно, средним и дисперсией выборки, и $F_{t_{n-1}}(\cdot)$ — кумулятивная фунция распределения Стьюдента t_{n-1}. Доверителное распределение для σ^2 есть $H_n(y) = 1 - F_{\chi^2_{n-1}}(\dfrac{(n-1)s_n^2}{y})$ для $y \geq 0$, где $F_{\chi^2_{n-1}}(\cdot)$ является кумулятивной функцией χ^2_{n-1}-распределения.

Пример 2. Функция p-величин (процентных величин): Для любого заданного $\tilde{\theta}$ пусть $p_n(\tilde{\theta}) = p_n(\mathbf{X}_n, \tilde{\theta})$ будет p-величиной для одностороннего теста проверки гипотезы $K_0 : \theta \leq \tilde{\theta}$ против гипотезы $K_0 : \theta > \tilde{\theta}$. Предположим, что p-величина возможна для всех $\tilde{\theta}$. Функцию $p_n(\cdot)$ назовем функцией p-величины. Обычно для истинного значения $\theta = \theta_0$, $p_n(\theta_0)$ как функция $\mathbf{X}_n$ является точно (или асимптотически) $U(0,1)$-распределенной. Также $H_n(\cdot) = p_n(\cdot)$ для каждой фиксированной выборки является кумулятивной функцией распределения. Таким образом, обычно $p_n(\cdot)$ удовлетворяет требованиям на доверительные распределения (или на асимптотически доверительные).

Пример 3. Функции правдоподобия: Существует связь между понятиями асимптотически доверительного распределения и различными типами функций правдоподобия. В показательных семействах и профиль правдоподобия и псевдоправдоподобие (Efron, 1993) являются асимптотически доверительными распределениями после нормализации. В работе (Singh, Xie & Strawderman 2001) приводится формальное доказательство, которое показывает, что $e^{l_n^*(\theta)}$ пропорционально плотности асимптотически доверительного распределения для параметра θ, где $l_n^*(\theta) = l_n(\theta) - l_n(\hat{\theta}),\ l_n(\theta)$ является логарифмической функцией правдоподобия, а $\hat{\theta}$ есть оценка максимума правдоподобия для параметра θ.

3.2. Статистический вывод: краткое обобщение

- *Доверительный интервал.* По определению, интервалы $(-\infty, H_n^{-1}(1-\alpha)], [H_n^{-1}(\alpha), +\infty)$ и $(H_n^{-1}(\alpha/2), H_n^{-1}(1-\alpha/2))$ обеспечивают интервалы $100(1-\alpha)\%$ -ного уровня доверия различного вида для параметра θ, для любого $\alpha \in (0,1)$. Точно так же это справедливо для асимптотически доверительных интервалов, для которых заданный уровень доверия достигается в пределе.

- *Точечное оценивание.* Естественный выбор точечных оценок на параметр θ, заданным $H_n(\theta)$, включает медиану $M_n = H_n^{-1}(1/2)$, среднее $\bar{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} t dH_n(t)$ и моду $\hat{\theta} = arg\ max_\theta h_n(\theta),\ h_n(\theta) = H_n'(\theta)$ плотности доверительного распределения.

- *Проверка гипотез.* Из доверительного распределения легко получить p-величины для решения различных проблем при проверке гипотез. В работе (Fraser, 1991) изучались некоторые аспекты функций от p-величин. Естественно рассматривать меру того, как $H_n(\cdot)$ поддерживает нулевую гипотезу. Возможны два типа поддержки:

  1. Сильная поддержка $p_s(C) = \int_C dH_n(\theta)$.

  2. Слабая поддержка $p_w(C) = sup_{\theta \in C} 2min(H_n(\theta), 1 - H_n(\theta))$.

  Если гипотеза K_0 требует покрытия параметра полуинтервалом вида $(-\infty, \theta_0]$ или $[\theta_0, +\infty)$ или объединением конечного числа интервалов, то сильная поддержка $p_s(C)$ ведет к классическим p-величинам.

  Если гипотеза K_0 является требованием на совпадение чисел, так что K_0 есть $\theta = \theta_0$, то слабая поддержка $p_w(C)$ ведет к классическим p-величинам.

3.3. Комбинирование доверительных распределений

Понятие доверительная плотность привлекательно для задач комбинирования информации. Основной причиной здесь является то, что доверительные распределения относительно легко строятся и интерпретируются, а также содержат в себе достаточное количество информации о параметре θ.

