



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2009-21
ОП, ОУ У-70

В.А. Маишеев, Ю.А. Чесноков, П.Н. Чирков, И.А. Язынин
ИФВЭ, Протвино, РФ

D. Bolognini, S. Hasan, M. Prest
Università dell'Insubria, Milano, Italy

E. Vallazza
INFN, Trieste, Italy

**ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ ПРИ КАНАЛИРОВАНИИ
ПОЗИТРОНОВ В МОНОКРИСТАЛЛАХ
В ОБЛАСТИ ЭНЕРГИЙ 100 ГэВ**

Протвино 2009

Аннотация

Маишеев В.А. и др. Излучение фотонов при каналировании позитронов в монокристаллах в области энергий 100 ГэВ: Препринт ИФВЭ 2009-21. – Протвино, 2009. – 23 с., 12 рис., 1 табл., библиогр.: 15.

Рассмотрен процесс излучения 120-ГэВ позитронов в режиме каналирования в (011) плоскости монокристалла кремния. Сначала на основе теории нелинейных колебаний были рассчитаны траектории движущихся позитронов при разных начальных условиях. Затем, принимая во внимание нелинейность движения, была найдена функция распределения каналирующих частиц по их амплитудам. После этого была рассчитана с помощью двух различных методов интенсивность излучения при разных начальных условиях. Эти результаты могут быть полезны для сравнения с экспериментальными данными при энергиях позитронов начиная с 100 ГэВ и более.

Abstract

Maisheev V.A. et al. Channeling radiation of positrons with energy in the region of 100 GeV in single crystals: IHEP Preprint 2009-21. – Protvino, 2009. – p. 23, figs. 12, table 1, refs.: 15.

The process of radiation of 120-GeV positrons moving in a channeling regime in (011) plane of a single crystal was considered. At the beginning on the basis of the theory of nonlinear oscillations the trajectory of moving positrons at different initial conditions were derived. Then taking into account the nonlinearity of motion the distribution function over oscillation amplitudes of channeling particles was found. After this the intensity of radiation at different initial conditions was calculated with the help of two various methods. These results may be useful for comparison with experimental data at positron energies from 100 and more GeV.

Введение

К настоящему времени большое количество экспериментальных и теоретических работ посвящено исследованию излучения при плоскостном каналировании высокоэнергетических позитронов в монокристаллах (см. [1, 2, 3] и цитируемую там литературу). Это излучение возникает при движении заряженной частицы под малым углом по отношению к кристаллографической плоскости и (в случае ультррелятивистских позитронов с энергиями до ~ 20 ГэВ) характеризуется высокой интенсивностью и является достаточно монохроматичным. При энергиях позитронов более ~ 20 ГэВ монохроматичность излучения сильно ухудшается. Большинство экспериментов по исследованию излучения при каналировании релятивистских позитронов выполнено при энергиях от нескольких сотен МэВ и до десятков ГэВ, где в интенсивности излучения доминирует отчетливый пик, который при энергиях больших ~ 20 ГэВ постепенно размывается [3] из-за возрастания интенсивности излучения высоких гармоник. Конкретное теоретическое рассмотрение процесса также в основном сосредоточено на указанном диапазоне энергий. Много интересных данных было получено в эксперименте [4], где исследовалось излучение лептонов с энергией 150 ГэВ в прямых кристаллах.

В сентябре 2009 года в ЦЕРНЕ при энергии позитронов 120 ГэВ был проведен эксперимент INSURAD, посвященный исследованию излучения при различных ориентациях изогнутых монокристаллов. В частности, была накоплена большая статистика по излучению позитронов при их движении в плоскостных полях изогнутых монокри-

сталлов кремния, которая в настоящее время обрабатывается. Также планируется продолжение этого эксперимента в 2010 году, и, в частности, предполагается измерить радиационные процессы в прямых (не изогнутых) монокристаллах с целью корректного сравнения всех полученных данных. Это является весомым аргументом в пользу теоретического исследования указанных процессов (и в частности излучения при плоскостном каналировании в прямых и изогнутых монокристаллах) при энергиях более 100 ГэВ.

Таким образом, данная работа посвящена теоретическому рассмотрению процесса излучения ультрарелятивистских позитронов с энергией порядка 100 ГэВ, каналирующих в прямых кристаллах.

Характеристики излучения релятивистской частицы с заданной энергией E определяются ее движением в электрическом поле монокристалла. Поэтому прежде всего следует описать это движение. Для этого необходимо знать электрическое поле или распределение потенциала кристаллографической плоскости. Такое поле (потенциал) находится аналитически на основе соотношений для поля атома в модели Мольер или, более точно, на основе аппроксимации соответствующих данных, полученных в результате рентгеновских измерений. Часто вместо точного представления электрического поля (или потенциала) используют их упрощения (так называемые модельные потенциалы) с помощью достаточно простых функций. Недостаток такого рассмотрения заключается в том, что невозможно описать достаточно хорошо простыми функциями плоскостные поля в согласии с расчетами по модели Мольер или другой реалистичной модели атома. Другой подход использован в работе [5], где поле представлялось в виде ряда Фурье, и было показано, что плоскостные потенциалы поля монокристаллов можно описать полиномами достаточно высокой степени, которые практически (ошибка около 1 % для полинома 14-й степени) не отличаются от исходных точных представлений.

Очевидно, что потенциал в центральной части между кристаллическими плоскостями имеет параболическую форму, но вблизи плоскостей он сильно нелинеен, т.к. должен обеспечивать нулевое электрическое поле на кристаллических плоскостях в силу одинаковости плоскостных ячеек и в силу физической непрерывности. Кроме

того, для каналированных частиц, совершающих периодическое движение в такой нелинейной межплоскостной потенциальной яме с большими амплитудами и замкнутые фазовые траектории которых близки к сепаратрисе, отделяющей каналированные частицы от надбарьерных, нахождение точного решения уравнений движения с помощью асимптотических методов нелинейных колебаний [6] (и использованных в [5,7]) затруднительно. Более того, даже незначительные возмущения, такие как нерегулярные смещения плоскостей, будут приводить к образованию на ветвях сепаратрисы так называемых гомоклинических структур [9÷13] и образованию около сепаратрисы стохастического слоя. В этом случае необычайная сложность движения в окрестности сепаратрисы была известна еще А. Пуанкаре [12÷14]: "...Сложность этой картины движения настолько поражает, что я даже не пытаюсь изобразить ее". Строгую оценку ширины стохастического слоя до сих пор получить не удалось, а приводимые обычно результаты основаны на приближенном описании движения в окрестности сепаратрисы при наличии возмущений. Поэтому в данной работе мы постарались максимально обойтись без поиска точного решения уравнений движения в таком нелинейном потенциале (без возмущений) для всех каналированных частиц и ограничились использованием Гамильтонова формализма для описания движения и нахождения характерных параметров (точнее, функций) движения. Среди них такие, как зависимость частоты и параметра мультипольности ρ от амплитуды периодического движения, распределение каналированных позитронов по амплитудам. Использование такого формализма позволило преодолеть некоторые трудности в определении излучения, имевшие место при достаточно больших амплитудах (см. [5, 7]).

Тип излучения релятивистской частицы зависит от значения параметра мультипольности ρ . Когда $\rho \ll 1$, то это соответствует интерференционному характеру (дипольное приближение) излучения, формируемому на достаточно большой длине кристалла. Случай с $\rho \gg 1$ близок к магнитотормозному (синхротронному) излучению. При $\rho \sim 1$ имеем промежуточный случай. При анализе процесса излучения следует рассматривать весь ансамбль каналированных частиц в соответствующем фазовом пространстве, поскольку параметры движения (амплитуда колебаний, например) в нетолстом монокристалле определяются начальными условиями на его входе.

И как будет показано, в рассматриваемом процессе могут реализовываться различные типы излучения частицами с разными начальными условиями.

Параметр ρ становится порядка 1 при плоскостном каналировании позитронов (по крайней мере, для заметной доли частиц) начиная с энергий в несколько ГэВ. При энергиях позитронов в десятки ГэВ большая доля позитронов характеризуется параметром ρ от 1 до нескольких единиц. В этом случае расчеты должны принимать во внимание недипольный характер излучения. Соответствующий математический аппарат для излучения при периодическом движении можно найти в монографии [1] (квантовый и классический случаи в вакууме) и статье [8] для прозрачной среды (классический случай). При энергиях позитронов в 100 ГэВ и более параметр ρ может превышать 20 единиц для значительной доли частиц. При этом можно ожидать усложнения процедуры расчетов по соотношениям [1] для плоскостного движения, поскольку начинает излучаться большое число гармоник. С другой стороны, авторы [1] утверждают, что в этом случае излучение носит практически магнитотормозной характер и рекомендуют использовать соответствующие соотношения для расчетов.

