



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2011-24  
ОЭФ, ОМВТ

С.И. Битюков, А.В. Синьговский<sup>1</sup>, В.В. Смирнова

## Об одном методе идентификации электромагнитных ливней

Направлено в *ИИИФ*

---

<sup>1</sup>Университет шт. Миннесота США

Протвино 2011

**Аннотация**

Битюков С.И., Синьговский А.В., Смирнова В.В. Об одном методе идентификации электромагнитных ливней: Препринт ИФВЭ 2011-24. – Протвино, 2011. – 12 с., 7 рис., библиогр.: 5.

В работе рассматривается метод идентификации и разделения двух слившихся электромагнитных ливней в электромагнитных калориметрах. Метод использует статистические моменты зарегистрированного распределения энергосодержания в калориметре для оценки энергии и координат ливней. Метод применим для перекрывающихся спектров или сигналов одинаковой формы.

**Abstract**

Bitjukov S.I., Singovsky A.V., Smirnova V.V. A Method for the Identification Electromagnetic Showers: IHEP Preprint 2011-24. – Protvino, 2011. – p. 12, figs 7, refs.: 5.

The paper shows the applicability of the moments method for identification and separation of pair of electromagnetic showers. The empirical statistical moments of registered energy of sum of two overlapping showers are used for estimation of energy and coordinates of each shower.

## **Введение**

Для регистрации фотонов и адронов высоких энергий применяются электромагнитные калориметры годоскопического (ячеистого) типа [1], являющиеся детекторами полного поглощения. В данных детекторах амплитудный анализ позволяет определить как полное энергосодержание, так и координаты центра тяжести распределения энергосодержания, которые могут служить оценками координат регистрируемых частиц. Обработка интенсивных информационных потоков с электромагнитных калориметров требует быстродействующих методов обработки, обеспечивающих необходимую точность определения кинематических параметров в событиях с большой множественностью. Известно, что регистрируемые характеристики электромагнитного ливня (статистические центральные моменты распределения энергосодержания) в калориметре с ячеистой структурой имеют сильную зависимость от координаты центра тяжести электромагнитного ливня в ячейке калориметра. В данной работе обсуждается метод, использующий статистические моменты, включая моменты третьего порядка, для идентификации электромагнитных ливней и оценок их энергий и координат.

## **Постановка задачи**

Объектом исследования является регистрация электромагнитного ливня в электромагнитном калориметре. Цель работы показать перспективность метода, использующего статистические моменты (далее метод моментов) для задач идентификации и оценки параметров электромагнитных ливней. В работе пренебрегается различием в развитии ливней от гамма-квантов и электронов, а так же зависимостью формы ливня

(регистрируемых статистических моментов ливня) от энергии ливня, так как эти эффекты не существенны в данном методе и могут быть учтены при более детальном анализе. Также, не обсуждается оценка параметров частиц, порождающих электромагнитный ливень.

Определим основные характеристики ливня, которые будут использоваться при построении метода идентификации ливня и выделения распределения энерговыделения ливня из полного зарегистрированного энерговыделения в электромагнитном калориметре.

Характеристиками регистрируемого электромагнитного ливня, возникшего в электромагнитном калориметре, являются случайные переменные: энерговыделение ливня  $E$ , координаты центра тяжести ливня  $x, y$ , начальные моменты (см. Приложение)  $m_1^x, m_2^x, m_3^x$  и  $m_1^y, m_2^y, m_3^y$  для соответствующих проекций, центральные и радиальный моменты  $\mu_2^x, \mu_3^x, \mu_2^y, \mu_3^y, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_2^R$ . Данные характеристики не зависят от ячеистой структуры калориметра и определяются средой развития ливня и случайной природой самого ливня. Предполагается, что калориметр является однородной средой.

