ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2009–1
ОЭФ–ОТФ

С.В. Донсков, А.К. Лиходед, А.В. Лучинский, В.Д. Самойленко

# Скалярные мезоны $\sigma$ и $a_0$ в распаде $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$

Направлено в *ЯФ*

Протвино 2009

УДК 519.6 М–24

**Аннотация**

Донсков С.В., Лиходед А.К., Лучинский А.В., Самойленко В.Д. Скалярные мезоны $\sigma$ и $a_0$ в распаде $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$: Препринт ИФВЭ 2009–1. – Протвино, 2009. – 9 с., 4 рис., библиогр.: 9.

Проведено изучение матричного элемента распада $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$ с учетом скалярных мезонов $\sigma$ и $a_0$. Получено хорошее согласие с экспериментальными данными.

**Abstract**

Donskov S.V., Likhoded A.K, Luchinsky A.V., Samoylenko V.D. Scalar Mesons $\sigma$ and $a_0$ in Decay $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$: IHEP Preprint 2009–1. – Protvino, 2009. – p. 9, figs. 4, refs.: 9.

The decay $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$ was been studied with scalar mesons $\sigma$ and $a_0$. A good agreement with experimental data was achieved.

## Введение

История прецизионного изучения распада

$$\eta' \to \eta\pi^0\pi^0 \tag{1}$$

начинается с работы [1], где впервые с высокой точностью были определены параметры квадрата матричного элемента распада (1) в линейном приближении. Используемая тогда феноменологическая модель основана на разложении квадрата матричного элемента $M^2$ по переменным Далитца $X$ и $Y$:

$$X = \frac{\sqrt{3}}{Q}(T_{\pi^0_1} - T_{\pi^0_2}),\ Y = (2 + \frac{m_\eta}{m_{\pi^0}})\frac{T_\eta}{Q} - 1, \tag{2}$$

где $T_{\pi^0_1}, T_{\pi^0_2}, T_\eta$ — кинетические энергии $\pi^0$- и $\eta$-мезонов в системе покоя $\eta'$-мезона ($T_{\pi^0_1} > T_{\pi^0_2}$), $Q = T_{\pi^0_1} + T_{\pi^0_2} + T_\eta = m_{\eta'} - m_\eta - 2m_{\pi^0}$. В настоящее время распространено представление с учетом квадратичных членов:

$$|M|^2 \propto 1 + aY + bY^2 + cX + dX^2, \tag{3}$$

$a, b, c, d$ — действительные параметры.

Этот подход был применен в последующих работах по изучению распада (1) в нейтральной [2] и заряженной [3] модах. В обоих случаях получено неплохое согласие в величинах коэффициентов разложения (3) и наблюдался квадратичный член $dX^2$.

Процесс $\eta' \to \eta\pi\pi$ исследовался теоретически во многих работах, главным образом в контексте его связи с киральной теорией возмущений [5], что и определяло вид степенного разложения по $X$, $Y$. Все эффекты обмена резонансными состояниями представлены в таком формализме в виде набора контактных членов. Но масса $\eta'$-мезона велика настолько, что, как показано в работе [6], в физической области распада следует учитывать кинематическую зависимость матричного элемента, связанную с пропагаторами скалярных мезонов $\sigma$, $f_0$, $a_0$. В этой же работе показано, что вклад контактного члена в вероятность распада $\eta' \to \eta\pi\pi$ пренебрежимо мал, и доминируют вклады $\sigma$-, $a_0$-мезонов и их интерференция.

Заметим, что в вышеупомянутой статье оба вклада от $a_0$- и $\sigma$-мезонов параметризованы обычной Брейт–Вигнеровской формулой, хотя в последнее время появился ряд работ, посвященных исследованию $\sigma$-резонанса, в которых получены новые результаты по определению $\pi\pi$-амплитуды в низкоэнергетической области с учетом аналитичности, унитарности и ее киральных свойств [6]. Поэтому в настоящей работе, в отличие от работы [6], где анализировались только парциальные ширины, мы опишем Далитц–плот распада $\eta' \to \eta\pi\pi$ с учетом полученных параметризаций $\pi\pi$-амплитуды, включающей в себя полюс $\sigma$-мезона, а также модифицированной Брейт–Вигнеровской формы для $a_0$-мезона в $\pi\eta$-канале.

