НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»
Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова
Национального исследовательского центра
«Курчатовский институт»

Препринт 2018-5

С.В. Ерин

Цифровые пиксельные детекторы и модели с фазовым переходом

Протвино 2018

УДК 539.1.074.3 М-24

Аннотация

Ерин С.В. Цифровые пиксельные детекторы и модели с фазовым переходом: Препринт НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ 2018-5. – Протвино, 2018. – 16 с., 6 рис., библиогр.: 15.

В работе рассматриваются возможности использования моделей с фазовым переходом для описания свойств цифровых (бинарных) пиксельных детекторов без учёта и с учётом взаимодействия между пикселями.

Abstract

Erin S.V. The models with phase transition for digital pixel detectors: NRC «Kurchatov Institute» –IHEP Preprint 2018–5. – Protvino, 2018. – p. 16, figs. 6, refs.: 15.

The paper considers the possibility of using models with phase transition for describe the properties of digital (binary) pixel detectors without considering and taking into account the interaction between the pixels

Введение

Пиксельные детекторы – один из важнейших инструментов для получения «истинной» двумерной информации о координатах частиц в событиях с большой множественностью в экспериментах по физике высоких энергий. Количество пикселей в современных детекторах достигает нескольких десятков миллионов (ATLAS, CMS, ALICE). Обычно, под цифровыми пиксельными детекторами подразумевают набор твёрдотельных сенсоров определённого размера (пикселей), конструктивно объединённых в двумерную матрицу, с интегрированной электроникой съёма информации. Все пиксели в матрице можно считать идентичными и имеющими два информационных состояния «да-нет».

Существует способ съёма координатной информации с газовых детекторов с помощью падов, и, при определённых допущениях, эти детекторы можно считать пиксельными. Особенно ярко это выражено для «micro-pattern» детекторов. В последнее время, в качестве фотоприёмников широко используются твёрдотельные многопиксельные лавинные фотодиоды, работающие в гейгеровском режиме (SiPMs, GAPD, MPPC и т.д. – неустоявшиеся названия), которые также являются многопиксельными детекторами [1].

Подобные детекторы можно рассматривать, как набор независимых ячеек-сенсоров. Конечно, эти ячейки не полностью независимы от соседних ячеек, как в силу процессов происходящих при регистрации частиц, так электрических и конструктивных причин, что влияет на параметры работы системы.

Существующие детекторы содержат примерно от 10^2 до 10^7пикселей. Реальные пиксельные детекторы представляют собой промежуточные объекты между макроскопическими и микроскопическими системами, назовём их мезоскопическими. Количество пикселей не настолько велико, чтобы соответствующие детекторы рассматривать как макроскопические системы, поведение которых в целом можно описать, используя средние значения некоторых величин. Обычно описывают работу конкретного пиксельного детектора, используя при этом моменты распределения определённых величин, поведение которых зависит от таких параметров как: количество ячеек, величина взаимодействия между ними, значение порога срабатывания.

Целью данной работы является поиск моделей, имеющих универсальные зависимости, которые бы описывали свойства цифровых (бинарных) пиксельных детекторов с невзаимодействующими и взаимодействующими пикселями в независимости от количества пикселей в детекторе.

Модели цифрового (бинарного) пиксельного детектора

В дальнейшем будем рассматривать систему: многопиксельный детектор, считывающая электроника, память (в ней хранится информация о состоянии пикселей, и которая управляется общими сигналами: "запись", "сброс"). Цифровой детектор, состоящий из идентичных пикселей можно рассматривать, как двухуровневую систему, находящуюся в тепловом равновесии [2]. Условие теплового равновесия для пикселей, находящихся в двух состояниях, можно записать в виде распределения Больцмана:

$$N_1 = N_0 \cdot \exp(-\Delta E / kT) \qquad (1)$$

где: N_1 – количество шумящих пикселей, N_0 – количество нешумящих пикселей, ΔE – энергия перехода от нешумящего к шумящему состоянию, k –постоянная Больцмана, T-параметр, имеющий размерность температуры.