Пусть $H_1(y), \ldots, H_L(y)$ есть L независимых доверительных распределений с одним и тем же истинным значением θ_0 параметра. Предположим, что произвольная непрерывная функция $g_c(U_1, \ldots, U_L)$, отображающая $[0,1]^L$ на R, монотонна по каждой координате. Общий подход к объединению оценок в зависимости от $g_c(U_1, \ldots, U_L)$ можно описать следующим образом.

Определим $H_c(U_1, \ldots, U_L) = G_c(g_c(U_1, \ldots, U_L))$, где $G_c(\cdot)$ является непрерывной кумулятивной функцией $g_c(U_1, \ldots, U_L)$ и $U_1, \ldots, U_L$ — независимые равномерно распределенные $(U(0,1))$ случайные переменные.

Обозначим $H_c(y) = H_c(H_1(y), \ldots, H_L(y))$. Легко проверить, что $H_c(y)$ является доверительным распределением для параметра θ. Назовем $H_c(y)$ комбинированным доверительным распределением. Если задача состоит только в получении комбинированного асимптотического доверительного распределения, то в функции g_c можно позволить использование выборочной оценки.

Пусть $F_0(\cdot)$ будет любой непрерывной кумулятивной функцией распределения и $F_0^{-1}(\cdot)$ будет соответствующей обратной функцией. Удобным специальным примером функции g_c является

$$g_c(U_1, \ldots, U_L) = F_0^{-1}(U_1) + \ldots + F_0^{-1}(U_L).$$

В этом случае $G_c(\cdot) = F_0 * \ldots * F_0(\cdot)$, где $*$ обозначает свертку. Точно так же, как при комбинировании p-величин, этот общий рецепт комбинирования доверительных распределений легко и просто осуществить. Вот несколько примеров F_0:

- $F_0(t) = \Phi(t)$ — кумулятивная функция стандартного нормального распределения. В этом случае

$$H_{NM}(y) = \Phi(\frac{1}{\sqrt{L}}[\Phi^{-1}(H_1(y)) + \ldots + \Phi^{-1}(H_L(y))]).$$

- $F_0(t) = 1 - e^{-t}$, для $t \geq 0$, — кумулятивная функция стандартного экспоненциального распределения (со средним 1). Здесь комбинированным доверительным распределением будет (известный метод омнибуса Фишера)

$$H_{E1}(y) = P(\chi^2_{2L} \leq -2\sum_{i=1}^{L} log(1 - H_i(y))),$$

где χ^2_{2L} есть χ^2-распределенная случайная переменная с $2L$ степенями свободы.

- $F_0(t) = \frac{1}{2}e^t \mathbf{1}_{(t\leq 0)} + (1 - \frac{1}{2}e^{-t})\mathbf{1}_{(t\geq 0)}$, обозначаемая дальше как $DE(t)$, кумулятивная функция стандартного двойного экспоненциального распределения, где $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ индикаторная функция. Тогда комбинированным доверительным распределением будет

$$H_{DE}(y) = DE_L(DE^{-1}(H_1(y)) + \ldots + DE^{-1}(H_L(y))),$$

где $DE_L(t) = DE * \ldots * DE(t)$ есть конволюция L копий $DE(t)$ (комбинирование двойного экспоненциального распределения максимизирует наклон Бахадура).

4. Доверительные распределения — другие подходы

4.1. Доверительные распределения и пивоты (Schweder, 2003)

Рассмотрим статистическую модель для данных X. Модель состоит из семейства распределений вероятностей для X, зависящих от векторного параметра (ψ, χ), где ψ — основной скалярный параметр а χ — вектор незначимых параметров.

Определение 2 : *Однопараметрическое распределение, зависящее от выборки, для параметра ψ с кумулятивной функцией распределения $C(\psi; X)$ и с функцией квантилей $C^{-1}(\alpha; X)$ является точным доверительным распределением, если*

$$P_{\psi,\chi}(\psi \leq C^{-1}(\alpha; X)) = P_{\psi,\chi}(C^{-1}(\alpha; X) \leq \alpha) = \alpha$$

для всех $\alpha \in (0, 1)$ и для всех распределений вероятностей в статистической модели.