Характеристиками зарегистрированного в калориметре электромагнитного ливня являются реализации перечисленных выше случайных переменных, полученные из оцифрованных и преобразованных сигналов с фотодетекторов калориметра. Обозначим их в соответствии с принятым в математической статистике стандартом, а именно, теми же символами, но помеченными значком  $\hat{\cdot}$ , т.е. такими характеристиками будут наблюдаемое энерговыделение ливня  $\hat{E}$ , координаты центра тяжести зарегистрированного ливня  $\hat{x}, \hat{y}$  (или  $\hat{\eta}, \hat{\phi}$ ), начальные моменты  $\hat{m}_1^x, \hat{m}_2^x, \hat{m}_3^x$  и  $\hat{m}_1^y, \hat{m}_2^y, \hat{m}_3^y$  для соответствующих проекций, центральные и радиальный моменты  $\hat{\mu}_2^x, \hat{\mu}_3^x, \hat{\mu}_2^y, \hat{\mu}_3^y, \hat{\mu}_{12}, \hat{\mu}_{21}, \hat{\mu}_2^R$ .

Значения наблюдаемых величин, кроме наблюдаемого энерговыделения ливня  $\hat{E}$ , сильно зависят от координат центра тяжести ливня в ячейке калориметра. Эти зависимости можно восстановить как прямыми измерениями энерговыделения в калориметре от электромагнитных ливней, образованных частицами с известной энергией, так и используя модель электромагнитного ливня. Учет таких зависимостей необходим при координатных измерениях падающих на калориметр частиц.

В современных экспериментах значительную долю регистрируемых в калориметре частиц составляют неизолированные частицы, то есть распределение энерговы-

деления в ливне от регистрируемой частицы деформировано дополнительным энерговыделением от фоновых частиц. Это может быть, например, pile-up частицы, адроны от сопровождающей струи или от второго гамма-кванта при регистрации быстрого  $\pi^0$ -мезона. Эта деформация в энерговыделении может быть использована для выделения электромагнитного ливня и уточнения его характеристик за счет сравнения измеренных характеристик ливня с теми характеристиками, которые должны соответствовать этому электромагнитному ливню.

### Модель ливня

В работе рассматривается модель электромагнитного калориметра в виде матрицы  $10 \times 10$  счетчиков полного поглощения с квадратной ячейкой в поперечном сечении  $29 \times 29$  мм<sup>2</sup>. Для исследования использовалась модель ливня, предложенная в работе [2].

Определим двумерное совместное распределение как

$$F(X, Y) = \int_{-\infty}^X \int_{-\infty}^Y f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

где  $f(x, y)$  – плотность вероятности энерговыделения ливня, обрезанного в координатной плоскости  $(x, y)$ . Функция  $f(x, y)$  показана на Рис. 1.

Энерговыделение в ячейке рассчитывается из значения кумулятивной функции (Ур. 1) в углах ячейки:

$$G(X, Y) = F(X + \frac{d}{2}, Y + \frac{d}{2}) - F(X + \frac{d}{2}, Y - \frac{d}{2}) - F(X - \frac{d}{2}, Y + \frac{d}{2}) + F(X - \frac{d}{2}, Y - \frac{d}{2}). \quad (2)$$

Известно, что поперечные флуктуации электромагнитного ливня в гомогенной среде несущественны, то есть при идеальной регистрации ливня одномерные центральные моменты  $\hat{\mu}_2$  и  $\hat{\mu}_3$  подчиняются соотношениям  $\hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_3 = \text{const}$  и  $\hat{\mu}_3^x = \hat{\mu}_3^y = 0$ . Квадратная ячейка калориметра несет ответственность за сильное нарушение данных соотношений. Эти нарушения можно видеть на Рис. 2 ( $d=29$  мм). С другой стороны, этот эффект может быть использован для отделения сигнала электромагнитного ливня от фонового сопровождения.

