



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2016-1

В.В. Брызгалов, Е.А. Козловский

**Применение ортогональных полиномов  
в исследованиях формфакторов распадов  $K_{e3}$**

Направлено в *ЖТФ*

Протвино 2016

### Аннотация

Брызгалов В.В., Козловский Е.А. Применение ортогональных полиномов в исследованиях формфакторов распадов  $K_{e3}$ : Препринт ИФВЭ 2016-1. – Протвино, 2016. – 16 с., 3 рис., 3 табл., библиогр.: 21.

Простая структура матричного элемента распада  $K_{e3}$  позволяет построить систему многочленов, определенных на области изменения кинематических переменных распада и ортогональных с соответствующей весовой функцией на ней. На статистически смоделированных событиях показано, что для формфактора распада, представленного его разложением по таким полиномам, задачу оценки параметров формфакторов удается свести к корректно определенной. Ожидается, что предложенный подход улучшит качество представления получаемых в экспериментах результатов. Данная методика также может быть использована при анализе полупертоновых распадов  $D$  и  $B$  мезонов.

### Abstract

Bryzgalov V.V., Kozlovsky E.A. The orthogonal polynomials applied to the  $K_{e3}$  form factor studies: IHEP Preprint 2016-1. – Protvino, 2016. – p. 16, figs. 3, tables 3, refs.: 21.

The simple structure of the  $K_{e3}$  decay matrix element allowed us to construct a set of the orthogonal polynomials with the decay weight function on the  $K_{e3}$  kinematic region. The studies are performed with the Monte-Carlo events obtained at the KMN setup at the Institute for High Energy Physics (Protvino). It is shown that the form factor expansion with orthogonal polynomials makes it possible to estimate its parameters more adequately. This method can be used for the semileptonic  $D$  and  $B$  decay analysis.

## Введение

В настоящее время Стандартная модель (СМ) является общепризнанной теорией физики элементарных частиц. Анализ экспериментальных данных по лептонным и полулептонным распадам каонов в рамках СМ позволяет получать прецизионные значения элемента  $|V_{us}|$  матрицы Кабиббо—Кобаяши—Маскавы (СКМ). В свою очередь, нарушения унитарности СКМ матрицы,  $e - \mu$  универсальности, а также различия между экспериментальными данными и предсказаниями  $V - A$  теории — все это может указывать на новую физику вне СМ. В работе [1] проведен глобальный анализ лептонных и полулептонных распадов каонов, данные по которым опубликованы такими содружествами как KLOE, ISTRA+, KTeV, NA48 [1, 2]. Как отмечается в статье, подобные исследования стали возможны благодаря большой статистике, набранной в этих экспериментах; прогрессу в вычислениях адронных матричных элементов в решеточной КХД; уточнениям значений радиационных поправок и эффектов нарушения изоспиновой инвариантности, которые выполнены в рамках киральной пертурбативной теории.

Обычно в публикациях неопределенности предсказаний теоретических моделей обсуждаются достаточно подробно, тогда как методам статистического моделирования и анализу моделей математической статистики уделяется меньшее внимание, хотя обусловленная ими неопределенность оценок может быть значительна.

Во всех упомянутых выше экспериментах наблюдаются сильные корреляции между оценками линейного и квадратичного наклонов формфактора распадов  $K_{l3}$  [1]-[3]. При анализе экспериментальных данных для решения данной проблемы используют, например, теоретические модели, в которых параметры слабо коррелируют, или вводят дополнительную информацию, полученную из других реакций, что позволяет зафиксировать часть параметров в исходной формулировке физической задачи. В данной статье показано, что определенная модификация математической формулировки задачи, не меняющая ее физической сущности, позволяет существенно уменьшить корреляции между оценками искомых параметров, а следовательно, получать

более устойчивые оценки параметров и их ошибок при статистическом анализе экспериментальных данных.

## 1. Постановка задачи

В общем виде матричный элемент распада  $K_{l3}$  выражается как

$$M \sim \bar{u}_\nu(1 + \gamma^5) \left\{ m_K f_S - \frac{1}{2} [(P_K + P_\pi)_\alpha f_+ + (P_K - P_\pi)_\alpha f_-] \gamma^\alpha + \frac{f_T}{m_K} \sigma_{\alpha\beta} P_K^\alpha P_\pi^\beta \right\} v_l. \quad (1)$$

Формфакторы  $f_S$ ,  $f_\pm$  и  $f_T$  являются функциями квадрата переданного лептонам 4-импульса  $t = (P_K - P_\pi)^2$ ,  $P_K, P_\pi$  — 4-импульсы соответственно каона и пиона.

Если для распада  $K_{e3}$  в выражении (1) сохранить только вклад векторного тока и пренебречь членами, пропорциональными степеням отношения  $m_e/m_K$ , то плотность распределения таких событий на диаграмме Далицца имеет особенно простой вид (см., например, [4]):

$$\rho_{K_{e3}}(E_\pi, E_l) \sim |M|^2 \sim A(t, E_l) \cdot f_+^2(t) \quad (2)$$

с кинематическим фактором

$$A(t, E_l) = E_l \left( m_K^2 - m_\pi^2 - 2m_K E_l \right) + t \left( E_l - 0.5m_K \right), \quad (3)$$

где  $E_\pi$  и  $E_l$  — энергии пиона и лептона, вычисленные в системе покоя распадающегося каона.