Принимая во внимание все вышесказанное, в данной работе мы хотим получить следующие результаты:

- 1) на основе Гамильтонова формализма рассмотреть движение ультррелятивистской частицы в реальном плоскостном потенциале монокристалла и изучить влияние нелинейностей на ансамбль частиц, захваченных в режим каналирования;
- 2) исследовать и сравнить различные методы расчета интенсивности излучения позитронами с энергиями порядка 100 ГэВ при их разных начальных условиях на входе в монокристалл;
- 3) дать предсказания для интенсивности излучения каналированными позитронами, которые можно будет измерить в будущем эксперименте INSURAD.

Полученные результаты будут являться основой для дальнейшего рассмотрения процесса излучения в изогнутых монокристаллах.

§ 1. Межплоскостное одномерное движение канализированных позитронов

Движение заряженной ультрарелятивистской частицы в межплоскостном электрическом поле D монокристалла можно описать с помощью системы уравнений

$$\frac{E}{c^2} \frac{d^2 x}{dt^2} = eD(x), \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2c^2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) \right),$$

где x, y, s – декартовы координаты частицы (электрическое поле D направлено вдоль оси x); E, e, γ – энергия, заряд и гамма-фактор частицы соответственно; t – время; c – скорость света. При определенных начальных условиях эти уравнения описывают движение частицы в режиме канализования. В этом случае первое уравнение описывает периодическое движение вдоль координаты x , в то время как третье уравнение отражает влияние поперечного движения частицы на продольное. Несмотря на относительно малую величину, это изменение продольной скорости частицы учитывается при расчетах интенсивности излучения. Из приведенных уравнений видно, что задача о нахождении траектории частицы в трехмерном пространстве сводится к нахождению функции $x(t)$.

В этом параграфе мы рассмотрим периодическое (в общем случае негармоническое) движение позитронов с энергией $E = 120$ ГэВ в межплоскостном потенциале прямого кристалла Si с ориентацией (011). Определим основные характеристики этого движения, которые наиболее существенны для спектра излучения позитронов с указанной энергией при их прохождении через кристалл. К таким характеристикам, прежде всего, относится зависимость частоты, параметра мультипольности ρ и плотность распределения позитронов от амплитуды движения.

Межплоскостной потенциал рассчитан при комнатной температуре для кремния, как описано в работе [5]. Сначала было получено точное выражение для плоскостного электрического поля монокристалла (в данном случае на основе рентгеновских измерений атомных формфакторов кремния) в виде ряда Фурье. Затем это поле было разложено в ряд по ортогональным полиномам Лежандра, что и позволило представить

его в виде полинома по межплоскостной координате x . Очевидно, что такой метод позволяет получить представление электрического потенциала поля сколь угодно близкое к точному значению. Мы ограничились его описанием с точностью около 1%, что соответствует полиному 14-й степени. Таким образом, межплоскостной потенциал взаимодействия позитрона в прямом кристалле определяется выражением

$$U(\xi) = -\frac{d}{2} \sum_{k=1}^7 \frac{\alpha_k}{2k} \xi^{2k}, \quad (1)$$

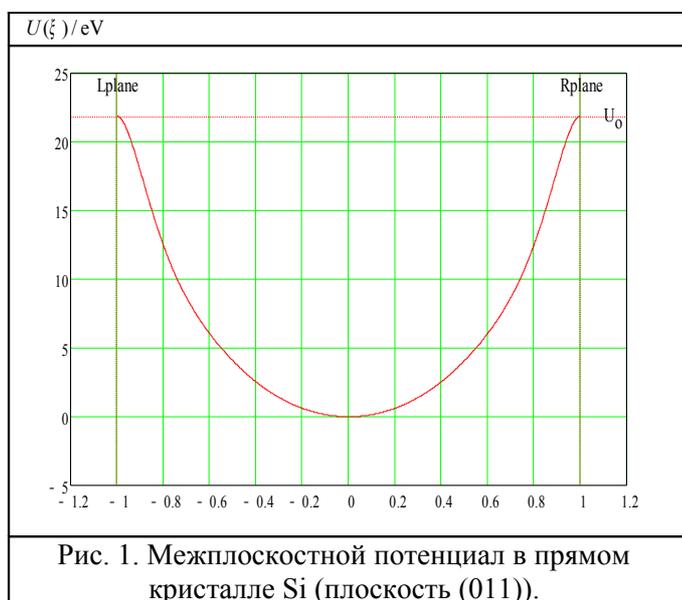
где $\xi = \frac{x}{d/2}$ – нормированная межплоскостная координата, $\xi \in [-1, +1]$;

$d = 1.92 \text{ \AA}$ – межплоскостное расстояние в (011) канале;

$\alpha = (-32.21 \quad 13.86 \quad -443.78 \quad 2340.52 \quad -5315.05 \quad 4811.79 \quad -1375.13)$ в $[\text{eV}/\text{\AA}]$;

такие значения α_k обеспечивают $dU/d\xi = 0$ при $\xi = \pm 1$.

Зависимость $U(\xi)$ приведена на следующем рисунке, где $U_0 = 21.873 \text{ eV}$ – уровень потенциального барьера.



На рис. 2 показана зависимость нормированной частоты $\Omega(\xi_m)$ от амплитуды периодического движения

$$\Omega(\xi_m) = \omega(\xi_m)/\omega_0, \quad \text{где} \quad \omega_0 \equiv \omega(0) = \sqrt{2|\alpha_1|c^2/Ed} \cong 5.013 \times 10^{13} / \text{sec} - \text{частота колебаний с малыми (нулевыми) амплитудами в приведенной выше потенциальной яме } U(\xi).$$

Под амплитудой ξ_m подразумевается максимальное смещение периодического движения. Методика получения этой зависимости делалась стандартным образом (см., например, [9]). А именно, движение позитрона в нормированной потенциальной яме $\tilde{U}(\xi)$, определяемой соотношением

$$\tilde{U}(\xi) = -\frac{1}{|\alpha_1|} \sum_{k=1}^7 \frac{\alpha_k}{2k} \xi^{2k},$$

описывается каноническими уравнениями

$$\frac{d\xi}{d\tau} = p \quad \text{и} \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{d\tilde{U}(\xi)}{d\xi}, \quad (2)$$

где $\tau = \omega_0 t$ – безразмерное время (фаза),

$$H(\xi, p) = \frac{p^2}{2} + \tilde{U}(\xi) = \varepsilon - \text{гамильтониан.} \quad (3)$$

Гамильтониан в данном случае является интегралом движения. Для нахождения частоты (обратной периоду движения) удобно от канонических переменных (ξ, p) перейти с помощью канонического преобразования к новому гамильтониану с каноническими переменными ”угол–действие” (θ, J) . Использование таких новых переменных представляет собой удобный способ получения частот периодического движения, не требующий выяснения деталей самого движения.

Действие J в зависимости от поперечной “энергии” ε движения в яме $\tilde{U}(\xi)$ определяется как интеграл по фазовой траектории с фиксированной ε

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \oint p(\xi, \varepsilon) \cdot d\xi = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\xi_m(\varepsilon)} \sqrt{2(\varepsilon - \tilde{U}(\xi))} \cdot d\xi,$$

где $\xi_m(\varepsilon)$ – максимальное отклонение (амплитуда) определяются из уравнения

$$\tilde{U}(\xi_m) = \varepsilon. \quad (4)$$

В силу взаимно однозначной зависимости $J(\varepsilon)$ для позитронов, попавших в межплоскостной канал, в принципе знаем (хотя бы численно) обратную функцию

$$\varepsilon = \varepsilon(J).$$

Частицы с $\varepsilon \in [0, \tilde{U}_0]$ – каналированные частицы, совершающие ограниченное движение в пределах канала, а с $\varepsilon > \tilde{U}_0$ – надбарьерные частицы, движение которых не ограничено по ξ . Новый гамильтониан, где в качестве канонического импульса выбрано действие J , являющееся еще и адиабатическим инвариантом, для каналированных частиц равен

$$\bar{H}(\theta, J) = \bar{H}(J) = \varepsilon(J).$$

Отсюда имеем:

$$\frac{dJ}{d\tau} = -\frac{\partial \varepsilon(J)}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \Omega(J) = \frac{\partial \varepsilon(J)}{\partial J} \text{ – нормированная частота, т.е.}$$

$$\Omega^{-1}(\xi_m) = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\xi_m} d\xi / \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}.$$

Зависимость нормированной частоты Ω от амплитуды ξ_m для потенциала (1) приведена на рис. 2.