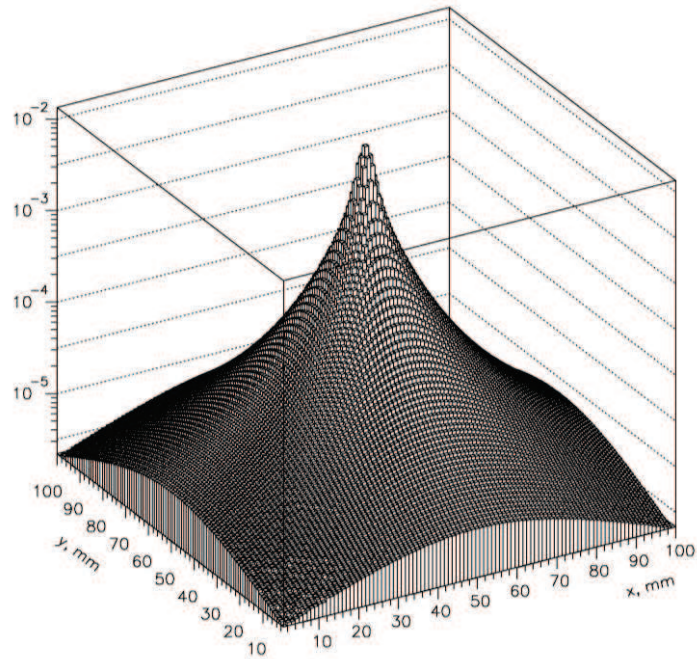


Рис. 1. Плотность вероятности  $f(x,y)$  распределения энерговыделения ливня, обрезанного в координатной плоскости  $(x,y)$ .

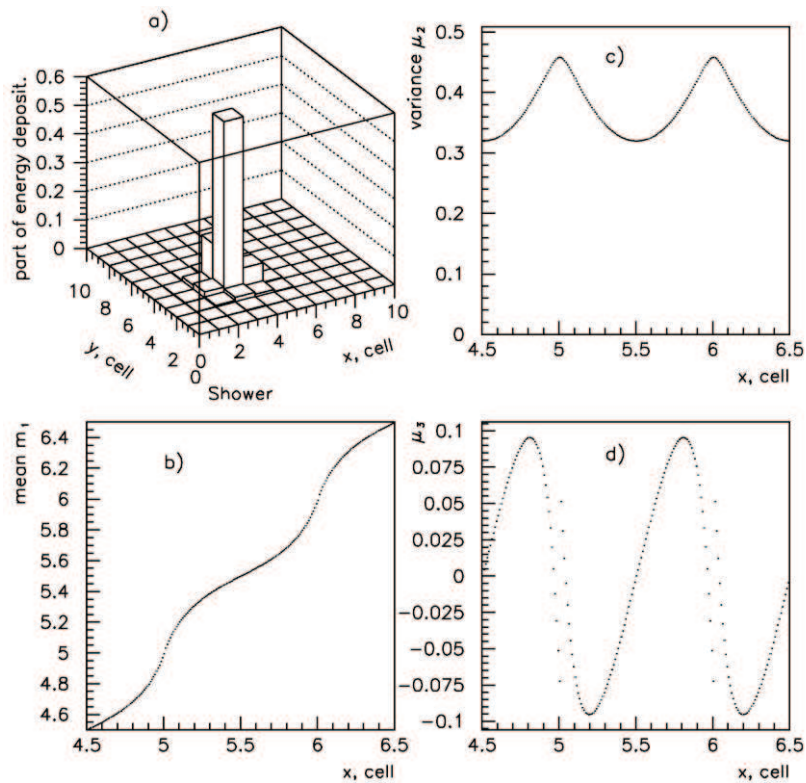


Рис. 2. Типичный ливень в ячейке размером  $d=29$  мм (а). Зависимость наблюдаемых значений моментов  $\hat{m}_1^x$  (b),  $\hat{\mu}_2^x$  (c) и  $\hat{\mu}_3^x$  (d) по координате  $x$  регистрируемой частицы.

## Идентификация одиночного электромагнитного ливня

Предположим, что в детекторе регистрируется два ливня с энерговыведениями  $\hat{E}^{(1)}, \hat{E}^{(2)}$ , координатами центра тяжести  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  и плотностями вероятности энерговыведения ливней  $f(x-x_1, y-y_1), f(x-x_2, y-y_2)$  с соответствующими статистическими моментами. В данном случае, если предполагать аддивность при суммировании энерговыведений от каждого ливня для представления видимого энерговыведения, регистрируемого в калориметре, то распределение энерговыведения можно описать моделью

$$g(x,y)=E^{(1)}f(x-x_1,y-y_1) + E^{(2)}f(x-x_2,y-y_2). \quad (3)$$

Очевидно, что в этом случае статистические моменты для суммарного энерговыведения ливней будут отличаться от моментов одиночного ливня. Покажем, что это различие может быть использовано для определения характеристик каждого из ливней в случае, если ливни частично перекрываются.