Для формфактора  $f_+$  общепринята следующая параметризация [2]:

$$f_+ = f_+(0) \left[ 1 + \lambda \frac{t}{m_\pi^2} + \frac{1}{2} \lambda' \left( \frac{t}{m_\pi^2} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Входящие в (2) функции зависят от кинематических переменных частиц распада, область определения которых, далее называемая  $D$ , ограничена законами сохранения полного 4-импульса реакции распада  $K_{e3}$  [5]. Параметры  $\lambda$  и  $\lambda'$  принято называть соответственно линейным и квадратичным наклонами формфактора  $f_+$ .

В экспериментах оценки параметров физических моделей получают, используя модели математической статистики, например, метод максимального правдоподобия (ММП). Системы уравнений, возникающие в рамках такого подхода, как правило, нелинейны и трудны для решения аналитическими способами, поэтому их решения находят численными методами [6]. Если формулировка физической задачи такова, что используемая математическая модель принадлежит к классу некорректных задач, то информационная матрица Фишера либо вырождена, либо плохо обусловлена, то есть близка к вырожденной [7]. В этом случае оптимальные решения либо не существуют, либо имеют слишком большие значения погрешности оценок <sup>1</sup>. Итак,

<sup>1</sup>F. James, автор популярного пакета MINUIT, пишет [8]: “Correlation coefficients very close to one ... indicate both an exceptionally difficult problem, and one which has been badly parametrized so that individual errors are not very meaningful because they are so highly correlated.”

обусловленность матрицы Фишера приобретает особое значение. Эксперименты, где исследуется распад  $K_{e3}$  с  $f_+$  в виде (4), демонстрируют значительные корреляции между параметрами  $\lambda$  и  $\lambda'$  ( $\sim 95\%$  и выше [1]-[3]). В Дополнении А в рамках ММП показано, что именно вид разложения (4) предопределяет большие значения коэффициентов корреляций. Использование ортогональных полиномов позволяет получить некоррелированные оценки параметров [9]-[12], и следовательно, хотя бы в асимптотическом пределе, их независимость<sup>2</sup>. Перепишем выражение (4) в виде

$$f_+(t, E_l) \sim \left[ \psi_0(t, E_l) + \theta_1 \psi_1(t, E_l) + \theta_2 \psi_2(t, E_l) \right], \quad (5)$$

где функции двух переменных  $\psi_0(\cdot)$ ,  $\psi_1(\cdot)$  и  $\psi_2(\cdot)$  — ортогональные многочлены, имеющие соответственно степени 0, 1 и 2, а  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — оцениваемые параметры.

Наконец, отметим следующее немаловажное свойство разложения (5) функции  $f_+$ . Если многочлены  $\psi$  неортогональны, то в выражениях, описывающих оценки параметров, появляются дополнительные члены, пропорциональные  $(\psi_k \psi_j)$  и имеющие такой же порядок величин, что и оценки самих параметров (см., например, [7, 12]). Таким образом, использование ортогональных многочленов в разложении (5) улучшает оценки параметров модели (1) при статистическом анализе экспериментальных данных.

## 2. Математическая модель

### 2.1. Распределение Пуассона

Рассмотрим измеренные данные, сгруппированные в гистограммы, где в каждом  $i$ -том бине события распределены по закону Пуассона, тогда функция правдоподобия записывается [9]-[12] как

$$L = \prod_{i=1}^r \frac{\mu_i^{n_i}}{n_i!} e^{-\mu_i}, \quad (6)$$

здесь  $r$  — общее число бинов гистограммы<sup>3</sup>, а  $n_i$  и  $\mu_i$  — числа соответственно наблюдаемых и ожидаемых событий в  $i$ -том бине. Используя соотношения (3) и (5), найдем, что

$$\mu_i = \gamma \rho_{K_{e3}}(E_\pi, E_l) = \gamma A_i(t, E_l) \left[ \psi_0(t, E_l) + \theta_1 \psi_1(t, E_l) + \theta_2 \psi_2(t, E_l) \right]_i^2 \quad (7)$$

<sup>2</sup>Для широкого круга функций плотности распределения вероятностей в асимптотическом пределе ММП-оценки имеют нормальную совместную плотность распределения вероятностей, а для нормального распределения равенство корреляций нулю означает независимость соответствующих случайных переменных (см., например, [11]).

<sup>3</sup>Исследуемая гистограмма является двумерной (диаграмма Далитца), однако для упрощения вида формул введен “сквозной” индекс  $i$ .

с некоторой нормировочной константой  $\gamma$ , которая является общей для всех  $i$  и не зависит от кинематических переменных  $t$  и  $E_l$ . Выражение (6) позволяет записать логарифмическую функцию правдоподобия

$$\ln L = \sum_{i=1}^r \left[ n_i \ln \mu_i - \mu_i - \ln n_i! \right]. \quad (8)$$

В математической статистике в рамках ММП минимальные границы дисперсий параметров отвечают неравенству Рао—Крамера [11]. Для рассматриваемого случая элементы матрицы информации Фишера вычисляются как

$$I_{jk} = M_L \left[ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k} \right] = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_r=0}^{\infty} \left[ L \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k} \right] = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_j} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_k}. \quad (9)$$

Данный результат уже использован в нашей работе [13]; следует отметить, что аналогичное выражение можно найти, рассматривая не пуассоновское (6), а полиномиальное распределение, для которого теоретические вероятности определяются как  $p_i = \frac{\mu_i}{\sum_i \mu_i}$  (см. [9] и Приложение В).