В первом разделе настоящей работы представлены параметризации для амплитуд рассеяния конечных мезонов в $\pi\pi$- и $\pi\eta$-каналах. В разделе 2 приведены численные результаты фита экспериментального Далитц–плота для этих параметризаций. Краткие выводы сделаны в заключении.

## 1. Матричный элемент

При описании Далитц–плота распада $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$ мы учитываем вклады ближайших скалярных резонансов: $\sigma$-мезона — в $\pi\pi$- и $a_0(980)$ — в $\eta\pi$-взаимодействиях (см. диаграммы на рис. 1). Вклад скалярного мезона $f_0\,(980)$, в соответствии с работой [6], не очень существенен. К тому же мы используем полную $\pi\pi$-амплитуду в рассматриваемой кинематической области, где вклады $\sigma$- и $f_0$-мезонов включены автоматически.

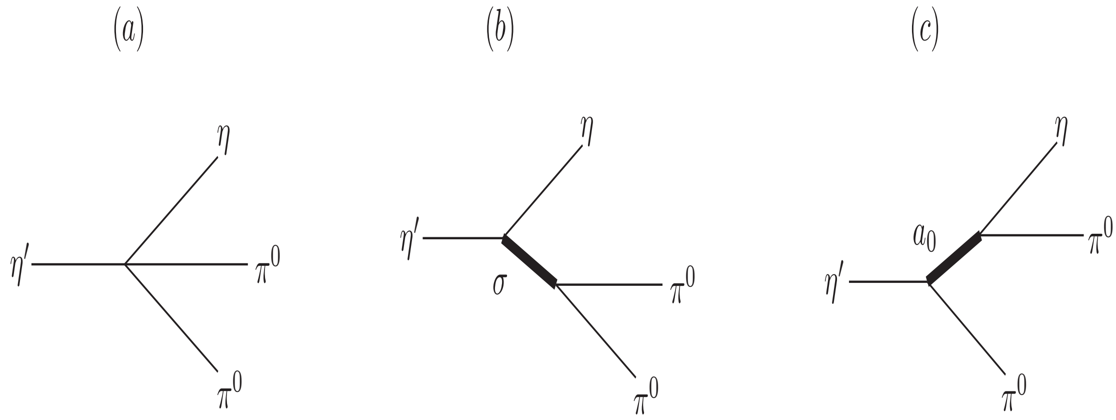


Рис. 1. Характерные диаграммы для процесса $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$: (a) — контактный член; (b) — вклад $\sigma$-мезона; (c) — перерассеяние в $\eta\pi$-канале.

Полная амплитуда описывается тремя вкладами:

$$\mathcal{A} \;=\; \mathcal{A}_{\pi\eta}\,(s_1) + \mathcal{A}_{\pi\eta}\,(s_2) + \mathcal{A}_{\pi\pi}\,(s_3)\,,$$

где $\mathcal{A}_{\pi\eta}$ и $\mathcal{A}_{\pi\pi}$ — амплитуды перерассеяния в каналах $\pi\eta$ и $\pi\pi$ соответственно,

$$s_1 \;=\; (p_2 + p_3)^2\,, \qquad s_2 = (p_1 + p_3)^2\,, \qquad s_3 = (p_1 + p_2)^2$$

и

$$s_1 + s_2 + s_3 = M_{\eta'}^2 + M_\eta^2 + 2m_\pi^2.$$

За последние годы киральная теория возмущений и уравнения Роя [7] позволили аккуратно описать $\pi\pi$-рассеяние при низких энергиях, совпадающих с областью энергии, разрешенной в нашем распаде. Формализм, основывающийся на описанных выше соображениях, позволяет контролировать аналитическое продолжение $s$-волновой $\pi\pi$-амплитуды в комплексную плоскость, где наблюдается полюс, интерпретируемый как скалярный $\sigma$-мезон со значениями массы и ширины

$$M_\sigma \quad = \quad 411^{+16}_{-8} \text{ МэВ}, \qquad \Gamma_\sigma/2 = 272^{+9}_{-12,5} \text{ МэВ}.$$