По определению, случайный интервал $(-\infty, C^{-1}(\alpha; X))$ покрывает ψ с вероятностью α, и это есть метод одностороннего доверительного интервала с вероятностью покрытия параметра α. Интервал $(C^{-1}(\alpha; X), C^{-1}(\beta; X))$ по тем же самым причинам будет покрывать ψ с вероятностью $\beta - \alpha$, и это есть метод построения доверительного интервала с соответствующей вероятностью покрытия. После того, как данные наблюдены $X = x$, численно реализованный интервал $(C^{-1}(\alpha; x), C^{-1}(\beta; x))$ будет или покрывать или не покрывать истинное значение параметра ψ. Степень доверия $\beta - \alpha$, соответствующая реализованному интервалу, наследует вероятность покрытия случайного интервала. Доверительное распределение имеет те же самые дуальные свойства. До наблюдения (априори) доверительное распределение есть случайный объект с вероятностными свойствами. После наблюдения выборки (апостериори) доверительное распределение является распределением доверия, ассоциированным с интервальными утверждениями. Для простоты в дальнейшем степень доверия будем называть доверием.

Реализованное доверие $C(\psi; x)$ есть p-величина односторонней гипотезы $H_0 : \psi \leq \psi_0$ против $\psi > \psi_0$, когда наблюдаемые данные есть x. Априорное доверие $C(\psi; X)$ по определению распределено равномерно. p-величина — это только преобразование тестовой статистики в общую шкалу равномерных распределений (априорных). Реализованная p-величина при проверке двусторонней гипотезы $H_0 : \psi = \psi_0$ против $\psi \neq \psi_0$ есть $2\ min\{C(\psi_0), 1 - C(\psi_0)\}$.

Доверительные распределения легко построить, когда можно идентифицировать некоторые структуры, называемые пивотами [5] (Barndorff-Nielsen & Cox, 1994).

[5] Pivot — точка опоры, ось вращения. Иногда pivotal functions в нашей литературе называют центральными функциями (Уилкс, 1967). Самодуальность в (7) эквивалентна существованию линейного и симметрично распределенного пивота.

Функция данных и основного параметра $p(X, \psi)$ является пивотом, если распределение вероятностей $p(X, \psi)$ является тем же самым для всех (ψ, χ) и функция $p(X, \psi)$ увеличивается по ψ для почти всех x.

Если основываться на пивоте с кумулятивной функцией распределения F, то кумулятивным доверительным распределением будет

$$C(X, \psi) = F(p(X, \psi)).$$

По определению, доверительное распределение существует тогда и только тогда, когда существует равномерно распределенный пивот, т. е.

$$C(X, \psi) \sim U.$$

Пример: линейность и нормальность

В линейной нормальной модели линейный параметр μ имеет нормально распределенную оценку $\hat{\mu}$ и независимую оценку стандартного отклонения $\hat{\sigma}$. Тогда

$$\frac{\mu - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \sim t_\nu$$

означает, что выражение слева имеет t-распределение Стьюдента с ν степенями свободы независимо от параметров μ и σ и, таким образом, пивот. С F_ν, являющейся кумулятивным t-распределением,

$$C(\mu) = F_\nu(\frac{\mu - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}})$$

будет доверительным распределением Стьюдента.

Фидуциальный аргумент Фишера в этом случае звучит так:

$$\frac{\mu - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \sim t_\nu \Longrightarrow \mu \sim \hat{\mu} + \hat{\sigma} t_\nu,$$

и означает, что доверительное распределение есть t-распределение, нормированное посредством $\hat{\sigma}$ и локализованное через $\hat{\mu}$. Это есть априорная спецификация с $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, рассматриваемыми как случайные величины до измерений, и апостериорная — с наблюдаемыми значениями этих переменных.

Выборочные распределения для оценки стандартной ошибки связаны с хи-квадрат распределением χ^2_ν. Это задается через пивот

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sigma} \sim \sqrt{\frac{\chi^2_\nu}{\nu}},$$

т.е. доверительное распределение

$$C(\sigma) = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{\nu}{\chi^2_\nu}}.$$

Выборочные распределения отличны от доверительных распределений. Выборочное распределение оценки $\hat{\psi}$ при наблюдении $\psi = \hat{\psi}_{obs}$ имеет кумулятивную функцию распределения

$$S(\psi) = P_{\hat{\psi}_{obs}}(\hat{\psi} \leq \psi) = F_{\hat{\psi}_{obs}}(\psi).$$

Однако кумулятивное доверительное распределение является p-величиной:

$$C(\psi) = P_{\psi}(\hat{\psi} > \hat{\psi}_{obs}) = 1 - F_{\psi}(\hat{\psi}_{obs}).$$

4.2. Преобразование между пространством наблюдаемых величин и пространством возможных значений параметра (Bityukov, Krasnikov, Smirnova & Taperechkina, 2007)

Как обсуждалось выше, восстановление доверительной плотности единственно, если имеют место соответствующие тождества, например (7) или (8). Это означает, что существует преобразование (как для пары семейств распределений Пуассона и гамма-распределений, так и для самодуальных распределений)

$$\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}) = T_{cd}\hat{x} \tag{11}$$

между пространством реализаций $\hat{x}$ случайной переменной x (с плотностью вероятности $\varphi(x|\theta)$) и пространством возможных значений параметра θ (с плотностью вероятности $\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x})$). Здесь T_{cd} является оператором преобразования. Это преобразование позволяет использовать стандартные статистические методы работы со случайной переменной для оценки неизвестного параметра.