Принимая во внимание (7) и ортогональность многочленов  $\psi$ , вычислим элементы информационной матрицы:

$$\begin{aligned} I_{jk} &= 4\gamma \sum_{i=1}^r A_i(t, E_l) \left[ \psi_j(t, E_l) \psi_k(t, E_l) \right]_i, \\ I_{j\gamma} &= 2 \sum_{i=1}^r A_i(t, E_l) \left[ f_+(t, E_l) \psi_j(t, E_l) \right]_i = 2\theta_j \|\psi_j\|^2, \\ I_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^r A_i(t, E_l) \left[ f_+^2(t, E_l) \right]_i = \frac{1}{\gamma} \left[ \|\psi_0\|^2 + \theta_1^2 \|\psi_1\|^2 + \theta_2^2 \|\psi_2\|^2 \right], \\ & \qquad \qquad \qquad j, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь условие ортогональности многочленов с весовой функцией  $A_i(t, E_l)$  следует из требования

$$(\psi_j \psi_k) = \sum_{i=1}^r A_i(t, E_l) \left[ \psi_j(t, E_l) \psi_k(t, E_l) \right]_i = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \|\psi_j\|^2, & j = k. \end{cases} \quad (11)$$

С учетом (5), (7) и (11) систему уравнений правдоподобия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^r \left[ \frac{n_i}{\mu_i} - 1 \right] \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_j} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^r \left[ \frac{n_i}{\mu_i} - 1 \right] \frac{\partial \mu_i}{\partial \gamma} = 0, \end{cases}$$

можно привести к виду, позволяющему построить итерационную процедуру

$$\begin{cases} \theta_j \|\psi_j\|^2 = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{\mu_i} A_i(t, E_l) \left[ f_+(t, E_l) \psi_j(t, E_l) \right]_i, & j = 1, 2, \\ \sum_{i=1}^r n_i = \sum_{i=1}^r \mu_i. \end{cases} \quad (12)$$

Отметим, что благодаря условию (11) в (12) члены пропорциональные  $\sum_i A_i[\psi_k \psi_j]_i$  исчезли в случаях, когда  $j \neq k$ .

## 2.2. Ортогональные многочлены Чебышёва

Для вычисления коэффициентов ортогональных полиномов от двух переменных нами написаны программные коды, в основу которых положен алгоритм, описанный, в частности, в монографии [14].

Если мы строим ортогональные полиномы двух переменных, то до определенного момента пары переменных  $(t, E_l)$  и  $(E_l, t)$  равноправны, поэтому будем записывать их как  $(x, y)$ <sup>4</sup>. Выбрав базис из последовательности линейно независимых функций:

$$\mathbf{1}, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, \dots, \quad (13)$$

определим степенные моменты весовой функции  $A(x, y)$  на области  $D$  как

$$h_{n,k} = \sum_{i=1}^r A_i(x, y) [x^{n-k} \cdot y^k]_i, \quad (14)$$

где целое число  $n$  принимает значения от 0 до  $n_{max}$ , а  $k$ , в свою очередь, от 0 до  $n$ . Значение  $n_{max}$  устанавливается из условий задачи. Каждой допустимой паре целых чисел  $(n, k)$  можно поставить в соответствие определитель, который составляется по следующему алгоритму. Первая строка определителя — это члены ряда (13), просуммированные с весовой функцией  $A(x, y)$  (14). Далее проводим подобную операцию, но с рядом (13), умноженным на  $x$ ; полученными значениями моментов заполним вторую строку. Каждая последующая строка находится аналогичным образом, но при умножении ряда (13) соответственно на  $y, x^2, \dots$ . Наконец, последняя строка — это сам ряд (13). В обозначениях монографии [14] соответствующие полиномы Чебышёва<sup>5</sup> для  $k \neq 0$  имеют вид

$$\phi_{nk}(x, y) \sim \begin{vmatrix} h_{00} & h_{10} & \dots & h_{n,k-1} & h_{n,k} \\ h_{10} & h_{20} & \dots & h_{n+1,k-1} & h_{n+1,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n,k-1} & h_{n+1,k-1} & \dots & h_{2n,2(k-1)} & h_{2n,2k-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x}^{n-k+1} \mathbf{y}^{k-1} & \mathbf{x}^{n-k} \mathbf{y}^k \end{vmatrix} \quad (15)$$

<sup>4</sup>Область изменения  $x$  и  $y$  все та же область  $D$ .

<sup>5</sup>Мы следуем старой традиции, называя такие многочлены полиномами Чебышёва [15].

Если  $k = 0$ , то предпоследняя строка многочлена (15) представляет собой:

$$h_{n-1,n-1}, h_{n,n-1}, h_{n,n}, \dots, h_{2n-2,2n-2}, h_{2n-1,n-1}.$$

Многочлены (15) имеют степень  $n$ , причем нормировка каждого полинома произвольна. Полиномы с разными значениями  $(n, k)$  являются ортогональными на области  $D$  [14], а коэффициенты полиномов (Таб. 1) определяются не только областью  $D$  диаграммы Далитца, но и выбором узлов сетки  $(\Gamma)$ .

Функция  $f_+$  зависит только от переменной  $t$ , поэтому удобно выбрать следующий набор переменных:  $x = t$ ,  $y = E_l$  (Таб. 1). Наконец, построенные полиномы связаны с введенными ранее функциями  $\psi_j$  следующим образом <sup>6</sup>:

$$\psi_0 = \phi_{00}(t, E_l), \quad \psi_1 = \phi_{10}(t, E_l), \quad \psi_2 = \phi_{20}(t, E_l) - \frac{a_2^{(20)}}{a_2^{(11)}} \phi_{11}(t, E_l), \quad (16)$$

где числа  $a_2^{(20)}$  и  $a_2^{(11)}$  определены в Табл. 1.