Конечно, случайная природа ливня влечет за собой неопределенность в определении моментов. Например, такого типа неопределенность в оценке центрального радиального момента  $\mu_2^R$  близка к  $\sigma = \sigma_{\mu_2^R} \approx 2\%$  для  $\hat{\mu}_2^R$  в нашем случае. Это означает, что вероятность измеренного значения  $\hat{\mu}_2^R$  для одиночного электромагнитного ливня быть больше, чем  $\mu_2^R + 3 \cdot \sigma$  близка к 0.15%. Выполнение данного условия позволяет рассматривать зарегистрированное энерговыведение, как энерговыведение перекрывающихся ливней. Назовем это условие условием 3- $\sigma$  разделимости одиночного электромагнитного ливня и пары (или нескольких) слившихся ливней.

Типичные ливни и зависимость радиальных моментов от расположения центра тяжести в ячейках в случае смешивания двух ливней показаны на Рис. 3. Рис. 4 показывает зависимость чувствительности центрального радиального момента от отношения энергий ливней. Зависимость показывает предельное значение расстояния между ливнями при соответствующем отношении энергий для 3- $\sigma$  разделимости моментов.

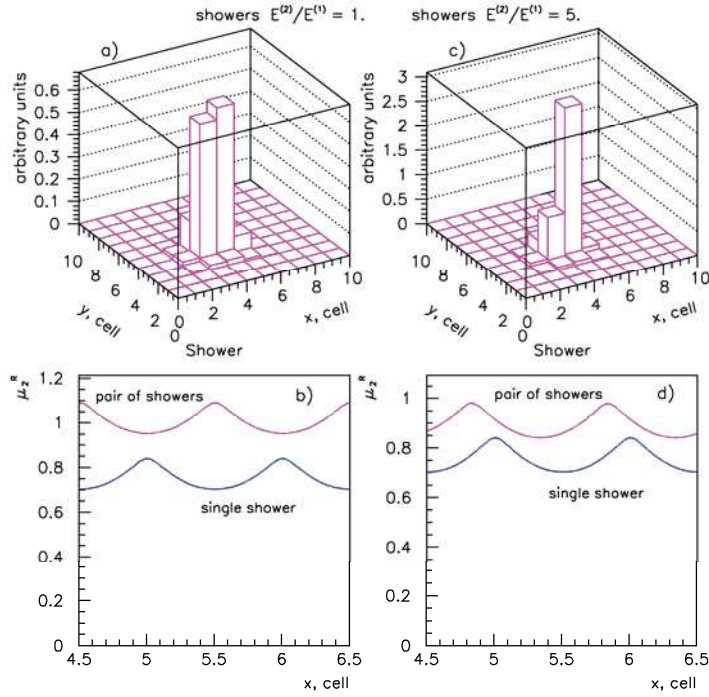


Рис. 3. Типичное энерговыведение для слившихся ливней для квадратной ячейки со стороной  $d=29$  мм (расстояние между ливнями также равно 29 мм) и зависимость наблюдаемых значений моментов  $\hat{\mu}_2^R$  от  $x$ -координаты центра тяжести энерговыведения ( $y$ -координата фиксирована) для одиночного ливня (нижняя кривая) и для пары ливней (верхняя кривая). Рисунки (а) и (б) относятся к ливням с отношением энергий  $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=1$ , а рисунки (с) и (д) относятся к ливням с отношением энергий  $\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}=5$ .

### Метод моментов [3]

В статистике моменты используются для оценки параметров выборки таких как среднее, дисперсия, медиана и т.п.. Пусть вклад ливней в видимое энерговыведение аддитивен (см. Ур. 3), тогда, если зафиксировать одну из координат, система уравнений для оценки характеристик ливней через статистические моменты (в одномерном случае, то есть как в  $x$ -, так и в  $y$ -проекциях) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \hat{m}_0 &= \frac{E^{(1)}}{E^{(1)}+E^{(2)}} + \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}+E^{(2)}} = I, \\
 \hat{m}_1 &= \frac{E^{(1)}}{E^{(1)}+E^{(2)}} m_1^{(1)} + \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}+E^{(2)}} m_1^{(2)}, \\
 \hat{m}_2 &= \frac{E^{(1)}}{E^{(1)}+E^{(2)}} m_2^{(1)} + \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}+E^{(2)}} m_2^{(2)}, \\
 \hat{m}_3 &= \frac{E^{(1)}}{E^{(1)}+E^{(2)}} m_3^{(1)} + \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}+E^{(2)}} m_3^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{4}$$