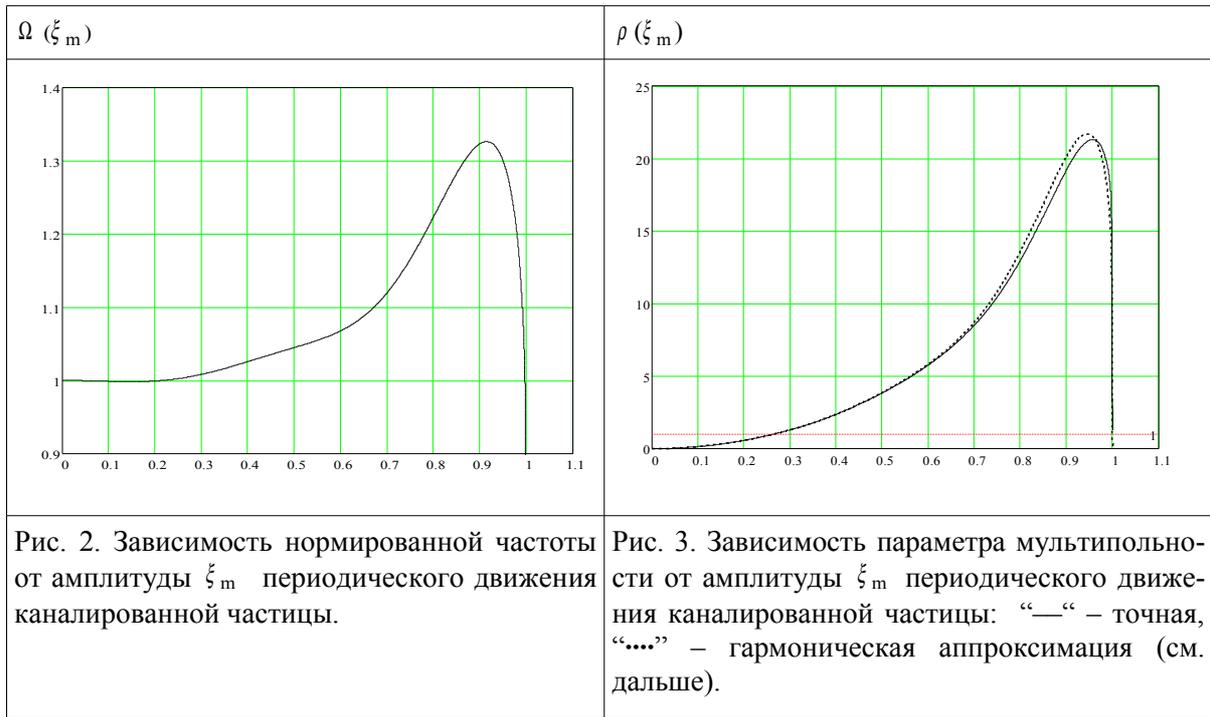
Параметр мультипольности ρ существенным образом определяет характер излучения колеблющегося каналированного позитрона и выражается через параметры плоскостного периодического движения частицы следующим образом [1]:

$$\rho = 2\gamma^2 \left\langle (v_x/c)^2 \right\rangle,$$

где усреднение проводится по периоду движения. Для каналированного позитрона с заданной амплитудой движения ξ_m имеем

$$\rho(\xi_m) = 2\gamma^2 \kappa^2 \left\langle p^2 \right\rangle = 2\gamma^2 \kappa^2 \Omega(\xi_m) J(\xi_m) = \gamma^2 \kappa^2 \Omega(\xi_m) \frac{4}{\pi} \int_0^{\xi_m} \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))} d\xi,$$

где $\kappa = d\omega_0/2c$. Для потенциала (1) $\kappa \cong 16.052 \cdot 10^{-6}$ при определенной выше частоте ω_0 . На рис. 3 (непрерывная линия) показана точная зависимость параметра мультипольности от амплитуды ξ_m . Таким образом, при данном потенциале могут реализовываться как дипольный, так и магнитотормозной типы излучения.



Полученные частоты соответствуют нелинейным (негармоническим) колебаниям. Чем ближе ξ_m к 1, тем сильнее будет отличие периодического движения от гармонического. Сравнение при заданном ξ_m точного численного решения уравнения движения с аппроксимирующим гармоническим колебанием с той же ξ_m и нормированной частотой $\Omega(\xi_m)$

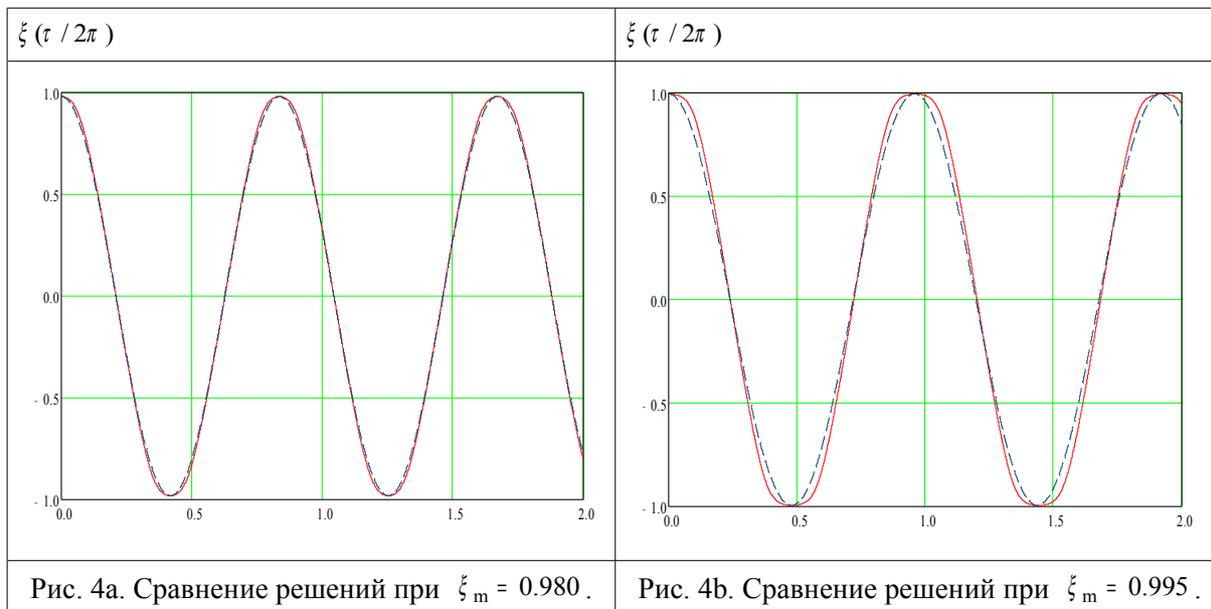
$$\xi = \xi_m \cos(\Omega(\xi_m) \cdot \tau) \quad (5)$$

показано на рис. 4а и 4б. На этих рисунках приведены зависимости ξ от $\tau/2\pi$: сплошные линии соответствуют точному численному решению уравнений движения, а пунктирные — гармонической аппроксимации. Таким образом, практически во всем диапазоне $0 \leq \xi_m \leq 0.980$ движение каналированных позитронов можно считать гармоническим с рассчитанными величинами частот $\Omega(\xi_m)$.

Если периодическое движение позитрона рассматривать в гармоническом приближении (5), то выражение для параметра мультипольности упрощается до

$$\rho(\xi_m) = 2\gamma^2 \kappa^2 \langle p^2 \rangle = (\gamma \kappa \Omega(\xi_m) \xi_m)^2.$$

На рис. 3 показана зависимость параметра мультипольности (пунктирная линия), рассчитанная по этой формуле. Откуда видно, что гармоническое приближение периодического движения позитронов с энергией $E = 120$ ГэВ является вполне приемлемым для расчета спектра излучения каналированных частиц.



§ 2. Распределение плотности каналированных частиц по амплитудам движения

Помимо зависимости частоты от амплитуды периодического движения для определения полного спектра излучения от всех захваченных в каналирование позитронами необходимо знать:

- N – относительная доля частиц пучка, захваченная в каналирование;
- $f(\xi_m)$ – распределение плотности каналированных позитронов по амплитудам ξ_m .