Таблица 1. Коэффициенты ортогональных полиномов  $\phi_{nk}(t, E_l)$ , найденных с помощью алгоритма (15) на  $D \cap \Gamma$

Переменные	ортогональные многочлены			
	$\phi_{00}$	$\phi_{10}$	$\phi_{11}$	$\phi_{20}$
<i>const</i>	$a_0^{(00)}$	$a_0^{(10)}$	$a_0^{(11)}$	$a_0^{(20)}$
$x(t)$		$a_1^{(10)}$	$a_1^{(11)}$	$a_1^{(20)}$
$y(E_l)$			$a_2^{(11)}$	$a_2^{(20)}$
$x^2(t^2)$				$a_3^{(20)}$

### 2.3. Влияние фонов

Наличие фоновых событий, распределение которых  $b(t, E_l)$  полностью известно и не зависит от оцениваемых параметров, приведет к тому, что выражение (7) преобразуется к следующему виду

$$\mu_i = \gamma A_i(t, E_l) \left[ \psi_0(t, E_l) + \theta_1 \psi_1(t) + \theta_2 \psi_2(t, E_l) \right]_i^2 + b_i(t, E_l). \quad (17)$$

Таким образом, в элементах матрицы информации Фишера появляются дополнительные члены

$$I_{jk}^b = I_{jk} - 4\gamma \sum_{i=1}^r \left[ \frac{b_i}{\mu_i} \right] A_i(t, E_l) \left[ \psi_j(t, E_l) \psi_k(t, E_l) \right]_i,$$

<sup>6</sup>Здесь все полиномы нормированы на общую для всех величину, то есть  $\|\phi_{nk}\|^2 = N_{00}$  для всех пар  $(n, k)$ .

$$\begin{aligned}
I_{j\gamma}^b &= I_{j\gamma} - 2 \sum_{i=1}^r \left[ \frac{b_i}{\mu_i} \right] A_i(t, E_l) \left[ f_+(t, E_l) \psi_j(t, E_l) \right]_i, \\
I_{\gamma\gamma}^b &= I_{\gamma\gamma} - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^r \left[ \frac{b_i}{\mu_i} \right] A_i(t, E_l) \left[ f_+^2(t, E_l) \right]_i, \\
& j, k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{18}$$

$I_{jk}$ ,  $I_{j\gamma}$  и  $I_{\gamma\gamma}$  получены с помощью (10), где  $\mu_i$  вычисляется по формуле (17). Отметим, что возникающие дополнительные члены в (18) — это суммы, где каждое слагаемое пропорционально отношению фоновых событий к полному числу событий  $\mu_i$  в  $i$ -том бине.

### 3. Анализ данных

#### 3.1. Статистическое моделирование событий

Результаты, полученные на экспериментальных данных, могут существенно отличаться от теоретически ожидаемых значений элементов матрицы (10), в частности, из-за конечных разрешений детекторов установки. Предположим, что соотношение между измеренной и "истинной" плотностями распределений событий на диаграмме Далитца распада  $K_{e3}$  описывается интегральным уравнением

$$\rho'_{K_{e3}}(\mathbf{p}) \sim \mu'_{K_{e3}}(\mathbf{p}) = \int G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \mu_{K_{e3}}(\mathbf{p}') d\mathbf{p}', \tag{19}$$

где ядро  $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  — функция разрешения, переводящая "истинные" значения кинематических переменных  $\mathbf{p}'$  в измеренные  $\mathbf{p}$ .

Пусть  $\mu_{K_{e3}}(\mathbf{p}')$  отвечает выражению (7), а функция разрешения обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
\int G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}' &= 1, \\
\int (p_k - p'_k) G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}' &= 0, \\
\int (p_k - p'_k)(p_j - p'_j) G(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}' &= \sigma_{p_k} \sigma_{p_j} \rho_{p_k p_j},
\end{aligned} \tag{20}$$

где  $\sigma_{p_k}$  ( $\sigma_{p_j}$ ) — разрешение установки по  $k$  ( $j$ )-компоненте кинематической переменной  $\mathbf{p}$ , а  $\rho_{p_k p_j}$  — коэффициент корреляции между  $p_k$  и  $p_j$ . Разложим в ряд Тейлора функцию  $\mu_{K_{e3}}(\mathbf{p}')$  (7) в окрестности точки  $\mathbf{p}$ , удерживая члены ряда вплоть до квадратичного; подставим полученный ряд в (19) и учтем условия (20). Окончательно для наблюдаемой плотности событий на диаграмме Далитца получим

$$\mu'_{K_{e3}}(\mathbf{p}) = \mu_{K_{e3}}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \sum_{k,j} \left. \frac{\partial^2 \mu_{K_{e3}}}{\partial p'_k \partial p'_j} \right|_{\mathbf{p}'=\mathbf{p}} \sigma_{p_k} \sigma_{p_j} \rho_{p_k p_j} = \mu_{K_{e3}}(\mathbf{p}) + \Phi(\mathbf{p} | \theta_1, \theta_2). \tag{21}$$

Дополнительный аддитивный член  $\Phi(\mathbf{p} \mid \theta_1, \theta_2)$  в (21) может являться причиной не только смещенных оценок параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , но возникновения корреляции между этими параметрами, причем в общем случае их коэффициент корреляции уже не будет равен нулю, как это ожидается из (10)—(11).