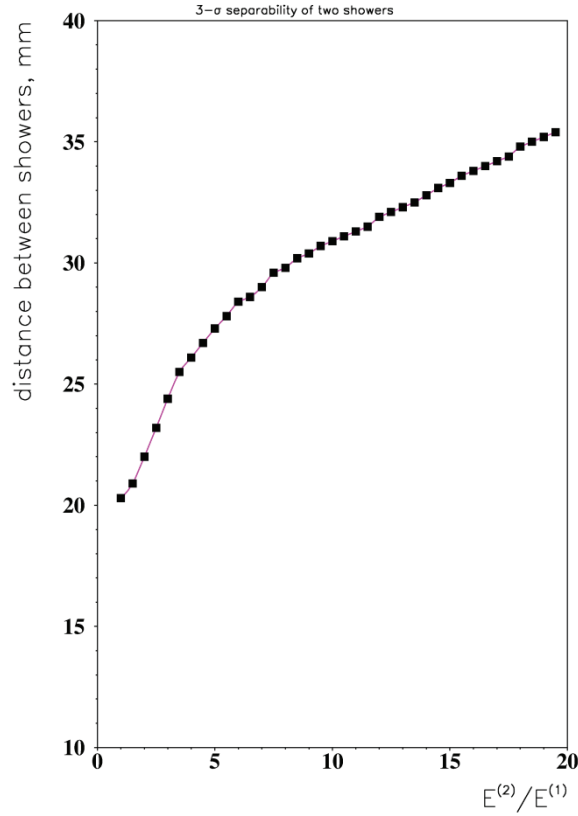


Рис.4. Зависимость расстояния между ливнями для 3-σ разделимости моментов  $\hat{\mu}_2^R$  одиночного ливня и слившейся пары ливней от отношения энергий ливней.

Зависимость значений двумерных центральных моментов  $\mu_{12}$  и  $\mu_{21}$  для одиночного сигнала и пары сигналов представлена на Рис. 5. Поведение этих двух кривых дает дополнительную информацию для выделения сигналов.

Предположим, что центральные моменты одиночных ливней равны  $\mu_2 = \mu_2^{(1)} = \mu_2^{(2)}$  и  $\mu_3 = \mu_3^{(1)} = \mu_3^{(2)}$ . Тогда система Ур. (4) может быть преобразована в систему четырех алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными  $m_1^{(1)}$ ,  $m_1^{(2)}$ ,  $E^{(1)}$  и  $E^{(2)}$ .

$$\begin{aligned}
 M_0 &= E^{(1)} + E^{(2)} = \hat{E}, \\
 M_1 &= E^{(1)}m_1^{(1)} + E^{(2)}m_1^{(2)}, \\
 M_2 &= E^{(1)}m_1^{(1)2} + E^{(2)}m_1^{(2)2}, \\
 M_3 &= E^{(1)}m_1^{(1)3} + E^{(2)}m_1^{(2)3},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $M_0 = \hat{E} \cdot \hat{m}_0$  и  $M_n = \hat{E} \cdot \left( \hat{m}_n - \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \mu_j \hat{m}_{n-j} \right)$ ,  $n \geq 1$ .