Принимая во внимание условие:

$$N=N_1+N_0 \qquad (2)$$

(где N – общее количество пикселей) вероятность шума системы будет [2]:

$$P = N_1 / N = e^{-\Delta E/kT} / (1+e^{-\Delta E/kT}) \qquad (3)$$

А разница между количеством нешумящих и шумящих пикселей выглядит следующим образом:

$$M = N_0 - N_1 = Nth\left({}^{\Delta E}/_{2kT}\right) \tag{4}$$

Заселённость каждого уровня определяется количеством пикселей, сигнал которых превысил или нет порог срабатывания регистрирующей электроники. Порог, в свою очередь, является управляющим параметром (в случае цифрового съёма сигнала), и определяет вероятность срабатывания пикселя *p*, что определяет важнейшую характеристику любого детектора – его эффективность. Из этой модели следует, что при вероятности срабатывания пикселя *p=1/2* детектор находится в состоянии с максимальной энтропией по Шеннону, т.е. система пикселей максимально хаотична (рис. 1).

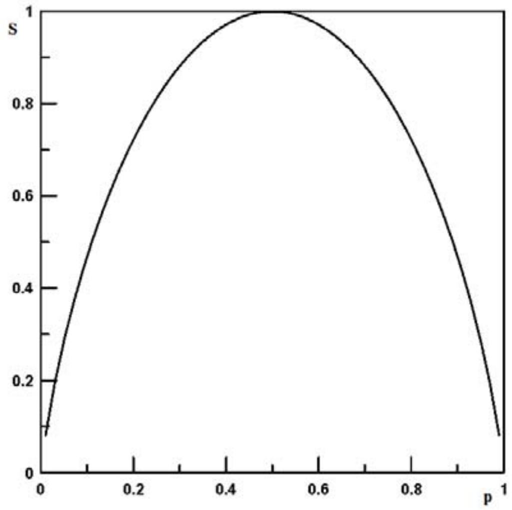

Рис. 1. Зависимость энтропии от вероятности нахождения двухуровневой системы в одном из состояний (по Шеннону).

.

Переход из одного состояния в другое можно интерпретировать, как *фазовый переход*, и *точка фазового перехода – есть порог срабатывания регистрирующей электроники*. Тогда, изучая поведение распределения пикселей детектора в этой точке, можно сделать выводы о независимости пикселей друг от друга, либо об их взаимодействии. Представим двухмерный пиксельный детектор в виде квадратной решётки (рис. 2), где чёрные прямоугольники изображают пиксели, находящиеся в состоянии «1» (сработавшие от собственного шума), светлые – пиксели в состоянии «-1» (т.е. не сработавшие). Пусть *p* – вероятность нахождения пикселя в состоянии «1».

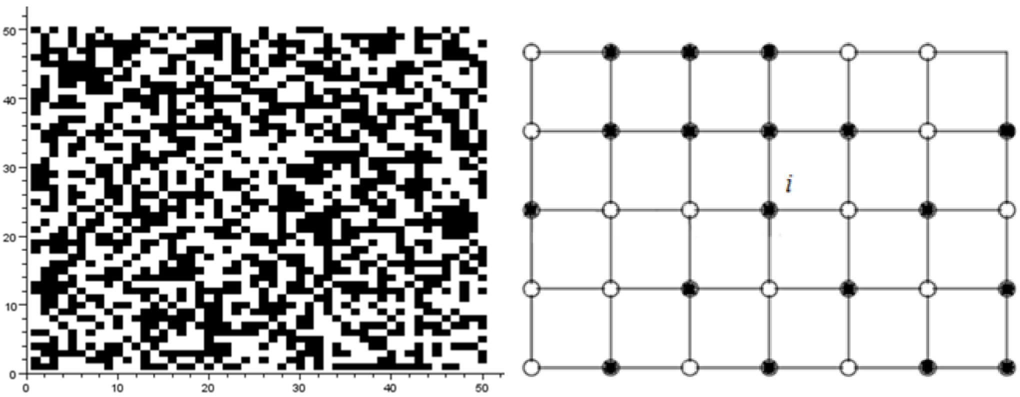

Рис. 2 Двухмерный пиксельный детектор с шумящими пикселями
и его решёточная модель.