Простейший пример этого дается при работе со случайными переменными из одного семейства распределений, сумма которых подчиняется тому же самому распределению. Как известно, распределение Пуассона, гамма, нормальное и Коши-распределения обладают этим свойством (т.е. сумма независимых и идентично распределенных случайных величин, подчиняющихся одному из перечисленных выше распределений, также подчиняется распределению из того же семейства). Применив преобразование (11) к такой сумме, можно восстановить доверительную плотность параметра для случая нескольких наблюдений. Это означает, что можно установить связь

$$\tilde{\varphi}(n\theta|\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \ldots + \hat{x}_n) = T_{cd}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \ldots + \hat{x}_n), \tag{12}$$

где T_{cd} есть оператор преобразования (11), набор $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n$ есть наблюденная выборка. Используя эту связь, восстанавливается доверительная плотность параметра θ, т.е. $\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$.

Использование доверительной плотности в этом случае можно переформулировать в рамках Байесовского подхода.

Рассмотрим, например, распределение Коши. В предложенном подходе предполагается, что параметр θ — неслучайная величина и, следовательно, до измерений нельзя отдать предпочтение какому-нибудь из возможных значений параметра, т.е. все возможные значения параметра равновероятны, и априорным распределением θ является равномерное распределение $\pi(\theta) = const$. Предположим, что наблюдалось значение $\hat{x}_1$, и априорное

распределение обновляется посредством преобразования (11), чтобы получить плотность $\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}_1)$, которая является плотностью распределения Коши. Эта плотность становится новым априорным распределением перед очередным наблюдением $\hat{x}_2$. Легко показать, что в случае наблюдения $\hat{x}_2$ восстановленная доверительная плотность (или следующее новое априорное распределение) есть $\tilde{\varphi}(2\theta|\hat{x}_1+\hat{x}_2)$ [6] и также является плотностью распределения Коши. По индукции этот аргумент распространяется на последовательность любого числа наблюдений (см. (12)). Каждое новое наблюдение $\hat{x}_i$ обеспечивает новую доверительную плотность параметра

$$\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_i) \Leftarrow \tilde{\varphi}(i\theta|\hat{x}_1+\hat{x}_2+\ldots+\hat{x}_i),\ i\ =\ 1,\ n.$$

Это означает, что построена итеративная процедура

$$\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_{n-1},\hat{x}_n) = T_{pd}(\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_{n-1}),\hat{x}_n), \tag{13}$$

где T_{pd} — оператор преобразования между априорной доверительной плотностью $\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_{n-1})$ и апостериорной доверительной плотностью $\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_{n-1},\hat{x}_n)$ параметра θ.

Отметим, что априорная доверительная плотность здесь есть только результат прямых вычислений вероятностей в рамках преобразования T_{pd} с использованием знания о законе распределения случайной величины, т.е. доверительная плотность строится без каких-нибудь предположений об априорном распределении. С другой стороны, любое априорное знание о распределении параметра в случае случайной природы параметра может быть встроено в данную процедуру получения доверительных плотностей без особых сложностей.

5. Применения доверительных распределений

5.1. Доверительные интервалы на сигнал при наличии неотделимого фона (Bityukov, Krasnikov, Smirnova & Taperechkina, 2007)

Доверительная плотность — это более информативное понятие, чем доверительный интервал. Например, гамма-распределение $\Gamma_{1,\hat{n}+1}$ является доверительной плотностью параметра распределения Пуассона в случае $\hat{n}$ наблюденных событий из Пуассоновского потока событий. Это означает, что можно восстановить любой доверительный интервал (наименьшей длины, центральный, ...) прямым вычислением плотности гамма-распределения. Проиллюстрируем это преимущество простым примером.

Пусть изучается распределение Пуассона, образованное двумя компонентами, также подчиняющимися распределению Пуассона: сигнальная компонента с неизвестным параметром μ_s и фоновая компонента с известным параметром μ_b. Чтобы построить доверительный интервал для неизвестного параметра μ_s в случае наблюдения $\hat{n}$ событий, необходимо найти доверительную плотность $\tilde{f}(\mu_s|\hat{n})$.