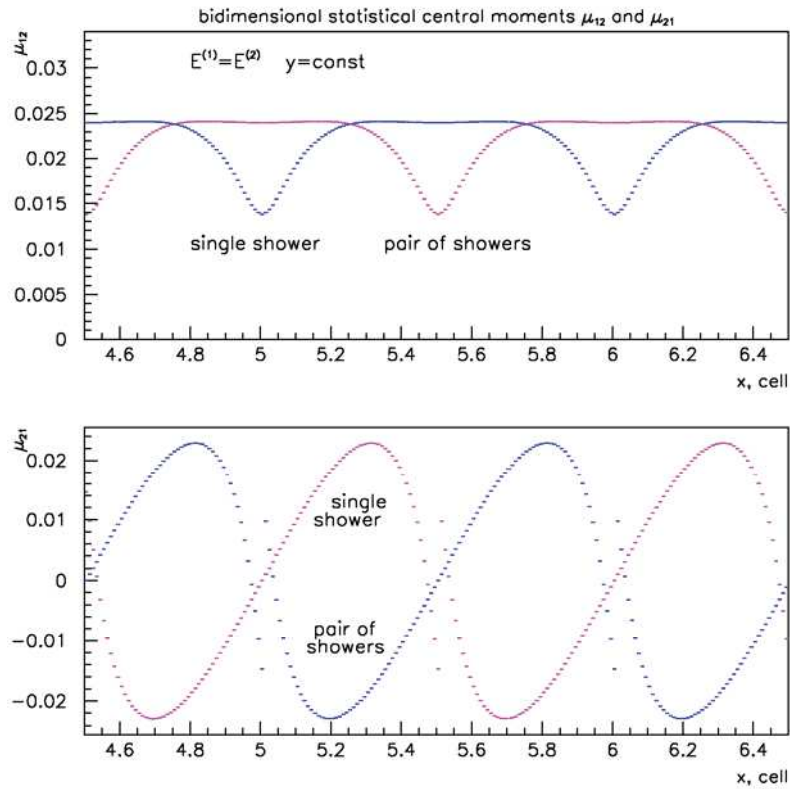


Рис. 5. Зависимость двумерных статистических моментов  $\mu_{12}$  и  $\mu_{21}$  от x-координат.

Система (5) сводится к квадратному уравнению относительно соответствующих начальных моментов  $m_1^{(1)}$ ,  $m_1^{(2)}$  через промежуточную систему

$$M_1 \cdot (m_1^{(1)} + m_1^{(2)}) - M_0 \cdot m_1^{(1)} \cdot m_1^{(2)} = M_2, \quad (6)$$

$$M_1 \cdot (m_1^{(1)} + m_1^{(2)})^2 - (M_1 + M_0 \cdot (m_1^{(1)} + m_1^{(2)})) \cdot m_1^{(1)} \cdot m_1^{(2)} = M_3,$$

из которой находим сумму и произведение корней квадратного уравнения

$$m_1^{(1)} + m_1^{(2)} = \frac{M_0 M_3 - M_1 M_2}{M_0 M_2 - M_1^2} \quad \text{и} \quad m_1^{(1)} \cdot m_1^{(2)} = \frac{M_1 M_3 - M_2^2}{M_0 M_2 - M_1^2}.$$

Это позволяет сразу определить оценки начальных моментов (то есть координаты)  $\hat{m}_1$  и  $\hat{m}_2$  соответствующих ливней. Энерговыведение для каждого ливня восстанавливается из простого соотношения

$$\hat{E}^{(1,2)} = \frac{M_1 - M_0 \cdot \hat{m}_1^{(2,1)}}{\hat{m}_1^{(1,2)} - \hat{m}_1^{(2,1)}}. \quad (7)$$

Данные выражения дают быстрое аналитическое решение задачи разделения двух слившихся ливней и позволяют, при применении более сложных и времяемких алгоритмов восстановления характеристик ливней, использовать полученные характеристики в качестве начального приближения. Оценим неопределенности в восстановлении характеристик ливней.

Зафиксируем расстояние между ливнями одинаковой энергии равное 29 мм. Из Рис. 6 можно видеть (а) x-зависимость центрального момента  $\mu_2^{(1,2)}$  одиночного ливня (Рис. 2 (с) тоже распределение, но для другой y-координаты) и (б) распределение этих величин при равномерном сканировании по x-координате (среднее значение  $\mu_2^{(1,2)}$  приблизительно равно 0.3).

Если нам точно известны моменты этих ливней, то система Ур. 5 имеет точное решение для расстояния между ливнями и для отношения энергий (это решение представлено на Рис. 7 с помощью прямых линий (а) – расстояние, (б) – отношение). Отметим, что решение получено для распределения по энергии для слившихся ливней, а оценки центральных моментов найдены по энерговыведению каждого из ливней. Кривые на этом рисунке являются решениями той же системы Ур. 5, если мы используем средние значения моментов  $\mu_2^{(1,2)}=0.3$  и  $\mu_3^{(1,2)}=0$ . Видно наличие систематических изменений отклонения полученных характеристик ливней как в оценке пространственных координат, так и в оценке отношения энергий на уровне от 0% до 20% в зависимости от координаты развития ливня в ячейке калориметра. Тем не менее, метод моментов позволяет дать приближенную оценку координат и энергий двух слившихся ливней простыми и быстрыми вычислениями в широком диапазоне расстояний между ливнями и их отношений энергий.