В реальных экспериментах функцию разрешения сложно представить аналитическим выражением, поэтому для учета ее влияния проводится тщательное моделирование как работы отдельных детекторов установки, так и ее функционирования в целом. Далее для определенности рассмотрена установка КМН (ИФВЭ, Протвино) [16, 17] и использована стандартная процедура моделирования ее работы при анализе данных КМН по распаду  $K_{e3}$  [13]. Моделирование выполнено с помощью пакета GEANT [18]; хорошее согласие реальных и смоделированных данных продемонстрировано в работах [13, 16, 17]. Заметим, что в функцию разрешения также вошли неточности, обусловленные алгоритмами геометрической и кинематической реконструкций продуктов распада  $K_{e3}$ .

### 3.2. Процедура фитирования распределений Далитца

В целом объем смоделированных данных составил более 2 млн. событий. Половина из них разыграна с учетом (4) при фиксированных значениях  $\lambda$  и  $\lambda'$  (Таб. 2). Далее эта часть статистики считалась ”измеренными” данными, на которых построены распределения  $d^2N/dtdE_l$ . Используя эти гистограммы, по стандартной процедуре проведено оценивание параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$  [13]. Таким образом, распределение событий на диаграмме Далитца фитировалось выражением <sup>7</sup>

$$\frac{d^2N}{dt dE_l} = \gamma \rho'_{K_{e3}}(t, E_l). \quad (22)$$

Функция  $\rho'_{K_{e3}}(t, E_l)$  (19) определена на событиях, полученных методом Монте-Карло для распадов  $K_{e3}$  с  $|M|^2 = const$  и обработанных по цепочке программ, созданных для реконструкции кинематических переменных продуктов распада  $K_{e3}$  [13]. На каждом шаге поиска оптимальных значений параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$  эти события взвешивались на  $\mu(t', E'_l)$ ; в  $\mu(t', E'_l)$  (7) ортогональные многочлены  $\psi$  были выражены через полиномы Чебышёва (16), коэффициенты которых найдены с использованием написанных нами кодов. Оценки параметров найдены в рамках ММП с функционалом <sup>8</sup>:

$$\ln L = \sum_i^r \left[ n_i \ln \frac{\mu_i}{n_i} - \mu_i + n_i \right]. \quad (23)$$

Таким образом, фитируемыми параметрами являются  $\gamma$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Поиск экстремумов функционала (23) осуществлялся с помощью пакета MINUIT [8].

<sup>7</sup>Заметим, что  $\gamma$  определяется не только числом событий в гистограмме, но и, в частности, значениями нормировок  $N_{0G}$  и некоторой масштабирующей константы, которая введена для улучшения обусловленности информационной матрицы.

<sup>8</sup>Здесь (8) модифицировано с учетом формулы Стирлинга для  $n!$ .

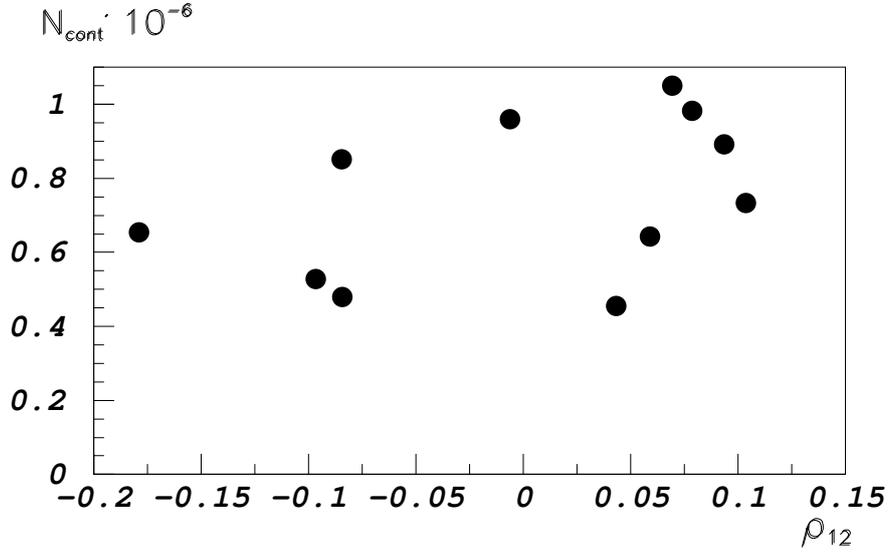


Рис. 1. Полное число событий  $N_{cont}$  в гистограммах, используя которые были найдены соответствующие оценки  $\rho_{\theta_1\theta_2}$ . Гистограммы получены при различных правилах отбора событий распада  $K_{e3}$

### 3.3. Оценки параметров распределения событий на диаграмме Далитца

Проведен статистический анализ диаграмм Далитца, построенных для различных значений  $\lambda$  и  $\lambda'$ ; результаты анализа демонстрируются в Табл. 2. В частности, для  $\lambda$  и  $\lambda'$ , взятых из [19] с учетом замечаний из [2], получены следующие оценки фитируемых параметров и элементов корреляционной матрицы этих оценок:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0.036719 \pm 0.000533, \\ \theta_2 = 0.001690 \pm 0.000493, \\ \gamma = 0.526500 \pm 0.000533, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0.0692 & -0.1307 \\ & 1 & -0.2369 \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

При этом число обусловленности информационной матрицы было  $\sim 2$ .

Рисунок 1 иллюстрирует объемы выборок, на которых оценивались коэффициенты корреляций между параметрами  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , если события отвечали разным условиям отбора. Распределение  $dN_{ev}/d\rho_{12}$  от  $\rho_{\theta_1\theta_2}$  приведено на Рис. 2; интерполяция этих данных гауссианом показывает, что его среднее и среднее квадратическое отклонение равны соответственно значениям 0.0147 и 0.0802. Диаграммы рассеяния  $\rho_{\theta_1\gamma}$  и  $\rho_{\theta_2\gamma}$  от  $\rho_{\theta_1\theta_2}$  демонстрируются на Рис. 3.