В дальнейшем будем рассматривать работу многопиксельного детектора без внешнего облучения, полагая, что все срабатывания пикселей вызваны собственным шумом. При этом, кластером будем называть сработавшие пиксели, если они соединены путём, состоящим из сработавших пикселей [4, 5].

Поставим следующие вопросы:

1) Как выглядит распределение количества кластеров от их размеров (количества сработавших пикселей)?

2) Возможно ли по информации о пространственном расположении сработавших пикселей (размеры кластеров, распределение кластеров по размерам) судить о степени взаимодействия пикселей друг с другом?

3) Имеется ли универсальная зависимость, по поведению которой можно судить о свойствах многопиксельного детектора, в независимости от числа пикселей?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим модели с фазовым переходом, которые в точке фазового перехода обладают свойством масштабной инвариантности, и в некотором приближении, могут описывать нашу задачу. Перечислим эти модели:

Модель 1. Модель с фазовым переходом, возникающим в задаче "перколяции" [5], (модель невзаимодействующих пикселей – МНП).

Модель 2. Модель с фазовым переходом, возникающим при использовании "клеточных автоматов", (модель взаимодействующих пикселей – МВП) [14].

Модель 3. Двумерная модель Изинга [6].

В случае, когда пиксели не взаимодействуют друг с другом, и срабатывание каждого пикселя происходит случайно, воспользуемся результатами теории перколяции (модель1). Подобный подход использовался в работе [3] для изучения особенностей подачи рабочего напряжения на пиксели детектора.

Порогу срабатывания электроники (т.е. порогу срабатывания пикселя), в нашей модели, соответствует порог вероятности образования соединяющего кластера (т.н. порог перколяции), где соединяющий кластера – кластер, который соединяет одну сторону решётки с другой. Величина порога перколяции модельно зависима от вида решётки и типа задачи перколяции [5]. В нашем случае она равняется вероятности срабатывания канала регистрирующей электроники пикселя - p, которая определяется выбором порога срабатывания электроники $Q_{пор}$ (вероятность срабатывания пикселя и порог перколяции равны p=1/2). На рис. 3 приведена вероятность распределения кластеров (нормированная на общее количество кластеров) от размера (количества ячеек) для различных значений p -вероятности срабатывания пикселей. Данные распределения были получены в результате вычислительного эксперимента методом Монте-Карло. Рассматривалась матрица размером 40x40 пикселей. На рис. 3 видно, что при p в диапазоне от 0.45 до 0.65 (область порога перколяции) происходит резкий рост размера кластера и с дальнейшим ростом p остаются только кластеры маленького и максимального размера. Такое поведение интерпретируется, как фазовый переход. Из теории перколяции известно, что в точке порога перколяции – p_c распределение кластеров по размеру описывается степенным законом [11-13] в независимости от типа решётки и типа задачи при $L\to\infty$ (где L – линейный размер решётки):

$$n_s(p_c) \propto s^{-\tau} \tag{5}$$

где: s – размер кластера, показатель степени $\tau \approx 2.05$ для двумерной решётки. На рис. 4 приведена теоретическая зависимость среднего числа кластеров от размера кластера, которая является прямой линией в двойном логарифмическом масштабе, а так же приведены результаты моделирования методом Монте-Карло в точке порога перколяции [13]. Как видно из представленного графика, при малых размерах кластера s~1÷30 и больших $s \geq 10^5$ поведение точек, полученных моделированием, отличается от линейной зависимости, что обусловлено конечностью размеров решётки. Поэтому, чтобы оценить степень независимости пикселей детектора, влияние внешнего шума, параметров регистрирующей электроники по отклонению от линейной зависимости стоит выбирать область решётки с числом пикселей не менее 10х10 и не более 100х100.