Полагаем, что на входе в прямой кристалл позитроны распределены равномерно по поперечной координате x , а следовательно, и по ξ , и с угловым распределением $g(\vartheta)$. В нормированных переменных (ξ, p) согласно (2) имеем следующую связь между ϑ и p

$$p = \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{v_s}{\omega_0(d/2)} \frac{dx}{ds} \cong \frac{2c}{\omega_0 d} \vartheta = \frac{\vartheta}{\kappa}, \quad (6)$$

где $s = v_s t \cong ct$ – продольная координата вдоль канала и $1/\kappa \cong 6.230 \times 10^4$. Отсюда распределение частиц на входе в кристалл по величине p принимает вид $\tilde{g}(p) = \kappa g(\kappa p)$.

Замкнутая фазовая кривая $p = p(\xi, \xi_m)$ с фиксированной ξ_m на плоскости $\{p, \xi\}$ для каналированной частицы (см. рис. 5) согласно (3,4) определяется выражением

$$p(\xi, \xi_m) = \pm \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))} \quad \text{с } \xi \in [-\xi_m, \xi_m] \text{ и } 0 \leq \xi_m \leq 1. \quad (7)$$

Сепаратриса – фазовая кривая, разделяющая каналированные и надбарьерные частицы, описывается выражением $p_c(\xi) = p(\xi, 1)$. Максимальное значение p_L соответствует углу Линдхарда ϑ_L , достигается при $\xi = 0$ и равно $p_L = |p_c(0)| = \sqrt{2\tilde{U}(1)}$. При рассматриваемых параметрах прямого кристалла и величине энергии позитронов согласно (6) имеем: $p_L \cong 1.189$ и $\vartheta_L \cong 19.093 \times 10^{-6}$. Таким образом, доля частиц N , захваченных в режим каналирования, т.е. попавших внутрь сепаратрисы, определяется выражением

$$N = \int_0^1 d\xi \int_{-|p_c(\xi)|}^{|p_c(\xi)|} \tilde{g}(p) dp. \quad (8)$$

Найдем теперь функцию плотности $f(\xi_m)$ распределения частиц по амплитудам только для частиц, попавших в каналирование. Далее под $p(\xi, \xi_m)$ будем подразумевать положительную ветвь определения (7). Относительное число частиц из каналированных N , имеющих амплитуды $\leq \xi_m$, равно

$$F(\xi_m) = \frac{1}{N} \int_0^1 d\xi \int_{-p(\xi, \xi_m)}^{p(\xi, \xi_m)} \tilde{g}(p) dp, \quad \text{т.е. } F(1) = 1, \quad (9)$$

Тогда для функции плотности распределения получаем выражение

$$f(\xi_m) \equiv \frac{dF(\xi_m)}{d\xi_m} = \frac{1}{N} \frac{d\tilde{U}(\xi_m)}{d\xi_m} \int_0^{\xi_m} d\xi \frac{\tilde{g}(p(\xi, \xi_m)) + \tilde{g}(-p(\xi, \xi_m))}{p(\xi, \xi_m)}. \quad (10)$$

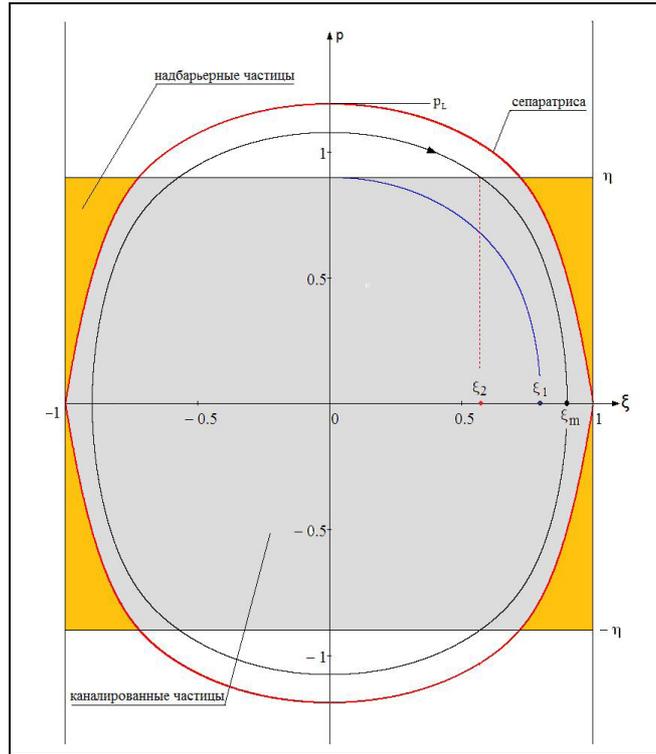


Рис. 5. Фазовый портрет захвата частиц в каналирование.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением простейшего случая равномерного и симметричного относительно нуля распределения частиц пучка по углам ϑ , т.е.

$$g(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta_0} \begin{cases} 1 & \text{если } \vartheta \in [-\vartheta_0, \vartheta_0] \\ 0 & \text{если } \vartheta \notin [-\vartheta_0, \vartheta_0] \end{cases}$$

Отсюда согласно (6) на плоскости нормированных переменных имеем

$$\tilde{g}(p) = \frac{1}{\eta} \begin{cases} 1 & \text{если } p \in [-\eta, \eta] \\ 0 & \text{если } p \notin [-\eta, \eta] \end{cases}$$

где граница пучка по переменной P равна $\eta = \vartheta_0 / \kappa$.

а) Для случая, когда полуширина углового разброса больше угла Линдхарда, т.е. $\vartheta_0 > \vartheta_L$ и, следовательно, $\eta > p_L$, согласно предыдущему имеем:

$$N = \frac{1}{\eta} \int_0^1 |p_c(\xi)| d\xi = \frac{1}{\eta} \int_0^1 d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(1) - \tilde{U}(\xi))},$$

$$F(\xi_m) = \frac{1}{N\eta} \int_0^{\xi_m} d\xi p(\xi, \xi_m) = \frac{1}{N\eta} \int_0^{\xi_m} d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))},$$

$$f(\xi_m) = \frac{1}{N\eta} \frac{d\tilde{U}(\xi_m)}{d\xi_m} \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}}.$$

Таким образом, при $\vartheta_o > \vartheta_L$ функции $F(\xi_m)$ и $f(\xi_m)$ не зависят от ϑ_o .

Рассмотрим приближение параболического потенциала, когда приведенные выше формулы интегрируются до конца в аналитическом виде. Для этого ограничимся в представлении потенциала $\tilde{U}(\xi)$ только первым членом разложения, т.е. $\tilde{U}(\xi) = \xi^2/2$.

Тогда $\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))} \rightarrow \sqrt{2(\xi_m^2 - \xi^2)}$. Отсюда получаем:

$$N = \frac{\pi}{4\eta}, \quad F(\xi_m) = \xi_m^2, \quad f(\xi_m) = 2\xi_m.$$

б) Для случая, когда полуширина углового разброса пучка меньше угла Линдхарда, т.е. $\vartheta_o < \vartheta_L$ и, следовательно, $\eta < p_L$ (см. рис. 5), введем амплитуду ξ_1 , фазовая кривая для которой имеет максимум $p(0, \xi_1) = \eta$, т.е. определяется из уравнения $\sqrt{2\tilde{U}(\xi_1)} = \eta$. Кроме того, для любой фазовой кривой с амплитудой $\xi_1 < \xi_m \leq 1$ определяем значение ξ_2 , зависящее от ξ_m . Зависимость $\xi_2(\xi_m)$ задается уравнением $\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi_2))} = \eta$. Заметим, что $\xi_2(\xi_1) = 0$. Согласно формулам общего вида (8÷10) для рассматриваемого случая углового разброса в пучке позитронов получаем:

$$N = \xi_2(1) + \frac{1}{\eta} \int_{\xi_2(1)}^1 d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(1) - \tilde{U}(\xi))}; \quad (11)$$

$$F(\xi_m) = \frac{1}{N} \begin{cases} \frac{1}{\eta} \int_0^{\xi_m} d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))} & \text{если } 0 \leq \xi_m \leq \xi_1 \\ \frac{1}{\eta} \int_{\xi_2(\xi_m)}^{\xi_m} d\xi \sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))} + \xi_2(\xi_m) & \text{если } \xi_1 \leq \xi_m \leq 1 \end{cases},$$

$$f(\xi_m) = \frac{1}{N\eta} \frac{d\tilde{U}(\xi_m)}{d\xi_m} \begin{cases} \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}} & \text{если } 0 \leq \xi_m \leq \xi_1 \\ \int_{\xi_2(\xi_m)}^{\xi_m} \frac{d\xi}{\sqrt{2(\tilde{U}(\xi_m) - \tilde{U}(\xi))}} & \text{если } \xi_1 \leq \xi_m \leq 1 \end{cases}. \quad (12)$$