Соотношения унитарности накладывают на амплитуду $\pi\pi$-рассеяния довольно жесткие ограничения. Прежде всего, при $s < (2m_\pi)^2$ она действительна, а при $s \geq (2m_\pi)^2$ и вплоть до порога рождения пары $K$-мезонов ее мнимая часть удовлетворяет простому соотношению

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mathcal{A}_{\pi\pi}(s)}\right) \quad \sim \quad \sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \; .$$

Кроме того, киральная теория возмущений накладывает условие равенства нулю амплитуды при $s = s_A = m_\pi^2/2$ (адлеровский ноль).

Амплитуда $\pi\pi$-рассеяния, удовлетворяющая указанным выше условиям, может быть выражена в виде ряда по переменной

$$w\,(s) \quad = \quad \frac{\sqrt{s} - \sqrt{4m_K^2 - s}}{\sqrt{s} + \sqrt{4m_K^2 - s}} \; ,$$

преобразующей комплексную плоскость переменной $s$ с разрезами $s \leq 0$ и $s \geq (2M_K)^2$ в единичный круг $|w| < 1$ в комплексной плоскости переменной $w$, так что $w\left(4M_K^2\right) = 1$, $w(0) = -1$. Введение новой переменной разложения позволяет улучшить сходимость ряда в рассматриваемой области переменных. Амплитуда рассеяния при этом может быть представлена в виде

$$\mathcal{A}_{\pi\pi}(s) \quad \sim \quad \kappa t_0^0(s) = \kappa \left\{ \frac{m_\pi^2}{s - s_A} \left[ \frac{2s_A}{m_\pi \sqrt{s}} + B_0 + B_1 w\,(s) + \cdots \right] - i\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{s}} \right\}^{-1} , \qquad (4)$$

где $\kappa$ — неизвестная константа, которая может быть определена из фита экспериментальных данных.

Анализ данных NA48/2 по распаду $K_{e4}$ [8] показывает, что в приведенном выше разложении в интересующей нас области масс можно оставить только первые два члена с коэффициентами

$$B_0 \quad = \quad 7,4, \qquad B_1 = -15,1.$$

Указанным значениям $B_0$ и $B_1$ соответствуют

$$M_\sigma \quad = \quad 459 \text{ МэВ}, \qquad \Gamma_\sigma = 518 \text{ МэВ}.$$

Эти значения слегка отличаются от приведенных выше, однако точность экспериментальных данных распада $\eta' \to \eta\pi\pi$ не позволяет различить эти возможности.

В канале $\pi\eta$ в интересующей нас кинематической области основной вклад связан с виртуальным $a_0$-мезоном. Хорошо известно, что $a_0$-мезон находится вблизи порога рождения двух $K$-мезонов. Эта близость приводит к характерному поведению пропагатора $a_0$-мезона, отличающемуся от стандартной Брейт–Вигнеровской формы. Вместо обычной зависимости в пропагатор необходимо ввести зависящую от энергии собственно энергетическую часть, обусловленную петлями $\pi\eta$, $\pi\eta'$ и $KK$. Отметим, что указанные поправки существенны вблизи полюса. В доступной области инвариантных масс $\eta\pi^0$ распада $\eta' \to \eta\pi\pi$ эти поправки незначительны, по крайней мере при существующей на сей день точности эксперимента. Важным для нас оказывается только вид вершин взаимодействия $a_0$ с парами $\pi\eta$ и $\pi\eta'$.