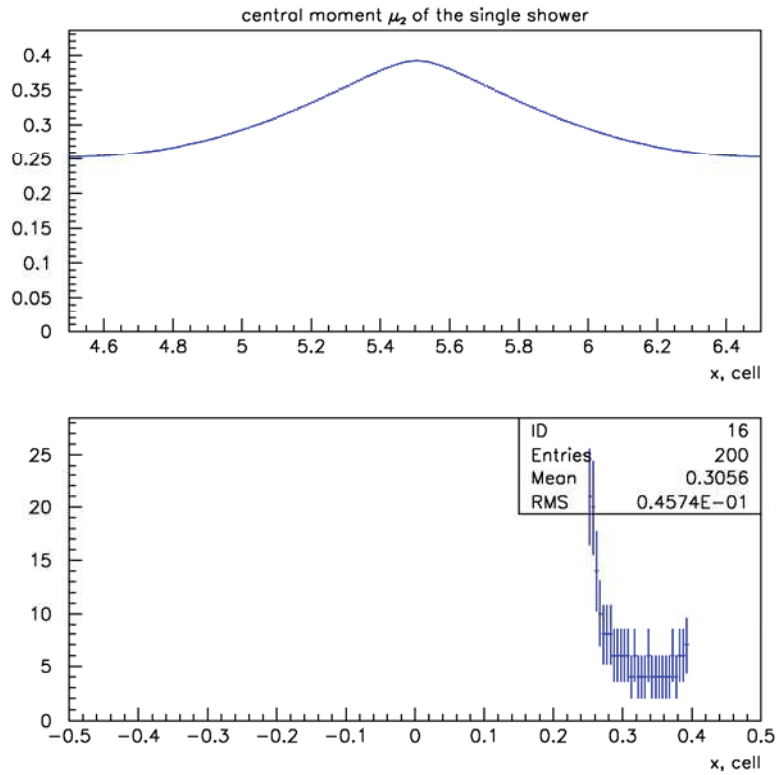


Рис. 6. Зависимости статистических моментов  $\mu_2^{(1,2)}$  по  $x$ -координате одиночного ливня (а) и распределение значений  $\mu_2^{(1,2)}$  по  $x$ -координатам при равномерном сканировании (б).

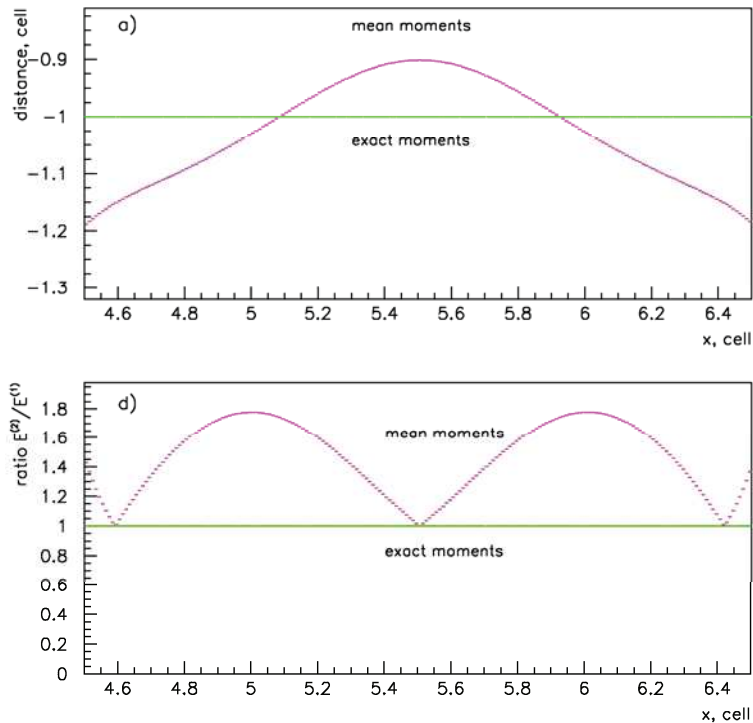


Рис. 7. Зависимость расстояния между парой реконструируемых ливней (а) и отношение реконструируемой энергии (б) по  $x$ -координате центра тяжести слившегося ливня.