Поскольку (4) и (5) с точностью до некоторой постоянной  $\alpha$  описывают одну и ту же функцию  $f_+$ , то очевидно, что соотношения между найденными оценками  $\theta_1, \theta_2$

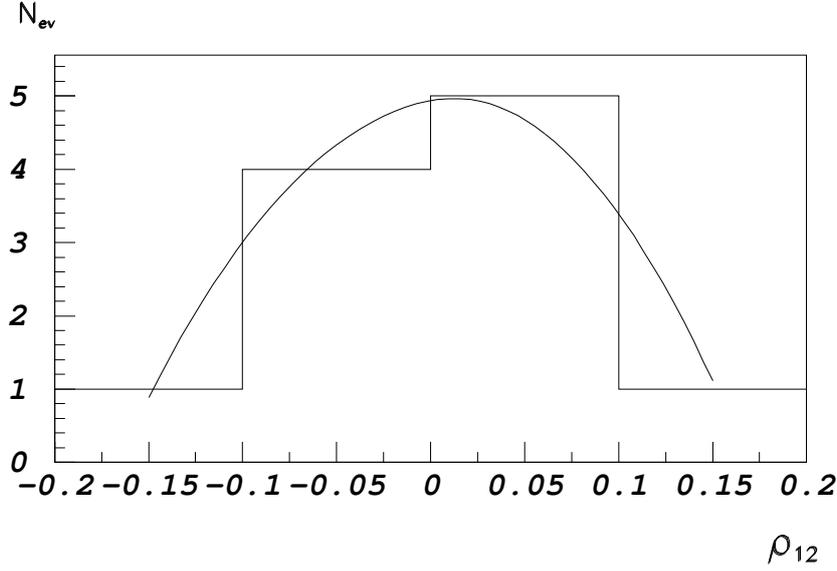


Рис. 2. Распределение по  $\rho_{\theta_1\theta_2}$ ; каждое значение  $\rho_{\theta_1\theta_2}$  получено для событий, отвечающих определенному критерию отбора кандидатов в распады  $K_{e3}$ .

и  $\lambda, \lambda'$  имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{m_\pi^2}{\beta} \left[ \theta_1 a_1^{(10)} + \theta_2 \left( a_1^{(20)} - \frac{a_2^{(20)}}{a_2^{(11)}} a_1^{(11)} \right) \right], \\ \lambda' &= 2 \frac{m_\pi^4}{\beta} \theta_2 a_3^{(20)}, \\ \alpha &= \gamma \beta^2, \end{aligned} \quad (25)$$

с

$$\beta = a_0^{(00)} + \theta_1 a_0^{(10)} + \theta_2 \left( a_0^{(20)} - \frac{a_2^{(20)}}{a_2^{(11)}} a_0^{(11)} \right),$$

где коэффициенты полиномов Чебышёва приведены в Табл. 1. Уравнения (25) получены при условии, что все полиномы Чебышёва нормированы на одно и то же число.

Используя результаты (24) и соотношения (25), найдем значения  $\lambda$  и  $\lambda'$ , а также пересчитаем для них корреляционную матрицу, воспользовавшись известными матричными преобразованиями (перенос ошибок) [11]:

$$\begin{cases} \lambda = 0.024852 \pm 0.001613, \\ \lambda' = 0.001921 \pm 0.000558, \\ \alpha = 200.898 \pm 0.203, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & -0.9574 & 0.1943 \\ & 1 & -0.2372 \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Таблица 2. Результаты фитирования выражением (22) распределений Далитца для событий распада  $K_{e3}$ . Вычисленные параметры  $\lambda$  и  $\lambda'$  найдены по формулам (25)

Введенные значения, $10^{-3}$		Оценки, $10^{-3}$		Вычисленные значения, $10^{-3}$		Число "измеренных" событий, $10^6$
$\lambda$	$\lambda'$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\lambda$	$\lambda'$	
24.85	1.92 [19, 2]	$36.719 \pm 0.533$	$1.690 \pm 0.493$	$24.852 \pm 1.613$	$1.921 \pm 0.558$	1.052
25.15	1.6 [1]	$36.027 \pm 0.533$	$1.409 \pm 0.494$	$25.153 \pm 1.614$	$1.600 \pm 0.558$	1.052

Корреляции между  $\lambda$  и  $\lambda'$  значительны. Следовательно, при статистическом анализе замена переменных с использованием зависимостей (25) приведет к плохо обусловленной задаче.