Таким образом, при $\vartheta_o < \vartheta_L$ в параболическом приближении получаем $\xi_1 = \eta$ и $\xi_2(\xi_m) = \sqrt{\xi_m^2 - \eta^2}$, а предыдущие формулы сводятся к

$$N = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{1}{2\eta} \arcsin(\eta),$$

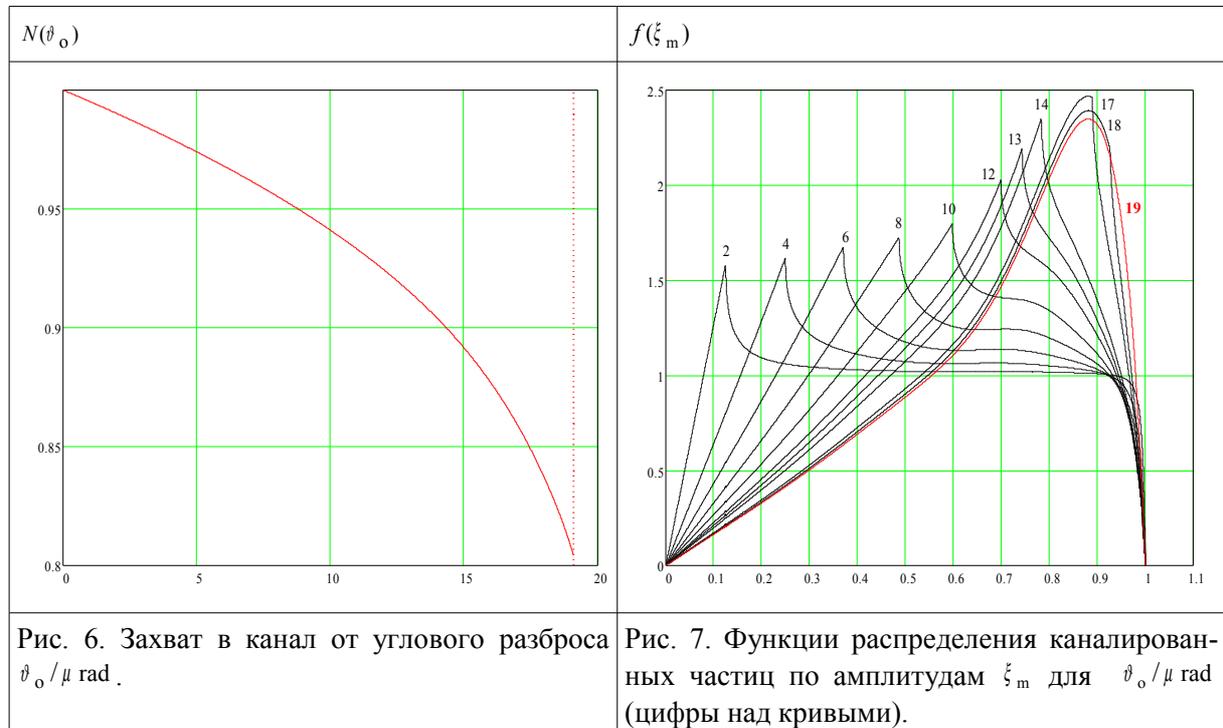
$$F(\xi_m) = \frac{1}{2N\eta} \begin{cases} \pi \xi_m^2 / 2 & \text{если } 0 \leq \xi_m \leq \eta \\ \sqrt{1 - \eta^2} + \xi_m^2 \arcsin(\eta / \xi_m) & \text{если } \eta \leq \xi_m \leq 1 \end{cases},$$

$$f(\xi_m) = \frac{\xi_m}{N\eta} \begin{cases} \pi / 2 & \text{если } 0 \leq \xi_m \leq \eta \\ \arcsin(\eta / \xi_m) & \text{если } \eta \leq \xi_m \leq 1 \end{cases}.$$

Рассчитанная по формуле (11) зависимость относительного захвата N в режим каналирования от величины полуширины углового разброса пучка ϑ_0 при $0 < \vartheta_0 \leq \vartheta_L$ для потенциала (1) показана на рис. 6. Рассчитанные согласно (12) функции плотности $f(\xi_m)$ для некоторых значений $\vartheta_0 \times 10^6$ показаны на рис. 7.

Из проведенного анализа следует важный для дальнейшего вывод: в потенциале (1), где $d\tilde{U}/d\xi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm 1$, плотность распределения $f(\xi_m) \rightarrow 0$ при $\xi_m \rightarrow 1$.

Таким образом, показана малая (практически нулевая) плотность каналированных частиц для колебаний с амплитудами близкими к единице. Это лишний раз делает приближение о гармоническом характере движения каналированных позитронов в кристалле достаточно справедливым.



§ 3. Излучение каналированных позитронов при квазипериодическом движении

Для нахождения спектра излучения каналированного позитрона, колеблющегося в межплоскостном потенциале (1), используем формулу, полученную в [1] (см. с. 303) для квазипериодического движения частицы при любых значениях параметра мультипольности ρ , с учетом квантового эффекта отдачи при излучении фотона. Эта формула справедлива для расчетов систем, в которых частица совершает достаточно большое (десять и более) число колебаний вдоль прямой линии. При выводе формулы учитывалась связь поперечного и продольного движений. Необходимость рассмотрения спектра излучения в таком самом общем виде связано с тем, что в потенциале (1) параметр мультипольности (см. рис. 3) перекрывает достаточно широкий диапазон значений ρ , обеспечивающий разные типы излучения (см. Введение). Спектр излучения одного позитрона на единице длины короткого кристалла определяется следующим выражением:

$$\frac{d^2 E}{dE_\gamma ds} = - \frac{\alpha E_\gamma}{c(2\pi\gamma)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n - \zeta \cdot (1 + \rho/2)) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 J_0 \left(2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \mu(\varphi) \sqrt{\zeta \cdot (n - \zeta \cdot (1 + \rho/2))} \right) \times \\ \times \left[1 + \frac{A(E_\gamma)}{2} (\mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2))^2 \right] \times \cos \left\{ (n - \zeta \cdot \rho/2)(\varphi_1 - \varphi_2) + \zeta \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \mu^2(\varphi) \right\}, \quad (13)$$

где $\alpha = 1/137.04$, E_γ – энергия испускаемого фотона,

ступенчатая функция $\Phi(y) = 1$ при $y \geq 0$ и $= 0$ при $y < 0$,

J_0 – функция Бесселя,

$\mu(\varphi) = \gamma(v_x(\varphi) - \langle v_x \rangle) / c$ (в потенциале (1) для каналированного позитрона $\langle v_x \rangle = 0$),

$$\zeta(E_\gamma, \xi_m) = \frac{E_\gamma E}{2\gamma^2 (\hbar\omega) (E - E_\gamma)}, \quad \omega = \omega_0 \cdot \Omega(\xi_m), \quad A(E_\gamma) = 1 + \frac{E_\gamma^2}{2E(E - E_\gamma)}.$$

Согласно сделанному ранее анализу движение позитрона в потенциальной яме (1) представляем в виде гармонического колебания (5) с частотой, зависящей от амплитуды ξ_m . Для такой аппроксимации рассчитаны по предыдущей формуле

и показаны на рис. 8 спектральные зависимости $(d^2E/dE_\gamma ds)$ от E_γ одного каналированного позитрона со следующими значениями $\xi_m = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$.

При расчете величины спектра для каждого значения E_γ суммирование по n в (13) заканчивалось на $n_{\max}(E_\gamma)$, когда добавка следующего члена с $n = n_{\max}(E_\gamma) + 1$ относительно накопленной суммы становилась меньше 1%. Интегрирование проводилось с точностью 10^{-3} .