Существуют несколько способов введения таких вершин. Прежде всего, можно ограничиться простым точечным взаимодействием с эффективными константами $g_{\pi\eta}$ и $g_{\pi\eta'}$. Ограничение на первую из этих констант можно получить из экспериментально известной ширины $a_0$-мезона [9]:

$$\Gamma\left(a_0 \to \pi^0\eta\right) \quad = \quad \frac{g_{\pi\eta}^2}{8\pi m_a^2}\,|\mathbf{p}| \approx \Gamma_{a_0} = 50 \div 100\,\text{МэВ},$$

откуда

$$1,95\,\text{ГэВ} \quad < \quad g_{\pi\eta} < 2,75\ \text{ГэВ}.$$

Константа связи $g_{\pi\eta'}$ может быть определена из $SU(3)$-симметрии [4], или напрямую из исследуемого нами процесса. При этом следует иметь в виду, что $SU(3)$-соображения требуют информацию о кварковом строении $a_0$-мезона, о чем пока нет устоявшейся точки зрения.

Другой способ ввести вершины взаимодействия связан с киральной теорией возмущений, в этом случае нужно учесть зануление вершины при $p_\pi \to 0$. Тогда представляется логичным использовать вершины типа $(p_\pi p_\eta)\,\gamma_{\pi\eta}$ для $a_0 \to \pi\eta$-вершины и $(p_\pi p_{\eta'})\,\gamma_{\pi\eta'}$ для вершины $\eta' \to a_0\pi$, как это сделано, например в [6]. Такое определение кажется более предпочтительным, потому что в амплитуде $\pi\pi$-рассеяния такое условие киральной теории уже выполнено. И снова константа $\gamma_{\pi\eta}$ может быть определена из ширины распада $a_0 \to \pi\eta$

$$5,7\ \text{ГэВ}^{-1} \quad < \quad \gamma_{\pi\eta} < 8,1\ \text{ГэВ}^{-1},$$

а для определения константы $\gamma_{\pi\eta'}$ необходимо использовать соображения $SU(3)$-симметрии или исследуемое в этой работе распределение по диаграмме Далитца распада $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$.

Таким образом, для амплитуды перерассеяния в $\pi\eta$-канале мы будем использовать два варианта:

$$\mathcal{A}_{\pi\eta}(s) \quad = \quad \frac{g_{\pi\eta}g_{\pi\eta'}}{s - m_a^2 + i\Gamma(s)m_a} \tag{5}$$

или

$$\mathcal{A}_{\pi\eta}(s) \quad = \quad \gamma_{\pi\eta'}\gamma_{\pi\eta}\frac{(p_\eta p_\pi)\,(p_{\eta'}p_\pi)}{s - m_a^2 + i\Gamma(s)m_a}\ . \tag{6}$$

## 2. Фит Далитц–плота

В предлагаемой параметризации неизвестными параметрами являются константа связи $\sigma$-мезона с $\eta'\eta - \kappa$ (см. формулу (4)) и константа связи $a_0$-мезона с $\pi\eta'$ ( $g_{\pi\eta'}$ или $\gamma_{\pi\eta'}$ в зависимости от выбора типа вершин). Эти константы мы определим, используя ширину распада (1) и фитирования Далитц–плота этого распада, полученного в эксперименте ГАМС-$4\pi$ [2].