## Заключение

Метод моментов дает замкнутые аналитические результаты, что существенно при обработке интенсивных информационных потоков или при статистически обеспеченном моделировании различных процессов для определения экспериментальных разрешений, эффективностей и других характеристик. Метод не требует наложения жестких условий на однородность светособирания в электромагнитных калориметрах. При обработке реальных событий необходимые поправочные зависимости могут быть найдены в калибровочных измерениях.

Рассмотренный в работе пример показывает, что любой алгоритм должен принимать во внимание знание о поведении центральных моментов ливней в детекторе. Метод можно использовать как при программировании триггерных условий запуска экспериментальных установок, так и для поиска начального приближения во времяемких алгоритмах точного определения характеристик электромагнитных ливней [4]. Метод также используется при моделировании процедуры идентификации прямых фотонов с помощью искусственных нейронных сетей [5]. Данный метод может быть применен в спектроскопии для разделения перекрывающихся спектров.

## Благодарности

Мы благодарны проф. Н.Е. Тюрину и проф. В.Д. Ивченко за интерес и поддержку данной работы.

## Список литературы

- [1] V.A.Kachanov, Yu.D.Prokoshkin, A.V.Singovsky, V.G.Baryshevsky, M.V.Korzhih, J.P.Peigneux, M.Poulet, A.A.Fyodorov. *Properties and beam tests of PbWO<sub>4</sub> crystals*. Preprint LAPP-EXP-93.08, 1-22, October 1993; Proc. of IEEE 93, Nuclear Science Symposium, November 1993, San Francisco, California, USA.
- [2] A.A. Lednev, *Electron shower transverse profile measurement*, Nucl. Instr.&Meth. **A366**, 292 (1995); Preprint IHEP 93-152, Protvino, 1993.
- [3] S.I. Bityukov, S.A. Sadovsky, V.K. Semenov, V.V. Smirnova, *Evaluation of shower parameters by the moment method in hodoscopic calorimeter*, Preprint IHEP 81-45, Serpukhov, 1981.

[4] A.A. Lednev, *Separation of the overlapping electromagnetic shower Gams-type calorimeters*, Preprint IHEP 93-153, Protvino, 1993.

[5] M.Yu. Bogolyubsky, Yu.V. Kharlov, S.A. Sadovsky, *Direct photon identification with artificial neural network in the photon spectrometer PHOS*, Nucl.Instr.&Meth. **A502**, 719 (2003).

*Рукопись поступила 3 июня 2011 г.*

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Статистические моменты распределения

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. В то же время при решении практических задач достаточно знать несколько числовых параметров, которые позволяют представить основные особенности случайной величины в сжатой форме. К таким величинам относятся в первую очередь статистические моменты.

Начальным моментом  $k$ -го порядка случайной величины  $X$  называется математическое ожидание  $k$ -й степени случайной величины  $X$ , т.е.

$$m_k^X = E[X^k], \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Отметим, что мы обозначаем математическое ожидание через символ  $E$ , общепринятый в современной математической литературе. Центральным моментом  $k$ -го порядка случайной величины  $X$  называется величина, определяемая формулой

$$\mu_k^X = E[(X - m_1^X)^k], \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Заметим, что математическое ожидание случайной величины есть начальный момент 1-го порядка, а дисперсия есть центральный момент второго порядка.

По аналогии вводятся двумерные моменты, например в данном исследовании используются центральные смешанные моменты для случайных величин  $X$  и  $Y$

$$\mu_{kl}^{XY} = E[(X - m_1^X)^k (Y - m_1^Y)^l], \quad k, l=0, 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Нам потребуется центральный радиальный момент (или поперечная дисперсия)

$$\mu_R = \mu_2^R = E[(X - m_1^X)^2 + (Y - m_1^Y)^2], \quad k, l=0, 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

С.И. Битюков, А.В. Синьговский, В.В. Смирнова

Об одном методе идентификации электромагнитных ливней.

Препринт отпечатан с оригинала-макета, подготовленного авторами.

---

Подписано к печати 27.10.2011.	Формат 60 × 84/16.	Офсетная печать.
Печ.л. 0,88. Уч.- изд.л. 1,34.	Тираж 80. Заказ 29.	Индекс 3649.

---

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий  
142281, Протвино Московской обл.