Полное спектральное излучение всеми захваченными в канал позитронами $(d^2E/dE_\gamma ds)_{\text{tot}}$ будет определяться выражением

$$\left(\frac{d^2E}{dE_\gamma ds} \right)_{\text{tot}} = N \int_0^1 f(\xi_m) \Psi(E_\gamma, \xi_m) d\xi_m, \quad (14)$$

где $\Psi(E_\gamma, \xi_m)$ – функция спектральной интенсивности одного позитрона с амплитудой ξ_m , т.е. правая часть выражения (13). Рассчитанная по формуле (14) зависимость $(d^2E/dE_\gamma ds)_{\text{tot}}$ от E_γ для двух случаев начальной полуширины углового разброса пучка позитронов $\vartheta_0 \times 10^6 = 4$ и $\vartheta_0 \times 10^6 = 19$ показана на рис. 9. Максимальный уровень полного спектра излучения и соответствующее ему значение энергии фотона E_γ приведены в следующей таблице.

$\vartheta_0 \times 10^6$	η	N	$\max(d^2E/dE_\gamma ds)_{\text{tot}}$	$E_\gamma / \Gamma_{\text{ЭВ}}$
4	0.249	97.96 %	$\approx 4.2/\text{см}$	$\approx (1.95 \div 2.30)$
19	1.184	80.79 %	$\approx 5.1/\text{см}$	$\approx (2.27 \div 2.96)$

Как отмечалось выше, формула (13) описывает излучение при любых значениях параметра мультипольности ρ , включая и квантовую область, когда необходимо учитывать отдачу при излучении фотона. Если пренебречь этой отдачей, то функции $\zeta(E_\gamma, \xi_m)$ и $A(E_\gamma)$ в (13) принимают вид

$$\zeta(E_\gamma, \xi_m) = \frac{E_\gamma}{2\gamma^2 (\hbar\omega)}, \quad A(E_\gamma) = 1 + \frac{E_\gamma^2}{2E^2}.$$

Для этого случая на рис. 12 показана спектральная зависимость (пунктирная линия **b**) для всех каналированных позитронов при $\vartheta_0 \times 10^6 = 19$.

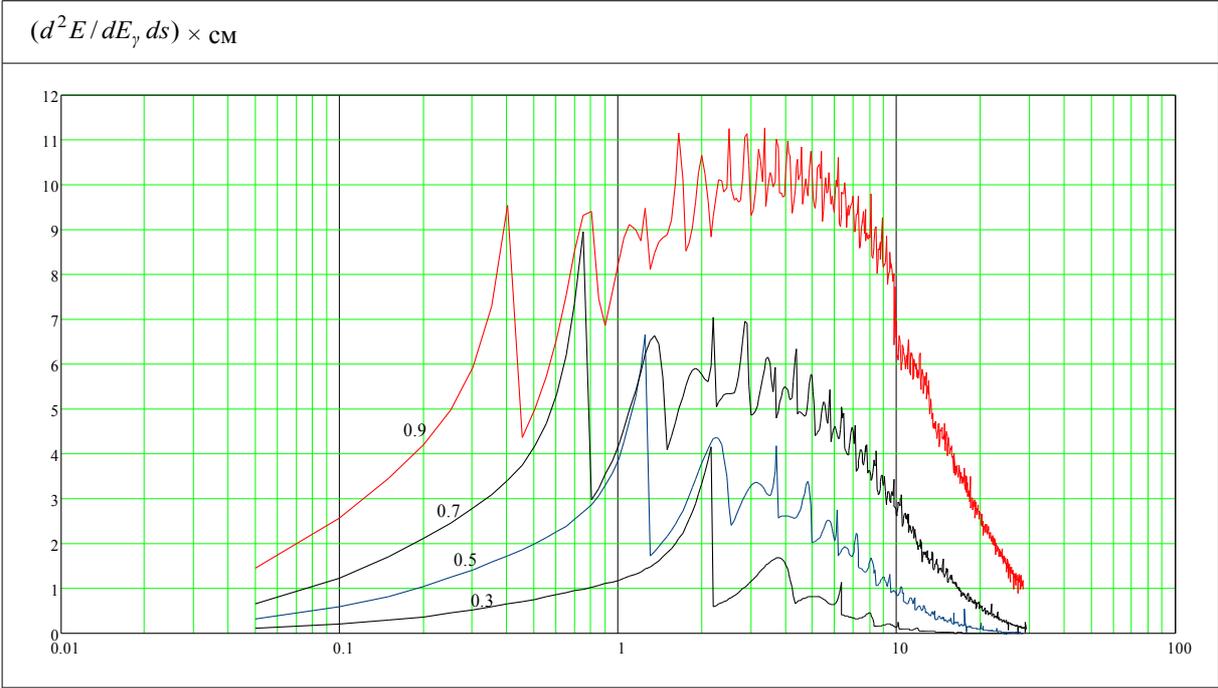


Рис. 8. Спектральная зависимость $(d^2E/dE_\gamma ds)$ от $E_\gamma/\text{ГэВ}$, полученная методом [1] с учетом отдачи при излучении для значений ξ_m , отмеченных на каждой кривой.

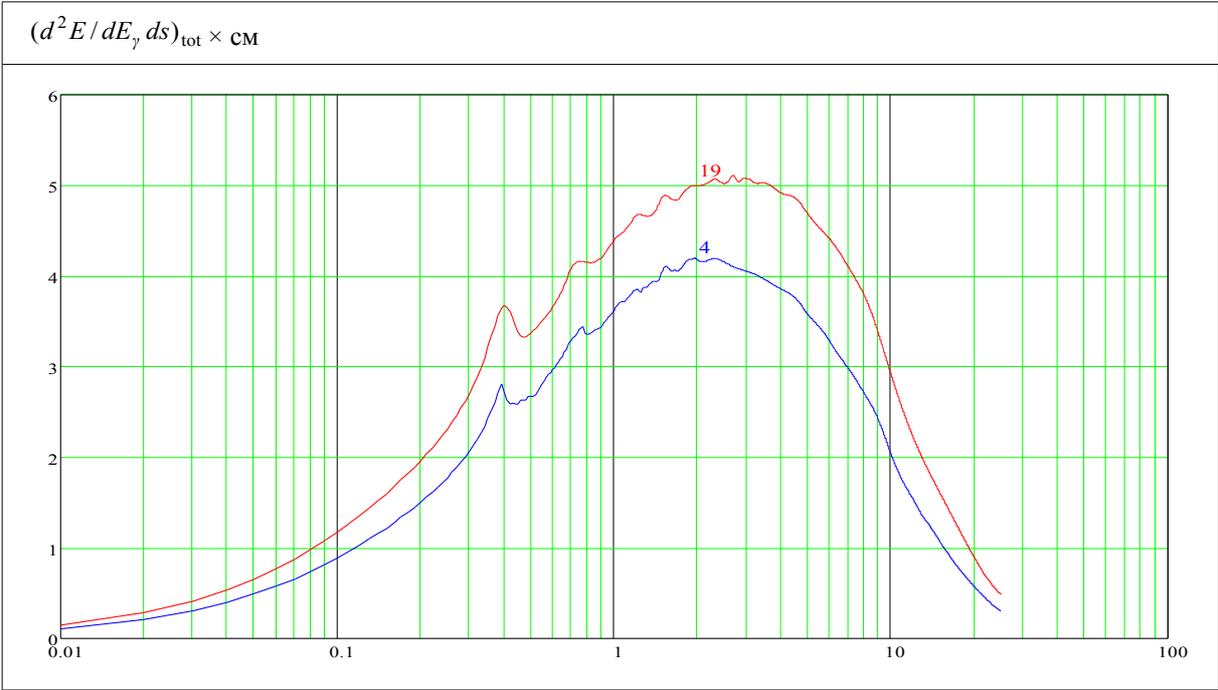


Рис. 9. Полная спектральная интенсивность в зависимости от энергии излучаемых фотонов $E_\gamma/\text{ГэВ}$, полученная методом [1] с учетом отдачи при излучении.

