ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2010-7
ОЭФ

И.А. Качаев[1]

Метод повышения точности Монте-Карло интегрирования по фазовому объему с аксептансом

[1]E-mail: Igor.Katchaev@ihep.ru

Протвино 2010

УДК 519.25.256 М–24

Аннотация

Качаев И.А. Метод повышения точности Монте-Карло интегрирования по фазовому объему с аксептансом: Препринт ИФВЭ 2010-7. – Протвино, 2010. – 4 с., библиогр.: 4.

Предлагается метод ускорения сходимости Монте-Карло интегрирования при вычислении интегралов по фазовому объему, в которые входит аксептанс установки. Точность оценки интеграла $\int g(x)\varepsilon(x)\,dx$ методом Монте-Карло, где $g(x)$ — произвольная функция, а $\varepsilon(x)$ — аксептанс установки, может быть улучшена, если доступна хорошая оценка интеграла $\int g(x)\,dx$.

Abstract

Kachaev I.A. Method to Obtain Better Monte-Carlo Accuracy for Phase Space Integration with Acceptance: IHEP Preprint 2010-7. – Protvino, 2010. – p. 4, refs.: 4.

Method is suggested to obtain better Monte-Carlo accuracy for phase space integration with acceptance. Better Monte-Carlo estimate can be obtained for the integral $\int g(x)\varepsilon(x)\,dx$ where $g(x)$ is arbitrary function and $\varepsilon(x)$ is setup acceptance if good estimate for the integral $\int g(x)\,dx$ is available.

1. Метод вычитания главной части в численном интегрировании

В физике высоких энергий часто приходится описывать ситуацию, когда частицы, рожденные в реакции с определенной кинематикой и матричным элементом, проходят через экспериментальную установку с определенным аксептансом. При описании таких ситуаций, например методом парциально-волнового анализа, встречаются многомерные интегралы по фазовому объему вида

$$I = \int g(x)\,dx\ , \quad I_\varepsilon = \int g(x)\varepsilon(x)\,dx, \tag{1}$$

где переменная интегрирования x включает в себя как кинематические переменные реакции, так и переменные, описывающие установку, от координат вершины взаимодействия до срабатывания/несрабатывания отдельных элементов детектора. После соответствующего преобразования координат можно считать, что это интегрирование идет по многомерному единичному кубу значительной размерности. Функция $g(x)$ включает в себя матричный элемент и кинематические факторы, функция $\varepsilon(x)$ описывает аксептанс установки.

Ввиду высокой сложности, подобные интегралы обычно вычисляются методом Монте-Карло, т.е. генерированием событий с соответствующей плотностью вероятности и моделированием прохождения их через установку. Скорость сходимости интегрирования методом Монте-Карло мала, данная работа предлагает метод ускорения сходимости для интегралов вида I_ε в (1).

Как известно, среднеквадратическая ошибка интегрирования методом Монте-Карло определяется дисперсией значений подинтегральной функции. Введем для краткости стандартные операторы среднего и дисперсии значений функции

$$E(f) \equiv \overline{f} \equiv \int f(x)\,dx\ , \quad D(f) \equiv E\left((f - E(f))^2\right) = \overline{f^2} - (\overline{f})^2. \tag{2}$$

Среднеквадратичная ошибка интегрирования для интеграла от функции $g(x)$ по N точкам (смоделированным событиям реакции) есть

$$\sigma(I) = \sqrt{D(g(x))/N}. \tag{3}$$

Соответственно ошибку интегрирования методом Монте-Карло можно уменьшить, уменьшив дисперсию интегрируемой функции. Известны многие методы уменьшения дисперсии, для интегралов общего вида они подробно описаны в [1, 2]

Следующая идея называется методом выделения главной части. Подберем функцию, близкую к интегрируемой, интеграл от которой можно посчитать быстрее и/или точнее, а методом Монте-Карло будем вычислять лишь интеграл от небольшой разницы между этими функциями. В нашем случае, как правило, интеграл I может быть вычислен существенно быстрее и точнее, чем I_ε, поскольку он не зависит от установки, имеет меньшую размерность и может быть вычислен (полу)аналитически.

В этом случае для вычисления I_ε в качестве функции, близкой к $g(x)\varepsilon(x)$, можно взять $\varepsilon\, g(x)$, где ε есть число, которое можно выбрать из условия минимальности дисперсии функции-разности. Для произвольного ε запишем тождество

$$\int \varepsilon(x) g(x)\, dx = \int \varepsilon\, g(x)\, dx + \int [\varepsilon(x) - \varepsilon] g(x)\, dx. \tag{4}$$