[6] Как известно, если $\varphi(x_1|\theta_1,b_1) = \frac{b_1}{\pi(b_1^2+(x_1-\theta_1)^2)}$ и $\varphi(x_2|\theta_2,b_2) = \frac{b_2}{\pi(b_2^2+(x_2-\theta_2)^2)}$, то $\varphi(x_1+x_2|\theta_1+\theta_2,b_1+b_2) = \frac{b_1+b_2}{\pi((b_1+b_2)^2+((x_1+x_2)-(\theta_1+\theta_2))^2)}$ со статистически дуальным распределением $\tilde{\varphi}(\theta_1+\theta_2|x_1+x_2,b_1+b_2) = \frac{b_1+b_2}{\pi((b_1+b_2)^2+((x_1+x_2)-(\theta_1+\theta_2))^2)}$. Это означает, что можно восстановить $\tilde{\varphi}(\theta|\hat{x}_1,\hat{x}_2)$, используя $\tilde{\varphi}(2\theta|\hat{x}_1+\hat{x}_2,2b)$ (в данном случае $\theta_1=\theta_2=\theta$ and $b_1=b_2=b$).

Сначала рассмотрим простейший случай $\hat{n} = \hat{s} + \hat{b} = 1$. Здесь $\hat{s}$ есть число сигнальных событий и $\hat{b}$ — число фоновых событий, содержащихся среди наблюденных $\hat{n}$ событий.

$\hat{b}$ может быть равно либо 0, либо 1. Известно, что $\hat{b}$ равно 0 с вероятностью

$$p_0 = P(\hat{b} = 0) = \frac{\mu_b^0}{0!} e^{-\mu_b} = e^{-\mu_b} \tag{14}$$

и $\hat{b}$ равно 1 с вероятностью

$$p_1 = P(\hat{b} = 1) = \frac{\mu_b^1}{1!} e^{-\mu_b} = \mu_b e^{-\mu_b}. \tag{15}$$

Соответственно,

$$P(\hat{b} = 0|\hat{n} = 1) = P(\hat{s} = 1|\hat{n} = 1) = \frac{p_0}{p_0 + p_1}$$

и

$$P(\hat{b} = 1|\hat{n} = 1) = P(\hat{s} = 0|\hat{n} = 1) = \frac{p_1}{p_0 + p_1}.$$

Это означает, что доверительная плотность $\tilde{f}(\mu_s|\hat{n} = 1)$ равна взвешенной сумме соответствующих доверительных плотностей $\tilde{f}(\mu_s|\hat{s} = 0)$ и $\tilde{f}(\mu_s|\hat{s} = 1)$

$$\tilde{f}(\mu_s|\hat{n} = 1) = P(\hat{s} = 1|\hat{n} = 1)\tilde{f}(\mu_s|\hat{s} = 1) + P(\hat{s} = 0|\hat{n} = 1)\tilde{f}(\mu_s|\hat{s} = 0), \tag{16}$$

где доверительная плотность $\tilde{f}(\mu_s|\hat{s} = 0)$ — это гамма-распределение $\Gamma_{1,1}$ с плотностью вероятности

$$\tilde{f}(\mu_s|\hat{s} = 0) = e^{-\mu_s},$$

и доверительная плотность $\tilde{f}(\mu_s|\hat{s} = 1)$ — тоже гамма-распределение $\Gamma_{1,2}$ с плотностью вероятности

$$\tilde{f}(\mu_s|\hat{s} = 1) = \mu_s e^{-\mu_s}.$$

Как результат, доверительная плотность параметра μ_s равна

$$\tilde{f}(\mu_s|\hat{n} = 1) = \frac{\mu_s + \mu_b}{1 + \mu_b} e^{-\mu_s}. \tag{17}$$

Используя эту формулу для $\tilde{f}(\mu_s|\hat{n} = 1)$, доверительный интервал, например наименьшей длины, можно построить достаточно просто.