Рассмотрим, как влияет взаимодействие между соседними пикселями на распределение кластеров по размеру. Можно предложить две модели: модель, основанную на понятии клеточных автоматов [14], которая впервые была предложена фон Нейманом, и модель Изинга [8-11]. Вначале рассмотрим применение модели клеточных автоматов. Предположим, что каждый пиксель взаимодействует только с четырьмя ближайшими соседями (так называемое условие фон Неймана), т.е. состояние каждого узла определяются состояниями соседних узлов на предыдущем шаге и, его собственным состоянием. Влияние величины константы взаимодействия между соседними пикселями – Pcross на вероятность распределения кластеров по размеру (без учёта внешнего возмущения) было получено в результате вычислительного эксперимента с использованием модели клеточных автоматов. Рассматривалась матрица размером 40х40 пикселей. Использовались циклические краевые условия. Вероятность срабатывания пикселя принималась равной p=1/2, т.е. в отсутствии взаимодействия между пикселями детектор находился в точке фазового перехода. Из рисунка видно, что форма распределения зависит от величины взаимодействия между пикселями (рис. 5), и является чувствительным индикатором величины константы взаимодействия между соседними пикселями. В данной модели есть два управляющих параметра: порог срабатывания регистрирующей электроники и вероятность взаимодействия между соседними пикселями.

Для описания характеристик бинарного пиксельного детектора с взаимодействующими соседними пикселями в состоянии *теплового равновесия*, где существует возможность самопроизвольного возвращения пикселя в основное состояние, рассмотрим модель Изинга [9].