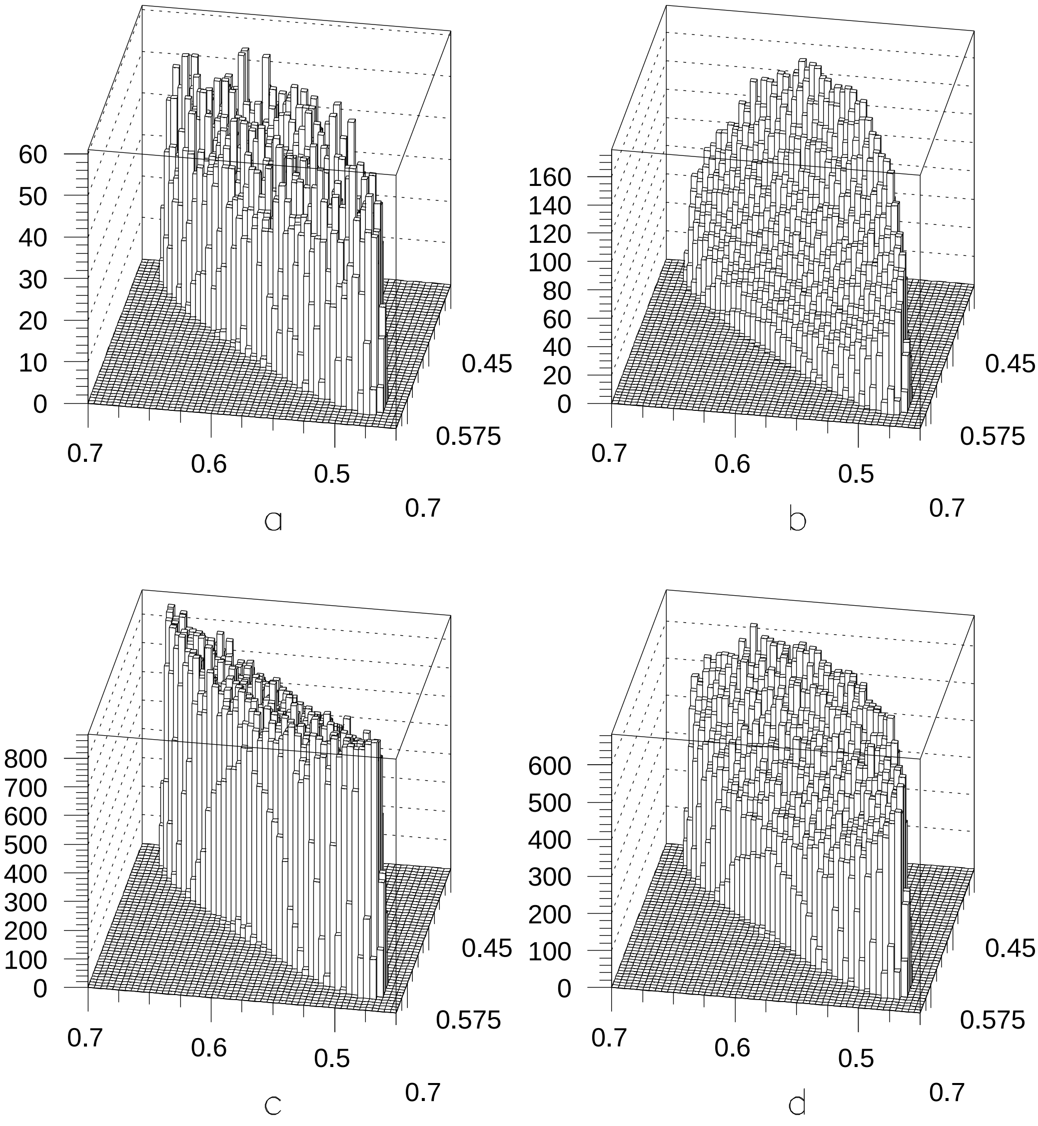


Рис. 2. Далитц–плот распада (1) из работы [2] — (a). Далитц–плот с вкладом только от $\sigma$-мезона — (b). Далитц–плот с вкладом только от $a_0$-мезона — (c). Интерференционный вклад $\sigma - a_0$ — (d)

Рассмотрим прежде всего вариант с точечной вершиной взаимодействия $a_0$-мезона (5). Лучшее согласие с экспериментом (уровень достоверности фита $CL = 0,52$) наблюдается при значениях констант

$$\begin{aligned} \kappa &= -4,0 \pm 0,3, \\ g_{\pi\eta} g_{\pi\eta'} &= (0,93 \pm 0,3)\ \text{ГэВ}^2. \end{aligned}$$

Как уже говорилось, значение константы $g_{\pi\eta}$ ограничивается шириной распада $a_0$-мезона ($2$ ГэВ $< g_{\pi\eta} < 3$ ГэВ), что соответствует ограничению на константу связи $a_0$-мезона с парой $\pi\eta'$:

$$0,36\ \text{ГэВ} \quad < \quad g_{\pi\eta'} < 0,51\ \text{ГэВ}.$$

Если предположить, что $a_0$-мезон состоит только из легких кварков ($a_0 \sim u\bar{u} + d\bar{d}$), то эти константы можно связать через угол смешивания псевдоскалярных мезонов $\eta$ и $\eta'$. Так, при использовании кварковой схемы смешивания углом $\Phi \approx 40^0$ [4] их отношение равно

$$\frac{g_{\pi\eta'}}{g_{\pi\eta}} = \tan\Phi = 0,8.$$

Видно, что полученные нами константы этому соотношению не удовлетворяют, но это не является неожиданным ввиду малой информации о внутренней структуре $a_0$-мезона.