Точно так же можно построить доверительную плотность параметра $\tilde{f}(\mu_s|\hat{n})$ для любого значения $\hat{n}$ и μ_b. Здесь мы используем доверительную плотность $\tilde{f}(\mu_s|\hat{s} = i)$, $i = 0$, $\hat{n}$ из (8). Смешивая вместе доверительные плотности с соответствующими весами (по аналогии с (16)), можно вычислить доверительную плотность

$$\tilde{f}(\mu_s|\hat{n}) = \frac{(\mu_s + \mu_b)^{\hat{n}}}{\hat{n}! \sum_{i=0}^{\hat{n}} \frac{\mu_b^i}{i!}} e^{-\mu_s}. \tag{18}$$

Это известная формула (Helene, 1988; Zech, 1989; D'Agostini G., 1999). Численные результаты вычислений доверительных интервалов наименьшей длины по данной формуле совпадают с результатами, полученными в Байесовском подходе в предположении равномерного априорного распределения параметра.

5.2. Оценка качества планируемого эксперимента (Bityukov & Krasnikov, 2003)

Рассмотрим оценивание качества планируемого эксперимента как еще один пример использования доверительной плотности. Здесь используется подход, основанный на анализе неопределенности, которая имеет место при рассмотрении будущей проверки гипотезы о наблюдении нового явления в планируемом эксперименте. Снова рассматривается распределение Пуассона с параметром μ, и все обозначения предыдущего подраздела сохранены.

Проверяется простая статистическая гипотеза

H_0: *новое явление существует* (т.е. $\mu = \mu_s + \mu_b$)

против простой альтернативной гипотезы

H_1: *новое явление отсутствует* (т.е. $\mu = \mu_b$).

Величина неопределенности определяется вероятностью отвергнуть гипотезу H_0, если новое явление существует (ошибка I рода α), и вероятностью принять гипотезу H_0, если справедлива гипотеза H_1 (ошибка II рода β). Эта неопределенность характеризует разделимость гипотез при некотором выборе критической области.

Пусть обе величины μ_s и μ_b, которые определены в предыдущем подразделе, точно известны. В этом простейшем случае ошибки I и II рода, которые будут иметь место при проверке гипотезы H_0 против гипотезы H_1, можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha = \sum\limits_{i=0}^{n_c} f(i|\mu_s + \mu_b), \\ \beta = 1 - \sum\limits_{i=0}^{n_c} f(i|\mu_b), \end{cases} \tag{19}$$

где f есть функция распределения вероятностей для распределения Пуассона, а n_c есть критическая величина.

Пусть величины $\hat{\mu}_s = \hat{s}$ и $\hat{\mu}_b = \hat{b}$ известны, например из Монте-Карло эксперимента с интегральной светимостью [7], которая точно совпадает с интегральной светимостью планируемого эксперимента. Это означает, что значения μ_s и μ_b известны с неопределенностью и эту неопределенность нужно включить в систему уравнений (19). Как было показано (Bityukov, 2002) (см. в той же ссылке обобщение для произвольной интегральной светимости Монте-Карло эксперимента), учет этой неопределенности приводит к системе уравнений

[7] Интегральная светимость является мерой интенсивности столкновения частиц в экспериментах на коллайдерах. В теории рассеяния и ускорительной физике под светимостью понимается число частиц, падающих на единицу площади в единицу времени, умноженное на непрозрачность мишени, которая учитывает сечение взаимодействия частицы с мишенью. Интегральная светимость, соответственно, является интегралом светимости по времени.

$$\begin{cases} \alpha = \int_0^\infty \tilde{f}(\mu|\hat{s}+\hat{b}) \sum_{i=0}^{n_c} f(i|\mu) d\mu = \sum_{i=0}^{n_c} \frac{C^i_{\hat{s}+\hat{b}+i}}{2^{\hat{s}+\hat{b}+i+1}}, \\ \beta = 1 - \int_0^\infty \tilde{f}(\mu|\hat{b}) \sum_{i=0}^{n_c} f(i|\mu) d\mu = 1 - \sum_{i=0}^{n_c} \frac{C^i_{\hat{b}+i}}{2^{\hat{b}+i+1}}, \end{cases} \tag{20}$$

где критическую величину n_c для проверки гипотезы о наблюдаемости нового явления можно выбрать, например, в согласии с тестом равной вероятности, а C^i_N означает $\frac{N!}{i!(N-i)!}$.

Отметим, что в данном случае распределение Пуассона является априорным распределением ожидаемых вероятностей, а отрицательное биномиальное распределение (распределение Паскаля) является апостериорным распределением ожидаемых вероятностей для случайной переменной. Данное преобразование есть преобразование оцененных доверительных плотностей $\tilde{f}(\mu|\hat{s}+\hat{b})$ и $\tilde{f}(\mu|\hat{b})$ (плотности вероятности для соответствующих $\Gamma-$распределений) в пространство ожидаемых величин случайной переменной. Таким образом, мы предсказываем вероятности возможных реализаций случайной переменной, т.е. вероятности исхода измерений с учетом неопределенностей в оцененных величинах параметров.