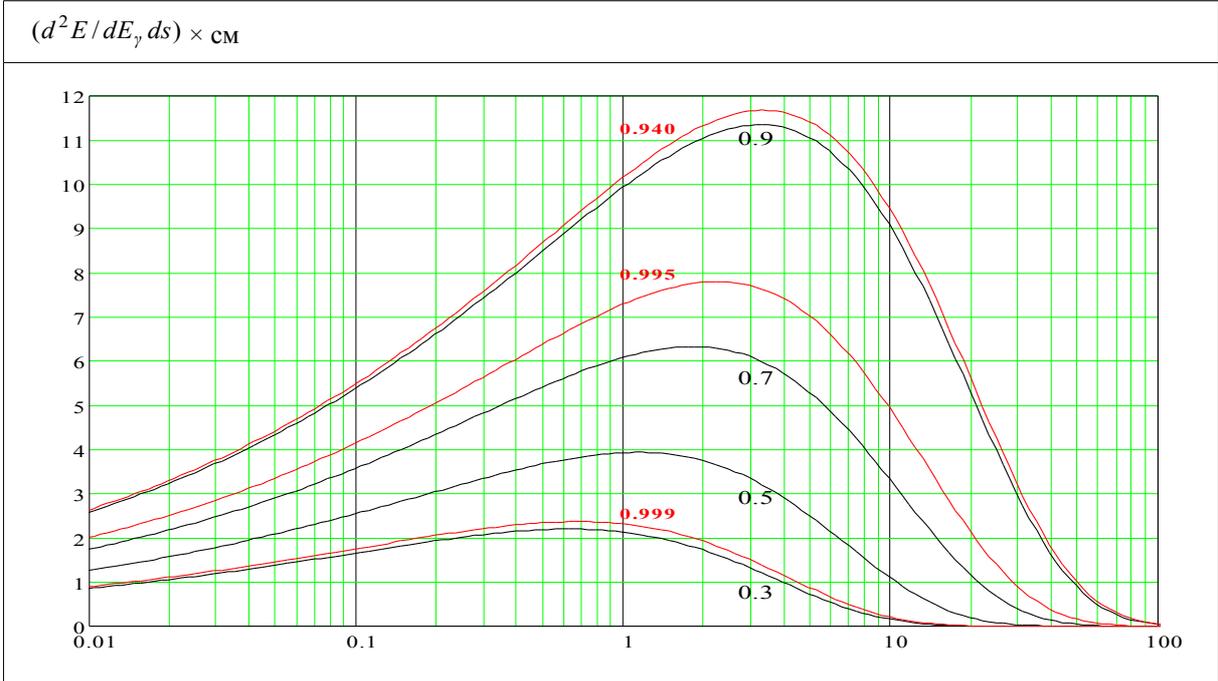


Рис. 10. Спектральная зависимость $(d^2E/dE_\gamma ds)$ от $E_\gamma/\text{ГэВ}$, полученная методом классической электродинамики [15] для значений ξ_m , отмеченных на каждой кривой.

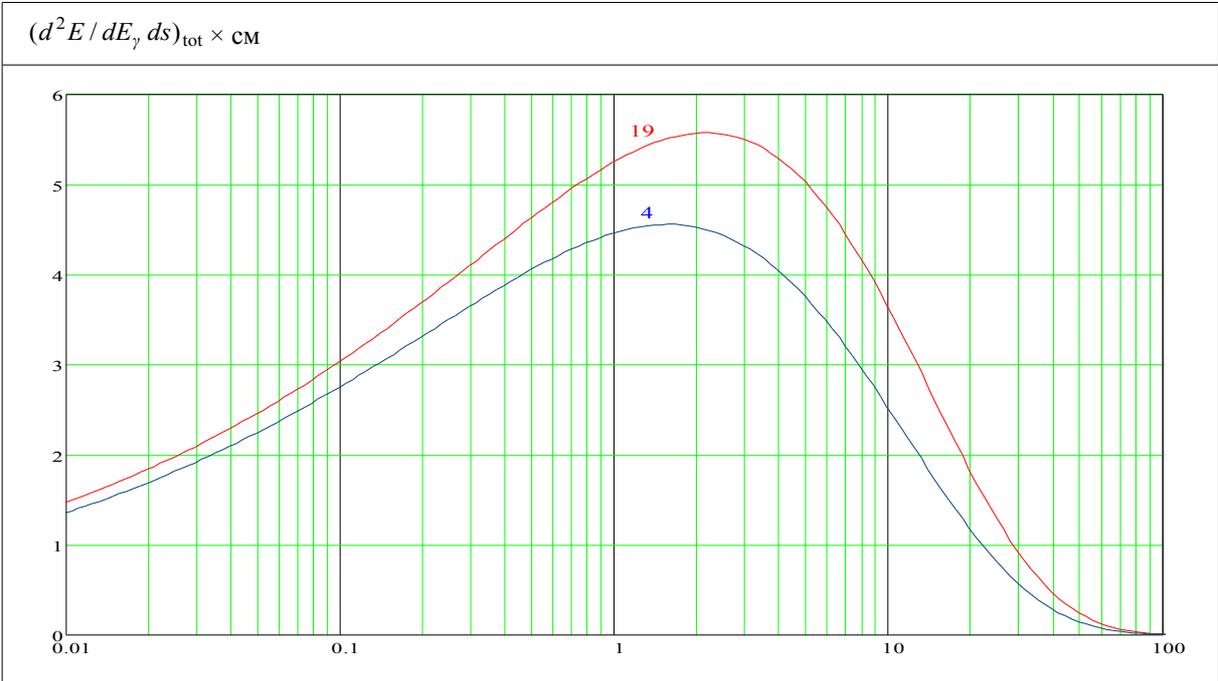
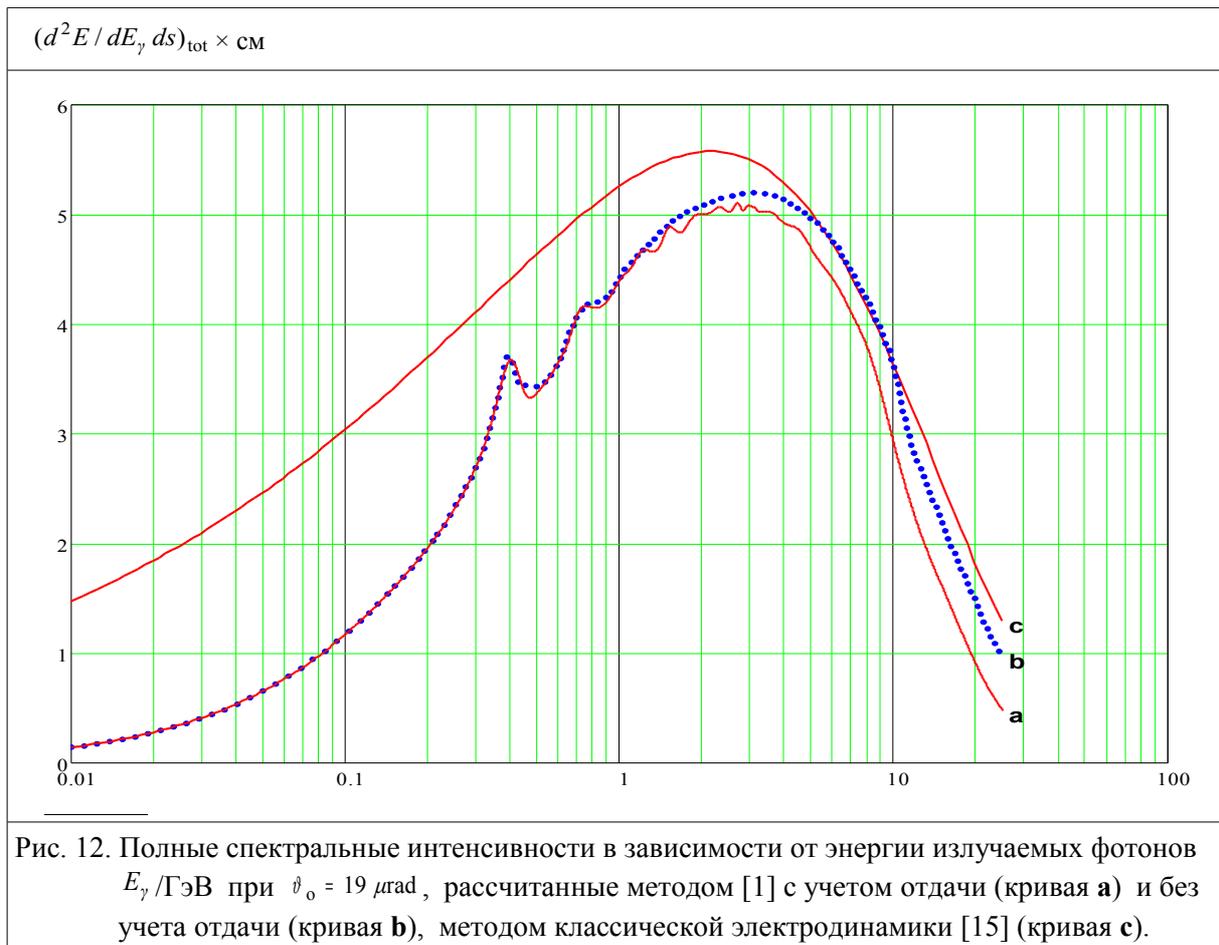


Рис. 11. Полная спектральная интенсивность в зависимости от энергии излучаемых фотонов $E_\gamma/\text{ГэВ}$, полученная методом классической электродинамики [15].