Иная ситуация наблюдается при параметризации вершин взаимодействия $a_0$-мезона, мотивированных киральной теорией возмущений (см. выражение (6)). В этом случае лучшее согласие с экспериментом ($CL = 0,92$) наблюдается при значениях констант

$$\begin{aligned} \kappa &= -4,0 \pm 0,3\ , \\ \gamma_{\pi\eta}\gamma_{\pi\eta'} &= (35 \pm 4)\ \text{ГэВ}^{-2}. \end{aligned}$$

Из экспериментального значения ширины $a_0$ мезона можно определить константу его связи с парой $\pi\eta$ ($5,7\,\text{ГэВ}^{-1} < \gamma_{\pi\eta} < 8,1\,\text{ГэВ}^{-1}$). Соответственно, получаются ограничения на константу $\gamma_{\pi\eta'}$

$$4,6\,\text{ГэВ}^{-1} \quad < \quad \gamma_{\pi\eta'} < 6,6\,\text{ГэВ}^{-1}.$$

Заметим, что эти значения хорошо согласуются с результатами работы [6]. Для отношения этих констант следующее из $SU(3)$-симметрии равенство выполняется гораздо лучше, чем в случае простой связи с точечными вершинами.

## 3. Обсуждение результатов

На рис. 2a представлены экспериментальный Далитц–плот распада (1) [2] и результаты моделирования методом Монте–Карло, в котором возможно рассмотреть вклады в (1) раздельно: только $\sigma$-резонанса (рис. 2b), только $a_0$-мезона (рис. 2c) и интерференции между $a_0$ и $\sigma$ (рис. 2d). Как видно из этих распределений, вклад $a_0$-мезона доминирует. Вклад $\sigma$-мезона заметно меньше, но $a_0 - \sigma$ интерференция имеет тот же порядок величины, что и $a_0$-мезон.

Интересно, что обусловленное вкладом $a_0$-мезона $Y$-распределение на диаграмме Далитца имеет противоположный по сравнению с экспериментальными данными наклон, и лишь включение $\sigma$-мезона исправляет ситуацию. Фит экспериментального Далитц–плота с учетом только $a_0$-мезона (гипотетическое распределение такого матричного элемента изображено на рис. 2c) имеет близкий к нулю уровень достоверности. Поэтому, несмотря на кажущийся малый вклад, включение $\sigma$-мезона является определяющим в описании экспериментальных данных.