Заключение

Понятие доверительного распределения, как частотная концепция, является существенно Неймановской интерпретацией фидуциального распределения Фишера. Оно содержит информацию для частотного вывода любого вида. Доверительное распределение — это прямое обобщение доверительного интервала и является удобным инструментом представления результатов статистического вывода.

В контексте доверительных распределений будет уместным привести цитату Брэдли Эфрона (Efron, 1998) по поводу фидуциальных распределений Фишера: "... Можно сделать предсказание на 21-е столетие: от статистиков будут требовать решения все более сложных проблем. Я верю в то, что методы объективного Байесовского подхода будут развиваться для их решения и что что-нибудь вроде фидуциального вывода будет играть важную роль в этом развитии. Может быть самое главное заблуждение Фишера станет большим хитом 21-го века!"

Авторы благодарны В.Б. Гаврилову, В.А. Качанову, Л. Лайонсу и В.А. Матвееву за поддержку данной работы. Многие идеи работы оформились в обсуждениях и спорах с К. Вульц, С. Глейзером, А.М. Гордеенко, Г. Кованом, Р.Д. Кузинсом, А. Никитенко и В.А. Таперечкиной. Существенный вклад в работу советами и важными ссылками внесли Л. Демортьер, Д. Кокс, М. Ксие, К. Сингх и Б. Эфрон. Особенно хотим отметить плодотворные дискуссии с сотрудниками ИФВЭ Протвино В.Б. Аникеевым, Ю.П. Гузом, Н.В. Минаевым, В.Ф. Образцовым, С.А. Садовским, В.В. Смирновой, М.Н. Ухановым, Ю.А. Харловым и сотрудниками ИЯИ РАН Ю.М. Андреевым, С.Н. Гниненко, А.Л. Катаевым, А.Н. Торопиным.

Работа поддержана грантами РФФИ 07-02-00256 и 08-02-91007.

Список литературы

[1] Колмогоров А.Н. (1942). Определение центра рассеивания и меры точности по ограниченному числу наблюдений. *Известия Академии наук СССР, Серия математическая*, **6**, 3–32.

[2] Уилкс С. (1967). *Математическая статистика*, Москва, "Наука", с. 379.

[3] Barkova E.A., Bityukov S.I., Smirnova V.V. & Taperechkina V.A. (2006). On the Confidence Density of the Laplace Distribution. *Proceedings of the Conference "Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education"*, Dubna: JINR.

[4] Barndorff-Nielsen O.E. & Cox D.R. (1994). *Inference and Asymptotics*, London: Chapman & Hall.

[5] Bickel D.R. (2006). Incorporating expert knowledge into frequentist interface by combining generalized confidence distributions, arXiv: math/**0602377**.

[6] Bityukov S.I. & Krasnikov N.V. (2000). *Confidence intervals for the parameter of Poisson distribution in presence of background*, arXiv: **physics/0009064**.

[7] Bityukov S.I. (2002). On the Signal Significance in the Presence of Systematic and Statistical Uncertainties. *Journal of high energy physics*, **09**, 060.

[8] Bityukov S.I. & Krasnikov N.V. (2003). Signal Significance in the Presence of Systematic and Statistical Uncertainties. *Nucl.Instr.&Meth.*, **A502**, 795–798.

[9] Bityukov S.I., Medvedev V.A., Smirnova V.V. & Zernii Yu.V. (2004). Experimental test of the probability density function of true value of Poisson distribution parameter by single observation of number of events. *Nucl.Instr.&Meth.*, **A534**, 228–231.

[10] Bityukov S.I. & Krasnikov N.V. (2005). Statistically dual distributions and conjugate families. *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, Eds K.H. Knuth, A.E. Abbas, R.D. Morris, J.P. Castle, *AIP Conference Proceedings* **803**, 398–402. Melville, NY.

[11] Bityukov S., Krasnikov N. & Nikitenko A. (2006). On the combining significance, arXiv: physics/**0612178**.

[12] Bityukov S.I., Krasnikov N.V., Smirnova V.V., & Taperechkina V.A. (2007). The transform between the space of observed values and the space of possible values of the parameter. *Proceedings of Science*, PoS (ACAT) 062.

[13] Cousins R.D. (2007). Annotated bibliography of some papers on combining significances or p-values, arXiv: **0705.2209** [physics.data-an].