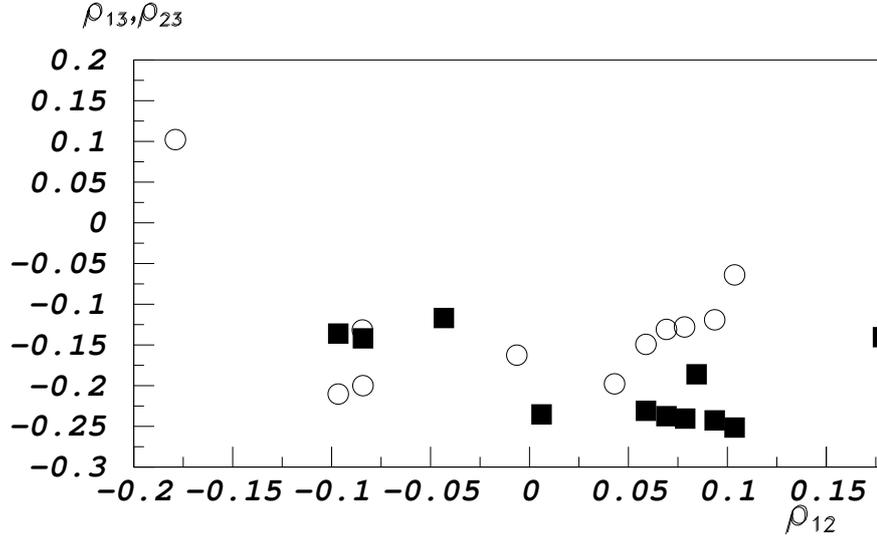


Рис. 3. Диаграммы рассеяния  $\rho_{\theta_1\gamma}$  ( $\circ$ ) и  $\rho_{\theta_2\gamma}$  ( $\blacksquare$ ) vs  $\rho_{\theta_1\theta_2}$  при различных критериях отбора событий  $K_{e3}$ .

Корреляции между параметрами  $\theta_1, \theta_2$  и нормировочной константой  $\gamma$  (Рис. 3) имеют абсолютные значения, которые не превышают  $\sim 25\%$ . Отметим, что значение параметра  $\gamma$  можно найти в независимом эксперименте и зафиксировать в соотношении (7). Подобная процедура может быть осуществлена, например, в эксперименте "ОКА" [20, 21], в котором высока эффективность идентификации частиц, а также проводится кинематический анализ распада  $K_{e3}$ .

## 4. Заключение

В рамках ММП показано, что разложение формфактора распада  $K_{e3}$  в виде  $f_+ \sim (1 + \lambda t + \lambda' t^2)$  предопределяет плохую обусловленность информационной матрицы Фишера. Используя разложение  $f_+$  по ортогональным полиномам Чебышёва, можно существенно уменьшить корреляции между оценками параметров физической модели распада  $K_{e3}$ . Написаны программные коды, позволяющие строить ортогональные многочлены при любой заданной дискретизации области изменения кинематических переменных изучаемого распада. В работе обсуждается модификация информационной матрицы Фишера в случае существования фоновых процессов к распаду  $K_{e3}$  и наличия конечных разрешений детекторов установки. Исследования проведены на событиях, полученных методом Монте-Карло с учетом особенностей функционирования установки КМН (ИФВЭ, Протвино). Ортогональные многочлены также могут быть успешно применены при статистическом анализе полуплептонных распадов  $D$  и  $B$  мезонов.

Авторы благодарны академику РАН Денисову С.П. за поддержку данной работы, коллегам Козелову А.В. и Корешеву В.И. за многочисленные полезные обсуждения, касающиеся особенностей обработки данных эксперимента КМН, а также Курщеву В.Ф. и Ющенко О.П. за исчерпывающую информацию о функционировании установки "ОКА" и системы обработки данных, полученных на ней. Особую благодарность приносим доктору G.D'Ambrosio, обратившего наше внимание на важность исследуемой здесь проблемы.

### А. Простая модель

Пусть в (2) для  $f_+$  оцениваются только параметры  $\lambda$  и  $\lambda'$ , где  $f_+$  представлена разложением в ряд Тейлора по  $t$

$$f_+(t) \sim 1 + \lambda t + \lambda' t^2, \quad (27)$$

где  $t$  изменяется в границах области  $D$  диаграммы Далитца распада  $K_{e3}$ . В разделе 2.1 показано, что недиагональные элементы матрицы информации Фишера для этого случая вычисляются как<sup>9</sup>

$$I_{\lambda\lambda'} = 4\gamma \int_D A(t, E_l) t^3 dt dE_l = \langle t^3 \rangle. \quad (28)$$

В этих обозначениях оказалось, что

$$I_F = \begin{bmatrix} \langle t^2 \rangle & \langle t^3 \rangle \\ \langle t^3 \rangle & \langle t^4 \rangle \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Найдя на области  $D$  численные значения всех необходимых интегралов с весовой функцией  $A(t, E_l)$  (3) и обратную матрицу  $I_F^{-1}$ , имеем как оценку нижней границы

$$\rho_{\lambda\lambda'} = -0.937.$$

---

<sup>9</sup>здесь  $\gamma$  – известное фиксированное число

Отметим, что

- это значение близко к величине  $-0.945$ , полученной в [3]. Таким образом, экспериментальные оценки значений корреляции между параметрами  $\lambda$  и  $\lambda'$ , близкие к единице, являются следствием модели (27);
- ожидаемая величина корреляции между  $\lambda$  и  $\lambda'$  отрицательна, что хорошо согласуется с мировыми данными [2], из которых видно, что возрастание значений  $\lambda'$  сопровождается уменьшением  $\lambda$ ;
- вычисленная величина не зависит от  $\lambda$  и  $\lambda'$ .

Наконец, число обусловленности матрицы (29) отвечает величине  $> 1.5 \cdot 10^3$  (норма Фробениуса).