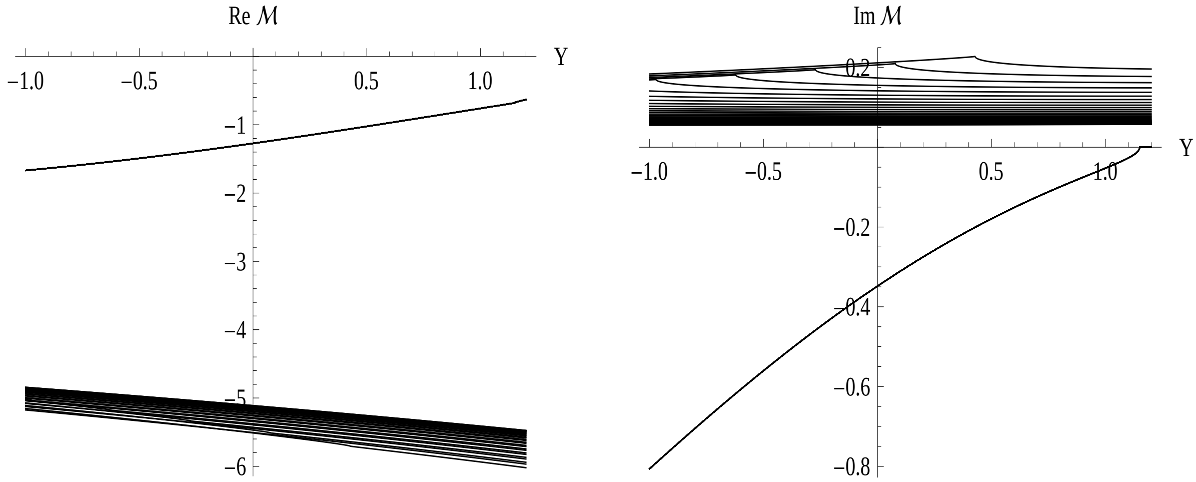


Рис. 3. Действительная и мнимая части амплитуды процесса (1).

Это отчетливо можно проследить, изучая поведение отдельных вкладов в действительную и мнимую части амплитуды рассматриваемого процесса (1). На рис. 3 представлены вещественные и мнимые части амплитуд $a_0$- и $\sigma$-обмена в зависимости от переменной $Y$. Отметим, что в соответствии с нашей параметризацией амплитуда $\sigma$-мезона не зависит от переменной $X$, что отвечает тонкой линии на этих рисунках. Зависимость от $X$ амплитуды $a_0$-обмена видна из широкой полосы на рис. 3a, соответствующей линиям при различных значениях этой переменной. Поведение амплитуд, изображенных на рис. 3, качественно согласуется с результатами работы [6], хотя наш подход слегка отличается в параметризациях амплитуд $\pi\pi$- и $\eta\pi$-рассеяния. Из рис. 3 видно, что в вещественной части амплитуды доминирует вклад от обмена $a_0$-мезоном, а в мнимой части амплитуды — от обмена $\sigma$-мезоном.

Для того чтобы продемонстрировать определяющую роль $\sigma$-мезона в распределение событий на диаграмме Далитца, мы представим вклады $a_0$-мезона (рис. 4a), $\sigma$-мезона (рис. 4b) и суммарный вклад (рис. 4c) в полученный в результате фита квадрат матричного элемента. Из рисунка видно, что соответствующий экспериментальным данным наклон Далитц–плота по переменной $Y$ можно получить только с включенным $\sigma$-мезоном, что мы и считаем доказательством необходимости учета $\sigma$-мезона при анализе рассматриваемого процесса.

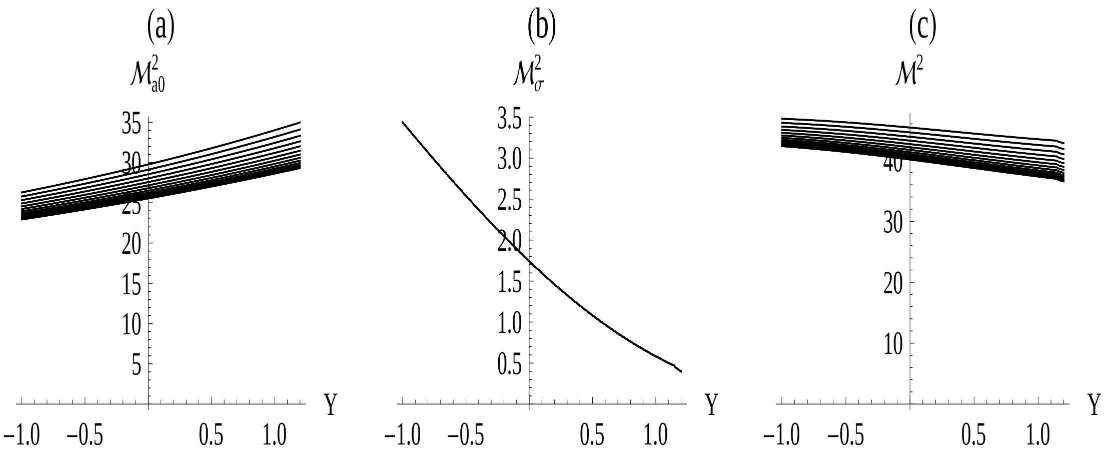


Рис. 4. Вклад в квадрат матричного элемента $a_0$-мезона (a), $\sigma$-мезона (b) и суммарный вклад (c).