§ 4. Расчет на основе соотношений для магнитотормозного излучения

Кроме расчета излучения методом [1] (формула (13)), рассмотрим процесс излучения при каналировании позитронов другим методом, основанным на уравнениях классической электродинамики. Этот метод справедлив, когда направление движения частицы при ее движении в поле изменяется на угол, значительно превосходящий характерный угол излучения $\sim 1/\gamma$. Суть метода состоит в том, что учитывается только поперечное движение и пренебрегается интерференцией от далеких участков траектории, как это реализуется в случае магнитотормозного излучения. Тогда согласно [15] (см. стр. 258) полное спектральное излучение по частоте фотонов $\tilde{\omega}$ (или энергии $E_\gamma = \hbar \tilde{\omega}$) на единице длины s , генерируемое ультрарелятивистским каналированным

позитроном, совершающим гармонические поперечные колебания с частотой $\omega(\xi_m)$, определяется выражением

$$\frac{d^2 E}{dE_\gamma ds} = -M(\xi_m) \frac{2e^2}{\gamma^2 c \hbar} n 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\text{Ai}'(u)}{u} + \frac{1}{2} \int_u^\infty \text{Ai}(s) ds \right\} d\varphi, \quad (15)$$

где $E_\gamma = \hbar \tilde{\omega}$, \hbar – постоянная Планка,

$M(\xi_m) = \frac{\omega(\xi_m)}{2\pi c}$ – число колебаний частицы при прохождении единицы длины кристалла,

$$n = \frac{\tilde{\omega}}{\omega(\xi_m)}, \quad \text{Ai}(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{y^3}{3} + uy\right) dy \text{ – функция Эйри,} \quad \text{Ai}'(u) = \frac{d}{du} \text{Ai}(u),$$

$$u = u(\xi_m, \varphi) = \chi(\xi_m) \cdot \left(\frac{n}{\cos(\varphi)}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \chi(\xi_m) = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{c}{\omega(\xi_m)} \frac{2}{\xi_m d}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Движение позитрона, как и раньше, в потенциальной яме (1) представляется в виде гармонического колебания (5) с частотой, зависящей от амплитуды ξ_m . Для такой аппроксимации рассчитаны по предыдущей формуле (15) и показаны на рис. 10 (аналогично рис. 8) спектральные зависимости $(d^2 E / dE_\gamma ds)$ от E_γ одного каналированного позитрона со следующими значениями амплитуды $\xi_m = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.940, 0.995, 0.999$. Таким образом, теперь полное излучение всех захваченных в канал частиц определяется выражением

$$\left(\frac{d^2 E}{dE_\gamma ds}\right)_{\text{tot}} = N \int_0^1 f(\xi_m) L(E_\gamma, \xi_m) d\xi_m, \quad (16)$$

где $L(E_\gamma, \xi_m)$ – функция спектральной интенсивности одного позитрона с амплитудой ξ_m , т.е. правая часть выражения (15). Рассчитанная по формуле (16) зависимость $(d^2 E / dE_\gamma ds)_{\text{tot}}$ от E_γ для двух случаев начальной полуширины углового разброса пучка позитронов $\vartheta_0 / \mu\text{rad} = 4$ и $\vartheta_0 / \mu\text{rad} = 19$ показана на рис. 11.

На рис. 12 показаны спектральные зависимости, полученные для случая $\vartheta_0 / \mu\text{rad} = 19$ с помощью двух методов из [1] с учетом отдачи (кривая **a**) и без ее учета (кривая **b**) и из [15] с помощью классической электродинамики (кривая **c**). Сравнение

этих зависимостей показывает их удовлетворительное согласие: максимум спектра излучения по классической электродинамике превышает такой максимум с учетом отдачи менее чем на 10 %.

Обсуждение результатов

В работе достаточно подробно рассмотрено планарное периодическое движение каналированного позитрона в прямом кристалле с ориентацией (011): найдены зависимости частоты колебаний и параметра мультипольности от амплитуды. Широкий диапазон значений параметра мультипольности в рассмотренном потенциале указывает на реализацию различных типов излучения: интерференционного – частицами в основном с малыми амплитудами и магнитотормозного – с относительно большими амплитудами. Показано, что в таком потенциале плотность распределения каналированных частиц по амплитудам колебаний ξ_m стремится к нулю при $\xi_m \rightarrow 1$. Это как раз те частицы, которые при своём движении близко подходят к кристаллическим плоскостям. Таких частиц мало и, кроме того, эти частицы из-за взаимодействия с ядрами кристаллической решетки с большей вероятностью могут выходить из режима каналирования, т.е. быть деканалированными.

Показано, что для основной массы каналированных частиц с амплитудами меньшими ≈ 0.98 их движение представляет собой гармонические колебания с рассчитанными частотами, зависящими от их амплитуд. В таком гармоническом приближении существенно упрощается расчет спектра излучения всех каналированных частиц двумя способами: методом [1] с учетом и без учета квантовой отдачи и методом классической электродинамики [15]. Сравнение полученных результатов показывает их удовлетворительное согласие: максимум спектра излучения по классической электродинамике превышает такой максимум с учетом отдачи менее чем на 10 %.

Таким образом, учитывая то, что метод [1] применим только для прямого кристалла, метод классической электродинамики [15] может послужить основой для дальнейшего рассмотрения процесса излучения в изогнутых монокристаллах.

Заключение

Проведенные расчеты доказывают перспективы применения монокристаллов для создания мощных источников направленного излучения на ускорителях и будут использованы для сравнения с данными эксперимента INSURAD и при планировании новых исследований в ЦЕРН и ГНЦ ИФВЭ.

Работа поддержана Дирекцией ГНЦ ИФВЭ и грантами РФФИ №№ 07-02-00022-а, 08-02-01453-а, а также грантом № 09-02-92431-КЭ_а совместного проекта РФФИ – Консорциум EINSTEIN (Италия).

Список литературы

- [1] В.Н. Байер, В.М. Катков, В.М. Страховенко. *Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах*. – Новосибирск; Наука, 1989.
- [2] J. Vak et. al. // Nuclear Physics B254 (1985), p. 491.
- [3] Э.Н. Цыганов // ЭЧАЯ, том 20, вып. 1 (1989), p. 5.
- [4] A. Aryan et al. (NA 59 Collaboration). *Coherent bremsstrahlung, coherent pair production, birefringence and polarimetry in the 20-170 GeV energy range using aligned crystals*. // Phys. Rev. ST Accel. Beams 11:041001, 2008.
- [5] V.A. Maisheev. *Model-independent description of planar channeling at high energies*. // NIM B119 (1996), p. 42.
- [6] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. – М.: Наука, 1974.
- [7] S. Bellucci and V.A. Maisheev. *Calculation of intensity of radiation in crystal undulator*. // NIM B 252 (2006), p. 339.
- [8] S. Bellucci and V.A. Maisheev. // J. Phys. Condens. Matter 18 (2006), S2083.
- [9] A.J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. *Regular and stochastic motion*, Springer-Verlag NY, 1983. Перевод: А. Лихтенберг, М. Либерман. *Регулярная и стохастическая динамика* (М.: Мир, 1984).

- [10] А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович. *Нелинейная физика. Стохастичность и структуры*. В книге “Физика XX века, Развитие и перспективы”. – М.: Наука, 1982.
- [11] F. Vivaldi. *Weak instabilities in many-dimensional Hamilton systems*. // Rev. of Modern Physics, vol. 56, № 4, 1984.
- [12] Б.В. Чириков. *Нелинейные резонансы и динамическая стохастичность*.// Природа, 1982, № 4.
- [13] А. Арнольд. *Математические методы классической механики*. – М.: Наука, 1972.
- [14] А. Пуанкаре. *Новые методы небесной механики*. Избранные труды. – М.: Наука, 1972, т. 2, гл. 33.
- [15] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. *Теория поля*. – М.: Физматгиз, 1960.

Рукопись поступила 17 декабря 2009 г.

В.А. Маишеев и др.

Излучение фотонов при каналировании позитронов в монокристаллах
в области энергий 100 ГэВ.

Редактор Л.Ф. Васильева.

Подписано к печати 24.12.2009. Формат 60 × 84/16. Офсетная печать.
Печ. л. 1,56. Уч.- изд. л. 2,4. Тираж 80. Заказ 9. Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий,
142281, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2009-21, ИФВЭ, 2009