## В. Задача оценки параметров на основе сгруппированных данных

Пусть случайные числа  $n_i$ , содержания бинов гистограммы, распределены по полиномиальному закону, тогда

$$L = C_n^{n_1} p_1^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} p_2^{n_2} \cdots C_{n-n_1-\dots-n_{r-1}}^{n_r} p_r^{n_r} = n! \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{n_i}}{n_i!},$$

где  $r$  – число бинов гистограммы, а искомые параметры физической модели входят только в  $p_i = p_i(\bar{\theta})$ . Поскольку  $\sum_{i=1}^r n_i = n$ ,  $n^n = n^{(\sum_i n_i)} = \prod_{i=1}^r n^{n_i}$ , то

$$L' = n^n \cdot L = n! \prod_i \frac{m_i^{n_i}}{n_i!}, \quad m_i = np_i.$$

В таком случае, логарифмическая функция правдоподобия (с точностью до константы) есть

$$\ln L' \sim \sum_i^r n_i \ln m_i. \quad (30)$$

Так как  $\sum_i^r p_i = 1$  и  $n = \sum_i^r np_i = \sum_i^r m_i$ , найдем, что

$$L'' = n^n e^{-n} \cdot L = n! \prod_i \frac{m_i^{n_i}}{n_i!} e^{-m_i}.$$

Теперь логарифмическая функция правдоподобия может быть представлена в виде

$$\ln L'' \sim \sum_i n_i \ln m_i - m_i. \quad (31)$$

С точки зрения оценки параметров  $\bar{\theta}$  выражения (30) и (31) эквивалентны, так как они отличаются на константу [6]. Отметим также, что соотношение (31) уже не следует понимать как логарифмическую функцию правдоподобия для распределения *независимых* пуассоновских величин, как это было получено в разделе 2.1.

### С. Значения коэффициентов полиномов Чебышёва

В программных кодах вычисления проводятся с использованием двойной точности, что позволяет достичь для скалярных произведений (11) точностей лучших, чем  $10^{-13}$ . В Табл. 3 приведены значения коэффициентов с гораздо меньшей точностью, поэтому эти данные носят лишь иллюстративный характер.

Таблица 3. Коэффициенты полиномов Чебышёва

Переменные	ортогональные многочлены			
	$\phi_{00}$	$\phi_{10}$	$\phi_{11}$	$\phi_{20}$
$const$	0.23089778	-0.40143727	-0.74701641	0.81197219
$t$		9.78646128	-1.79693673	-36.92078815
$E_l$			5.89469358	-0.93683536
$t^2$				371.97067194

## Список литературы

- [1] M. Antonelli *et al.* (FlaviaNet Working Group on Kaon Decays), Eur. Phys. J. C **69**, 399 (2010); arXiv:1005.2323v2 [hep-ph].
- [2] K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).
- [3] F. Ambrosino *et al.* (KLOE Collaboration), JHEP **12**, 105 (2007).
- [4] M.V. Chizhov, Phys. Lett. B **381**, 359 (1996).
- [5] Е. Бюклинг, К. Каянти, *Кинематика элементарных частиц* (Мир, М., 1975).
- [6] Ш. Закс, *Теория статистических выводов* (Мир, М., 1975).
- [7] А.В. Крянев, Г.В. Лукин, *Математические методы обработки неопределенных данных* (ФИЗМАТЛИТ, М., 2003).
- [8] F. James, CERN Program Library, D506 (CERN, 1994).
- [9] С.Р. Рао, *Линейные статистические методы и их применения* (Наука, М., 1968).
- [10] М. Кендалл, А. Стьюарт, *Статистические выводы и связи* (Наука, М., 1973).
- [11] А.А. Боровков, *Математическая статистика* (Наука, М., 1984).
- [12] В. Идье и др., *Статистические методы в экспериментальной физике* (АТОМ-ИЗДАТ, М., 1976).
- [13] G.A. Akopdzhanov *et al.*, Препринт ИФВЭ 2007-24, 2007; ЯФ **71**, 1 (2008); Phys. Atom. Nucl. **71** 2074 (2008).
- [14] П.К. Суетин, *Ортогональные многочлены по двум переменным* (Наука, М., 1988).
- [15] Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов, *Таблицы математической статистики* (Наука, М., 1965).
- [16] G.A. Akopdzhanov *et al.*, Eur. Phys. J. C **40**, 343 (2005) [hep-ex/0406008]; Г.А. Акопджанов и др., ЯФ **68**, 1014 (2005), Phys. Atom. Nucl. **68**, 948 (2005).
- [17] G.A. Akopdzhanov *et al.*, Письма в ЖЭТФ **82**, 771 (2005), JETP Lett. **82**, 675 (2005).
- [18] CERN Program Library Long Writeup, W5013 (CERN, 1993).
- [19] O.P. Yushchenko *et al.* (ISTRA+ Collab.), Phys. Lett. B **589**, 111 (2004) [hep-ex/0404030].

- [20] V. Obraztsov, *High statistics measurement of the  $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$  ( $K_{e3}$ ) decay form-factors*, Proceeding of the 37 International Conference on High Energy Physics, Valencia, Spain, 2014.
- [21] V. Kurshetsov (OKA Collab.), *Status of OKA experiment*, PoS KAON **09**, 051 (2009).

*Рукопись поступила 21 января 2016 г.*

Препринт отпечатан с оригинала-макета, подготовленного авторами.

В.В. Брызгалов, Е.А. Козловский

Применение ортогональных полиномов в исследованиях формфакторов распадов  $K_{e3}$ .

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**.

---

Подписано к печати 28.01.2016. Формат 60 × 84/16. Цифровая печать.  
Печ.л. 1,25. Уч.-изд.л. 1,72. Тираж 80. Заказ 2. Индекс 3649.

---

ФГБУ ГНЦ ИФВЭ НИЦ «Курчатовский институт»  
142281, Московская область, город Протвино, площадь Науки, дом 1

[www.ihep.ru](http://www.ihep.ru); библиотека <http://web.ihep.su/library/pubs/all-w.htm>

Индекс 3649

---

П Р Е П Р И Н Т 2016–1,  
ФГБУ ГНЦ ИФВЭ НИЦ «Курчатовский институт», 2016

---