[14] D'Agostini G. (1999). Bayesian Reasoning in High-Energy Physics: Principles and Applications. *Yellow Report CERN* **99-03**, – Geneva, Switzerland, p.95; arXiv: hep-ph/9512295.

[15] Efron B. (1978). Controversies in the Foundations of Statistics, *The American Mathematical Monthly*, **85(4)**, 231–246.

[16] Efron B. (1993). Bayes and likelihood calculations from confidence intervals. *Biometrika*, **80**, 3–26. MR1225211.

[17] Efron B. (1998). R.A. Fisher in the 21st Century. *Stat.Sci.*, **13**, 95–122.

[18] Fisher R.A. (1930). Inverse probability. *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*, **26**, 528–535.

[19] Fisher R.A. (1933). The concepts of inverse probability and fiducial probability referring to unknown parameters. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **139**, 343–348.

[20] Fisher R.A. (1935). The fiducial argument in statistical inference. *Annals of Eugenics*, **6**, 391–398.

[21] Fraser D.A.S. (1991). Statistical inference: Likelihood to significance. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **86**, 258–265. MR1137116.

[22] Fraser D.A.S. (1996). Comments on "Pivotal inference and the fiducial argument", by G. A. Barnard. *Internat. Statist. Rev.*, **64**, 231-235.

[23] Hampel F. (2006). The proper fiducial argument. *Lecture Notes in Computer Science*, **4123**, 512–526.

[24] Hannig J., Iyer H. & Patterson P. (2006). Fiducial Generalized Confidence Intervals. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **101**, 254–269.

[25] Hassairi A., Masmoudi A., & Kokonendji C.C. (2005). Implicit distributions and estimation. *Commun. Statist. Theor. Meth.*, **34**, 245–252.

[26] Hedges L.V. & Olkin I.(1985). *Statistical methods for meta-analysis*, Orlando: Academic Press.

[27] Helene O. (1988). G.P. Yost et.al., Rev.Part.Prop., *Phys.Lett.*, **B204**, p.81.

[28] Jϕrgenson, B. (1997). *The theory of dispersion models*, London: Chapman & Hall.

[29] Lehmann E.L. (1993). The Fisher, Neyman-Pearson theories of testing hypotheses:One theory or two? *J. Amer. Statist. Assoc.*, **88**, 1242–1249. MR1245356.

[30] Mukhopadhyay, N. (2006). Some comments on Hassairi et al's "Implicit distributions and estimation". *Commun. Statist. Theor. Meth.*, **35**, 293–297.

[31] Nadarajah, S. (2008). PDFs and Dual PDFs. To be published.

[32] Neyman J. (1941). Fiducial argument and the theory of confidence intervals. *Biometrika*, **32**, 128–150. MR5582.

[33] Pitman P.J.G. (1957). Statistics and Science. *J.Amer.Statist.Assoc.*, **52**, 322–330.

[34] Schweder T. & Hjort N.L. (2002). Confidence and likelihood. *Scand. J. Statist.*, **29**, 309–332.

[35] Schweder T. & Hjort N.L. (2003). Frequentist analogies of Priors and Posteriors, in *Econometrics and the Philosophy of Economics*, pp.285–317. Princeton University Press.

[36] Schweder T. (2003). Integrative fish stock assessment by frequentist methods: confidence distributions and likelihoods for howhead whales. *Scientia Marina*, **67**, 89–07.

[37] Singh K., Xie M. & Strawderman W. (2001). Confidence distributions – concept, theory and applications. Technical report, Dept.Statistics, Rutgers Univ., Revised, 2004.

[38] Singh K., Xie M. & Strawderman W. (2005). Combining information from independent sources through confidence distributions. *The Annals of Statistics*, **33**, 159–183.

[39] Singh K., Xie M. & Strawderman W. (2007). Confidence distributions (CD) – Distribution Estimator of a Parameter, *IMS Lecture Notes Monograph Series*, **54**, 132–150.

[40] Zech G. (1989). Upper limits in experiments with background or measurement errors. *Nucl.Instr.&Meth.*, **A 277**, 608.

Рукопись поступила 1 июля 2008 г.

С.И. Битюков, Н.В. Красников
Оценка параметров распределений через доверительные распределения.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.

Редактор Н.В.Ежела.

Подписано к печати 02.07.2008. Формат $60 \times 84/8$.
Офсетная печать. Печ.л. 2.25 Уч.-изд.л. 1,95. Тираж 80. Заказ 56.
Индекс 3649. ЛР 020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2008–10, И Ф В Э, 2008