В правой части первое слагаемое вычислим (полу)аналитически, а второе методом Монте-Карло. Поскольку первое слагаемое мы считаем точным, точность метода определяется точностью вычисления второго слагаемого. Обозначим как I и I_ε оценки интегралов, полученные методом Монте-Карло. Обозначим через I_0 (полу)аналитическую оценку интеграла без аксептанса, а через I'_ε получаемую данным методом улучшенную оценку интеграла с аксептансом. В этих обозначениях из (4) получаем метод вычислений

$$I'_\varepsilon = \varepsilon(I_0 - I) + I_\varepsilon. \tag{5}$$

Следует подчеркнуть, что по смыслу правой части равенства (4) Монте-Карло оценки I и I_ε здесь получены *по одному и тому же набору событий*. При $\varepsilon = 0$ мы возвращаемся к исходному интегрированию без оптимизации. Для нахождения оптимального ε запишем дисперсию подынтегральной функции второго слагаемого в (4)

$$D(\varepsilon) = \overline{([\varepsilon(x) - \varepsilon] g(x))^2} - (\overline{[\varepsilon(x) - \varepsilon] g(x)})^2$$

и найдем минимум этого выражения из условия $dD/d\,\varepsilon = 0$, учитывая коммутативность операций усреднения и дифференцирования. Мы обозначаем дисперсию как функционал $D(f(x))$ и дисперсию как функцию параметра сдвига $D(\varepsilon)$ одной буквой, различие ясно из контекста. Получаем оптимальный сдвиг

$$\varepsilon_0 = \frac{\overline{\varepsilon(x) g^2(x)} - \overline{\varepsilon(x) g(x)}\, \overline{g(x)}}{\overline{g^2(x)} - \overline{g(x)}\, \overline{g(x)}}, \tag{6}$$

где знаменатель есть $D(g(x))$. Чтобы оценить полученный выигрыш в дисперсии и соответственно в погрешности интегрирования, заметим, что $D(\varepsilon)$ квадратична по ε, т.е.

$$D(\varepsilon) = a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c, \quad a = D(g(x)), \quad \varepsilon_0 = \frac{-b}{2a}, \quad D(0) - D(\varepsilon_0) = \frac{b^2}{4a}.$$

Отсюда получаем выигрыш в дисперсии, который всегда положителен:

$$D(0) - D(\varepsilon_0) = \varepsilon_0^2 D(g(x)). \tag{7}$$

Хотя ε_0 и имеет смысл некоторого среднего аксептанса, эта величина положительной быть не обязана. Пример: область интегрирования одномерная, $0 < x < 1$,

$$\begin{array}{lll} \varepsilon(x) = 1, & g(x) = 0.5 & \text{при } x < 0.5, \\ \varepsilon(x) = 0, & g(x) = 1 & \text{при } x \geq 0.5. \end{array}$$

В этом случае $\varepsilon_0 = -1$, причем $D(\varepsilon_0) = 0$, и результат интегрирования становится точным. Заметим, что использование произвольного выбранного *a priori* $\varepsilon > 0$ приводит в этом примере к *ухудшению* дисперсии. Именно такой не совсем корректный метод применен в [3].

2. Заключение

Данный метод имеет несколько положительных особенностей. Во-первых, при его использовании точность вычисления интегралов I_ε зависит не от абсолютной величины аксептанса, а лишь от его неравномерности по фазовому объему. Далее, поскольку $D(\varepsilon)$ квадратична и вблизи ε_0, погрешность интегрирования слабо зависит от оценки ε_0, и ее не нужно вычислять с высокой точностью. Наконец, ε_0 можно вычислять из данных прямо при подсчете интегралов. Для вычисления методом Монте-Карло интегралов I и I_ε вместе с оценками погрешностей необходимо накапливать суммы величин

$$g(x), \quad g^2(x), \quad \varepsilon(x)g(x), \quad \varepsilon^2(x)g^2(x).$$

Для вычисления ε_0 достаточно вычислять еще и $\varepsilon(x)g^2(x)$, так что накладные расходы на реализацию метода очень небольшие. После окончания цикла по МС-событиям вычисляется ε_0 по формуле (6), а затем интегралы по формуле (5) и оценка погрешности из (7), (3).

Еще одно достоинство этого метода — он "прозрачен" и легко сочетается с любыми другими оптимизациями: выборкой по значимости, симметризацией, квази Монте-Карло и т.д. Единственное ограничение — необходимость наличия хорошей оценки интеграла по фазовому объему без аксептанса.

Метод был использован в исследовании системы $\pi^+\pi^-\pi^-$ методом парциально-волнового анализа [4].

Список литературы

[1] James F, Monte-Carlo Theory and Practice, Rep. Prog. Phys. Vol 43, 1980.

[2] Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло, Москва, 1973.

[3] J.D. Hansen et al., Nucl. Phys. **B81** (1974), 403.

[4] D.I. Amelin et al., Phys. Lett. B 356 (1995), 595.

Рукопись поступила 7 июня 2010 г.

И.А. Качаев
Метод повышения точности Монте-Карло интегрирования по фазовому объему с аксептансом.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Л.Ф. Васильева.

Подписано к печати 17.06.2010. Формат $60 \times 84/16$. Офсетная печать.
Печ.л. 0,37. Уч.-изд.л. 0,58. Тираж 80. Заказ 55. Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142281, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2010–7, И Ф В Э, 2010