## Заключение

Степенное разложение квадрата матричного элемента по переменным $X$ и $Y$, мотивированное киральной теорией, использовалось до настоящего времени при описании данных в распаде $\eta' \to \eta\pi\pi$. В настоящей работе мы предлагаем альтернативное описание в рамках изобарной модели. При этом мы ограничивались вкладами двух резонансных состояний $a_0$- и $\sigma$-мезонов и показали, что этих вкладов достаточно для хорошего описания данных. Если для вклада $a_0$-мезона хватает простой Брейт–Вигнеровской параметризации, то в случае $\sigma$-мезона, из-за его большой ширины, в $\pi\pi$-канале требуется более аккуратное описание. Поэтому мы использовали выражение для амплитуды $\pi\pi$-рассеяния, примененное при описании данных по $K_{e4}$-распаду. В этой амплитуде, удовлетворяющей целому ряду требований, $\sigma$-мезон присутствует в виде простого полюса с $M_\sigma = 411^{+16}_{-8}$ МэВ, $\Gamma_\sigma/2 = 272^{+9}_{-12.5}$ МэВ. Были рассмотены два типа параметризаций для вершин связи $a_0$-мезона с $\eta\pi$ и $\eta'\pi$ в контексте их сравнения с предсказаниями $SU(3)$-симметрии.

Мы нашли, что основной вклад в относительную ширину распада $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$ дает рассеяние в $\pi^0\eta$-канале через виртуальный $a_0$-мезон. В этом пункте результат нашей работы согласуется с результатом [6]. Однако при описании формы распределения по области Далитца существенным является вклад $\sigma$-мезона и его интерференции с $a_0$-мезоном. Без учета $\sigma$-мезона наклон распределения по переменной $Y$ в области Далитца оказывается противоположным экспериментально наблюдаемому. Включение $\sigma$-мезона ситуацию исправляет. Хотелось бы отметить, что $\sigma$-мезон является довольно экзотической частицей, ширина которой сравнима с ее массой, а потому экспериментальное наблюдение такого мезона весьма затруднительно.

Мы считаем, что наш анализ распада $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$ является дополнительным аргументом в пользу существования $\sigma$-мезона.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 09-02-00132-а и частично поддержана грантом РФФИ 07-02-00417-а. Один из авторов (А.Л.) был поддержан Президентским грантом для молодых кандидатов наук (МК-110.2008.2) и Фондом содействия отечественной науки.

## Список литературы


[1] D.Alde et al. Phys.Lett. B, V.177 (1987) 115; Д. Алди и др. ЯФ. Т.45 (1987) 117.

[2] А.М.Блик и др. ЯФ. Т.88 (2008) 123.

[3] V.Dorofeev et al. Phys. Lett. B 651(2007).

[4] T. Feldman, P. Kroll, B. Stech. Phys. Lett. B 449 (1999) 339.

[5] N.A.Tornqvist. Z.Phys. C68, 647(1995).

[6] A.H.Fariborz, J.Schechter, hep-ph/9902238.

[7] I.Caprini, G.Colangelo and H.Leutwiyler. Phys.Rev.Lett. 96 (2006) 132001.

[8] I.Caprini. Phys.Rev. D 77(2008) 114019; J.R.Batley et al. (NA48 Collab.) Eur.Phys. J C54 (2008) 411.

[9] Particle Data Group. Journal of Physics G, V.33(2006).



*Рукопись поступила 10 февраля 2009 г.*

С.В. Донсков, А.К. Лиходед, А.В. Лучинский, В.Д. Самойленко.
Скалярные мезоны $\sigma$ и $a_0$ в распаде $\eta' \to \eta\pi^0\pi^0$.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В.Ежела.

Подписано к печати 12.02.2009. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 1,45. Уч.-изд.л. 1,1. Тираж 80. Заказ 5. Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142281, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

ПРЕПРИНТ 2009–1, ИФВЭ, 2009