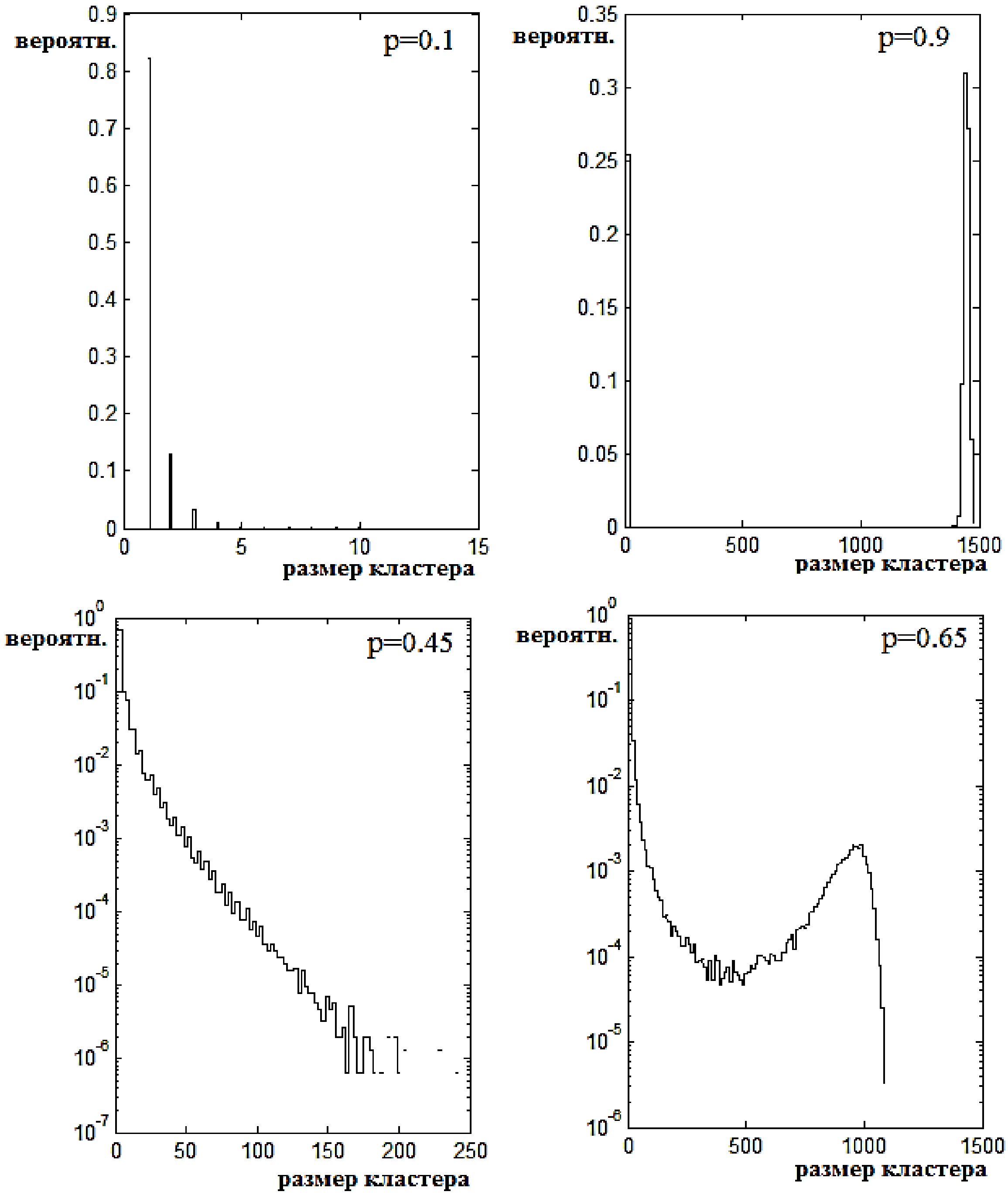

Рис. 3. Вероятность распределения кластеров (нормированная на общее количество кластеров) от размера (количества ячеек) для различных p в полулогарифмическом масштабе.

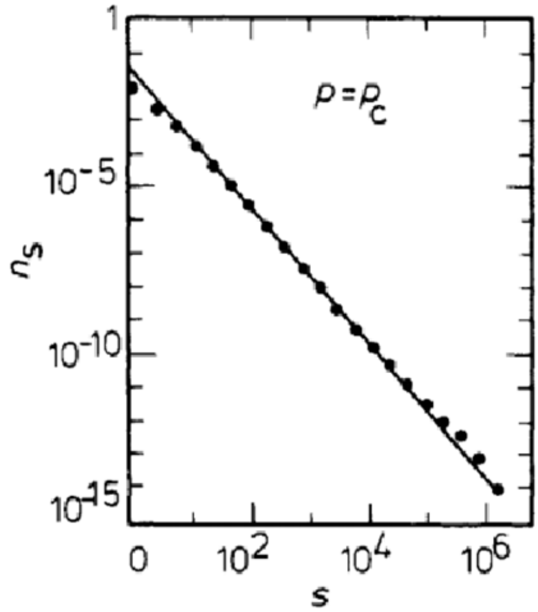

Рис. 4. Зависимость числа кластеров n_s от размера кластера s при пороге перколяции $p = p_c = ½$ [13].

Эта модель относится к классу решёточных моделей, в которых рассматриваются локальные взаимодействия. Модель Изинга широко используется в статистической физике (для исследования переходов из неупорядоченного в упорядоченное состояние), в экономике или распознавании изображений.

Представим пиксельный детектор в виде двухмерной решёточной модели (рис. 2). Рассмотрим основания для использования модели Изинга. Детектор обладает следующими свойствами:

1) Начальное упорядоченное состояние (все пиксели не возбуждены).
2) Существует состояние с максимальной информационной энтропией (рис. 1) при вероятности срабатывания пикселей p=1/2, которое можно принять за хаотичное.
3) Имеется локальное взаимодействие между соседними пикселями.
4) Имеется порог срабатывания пикселя, который определяет переход пикселя из одного состояния в другое.

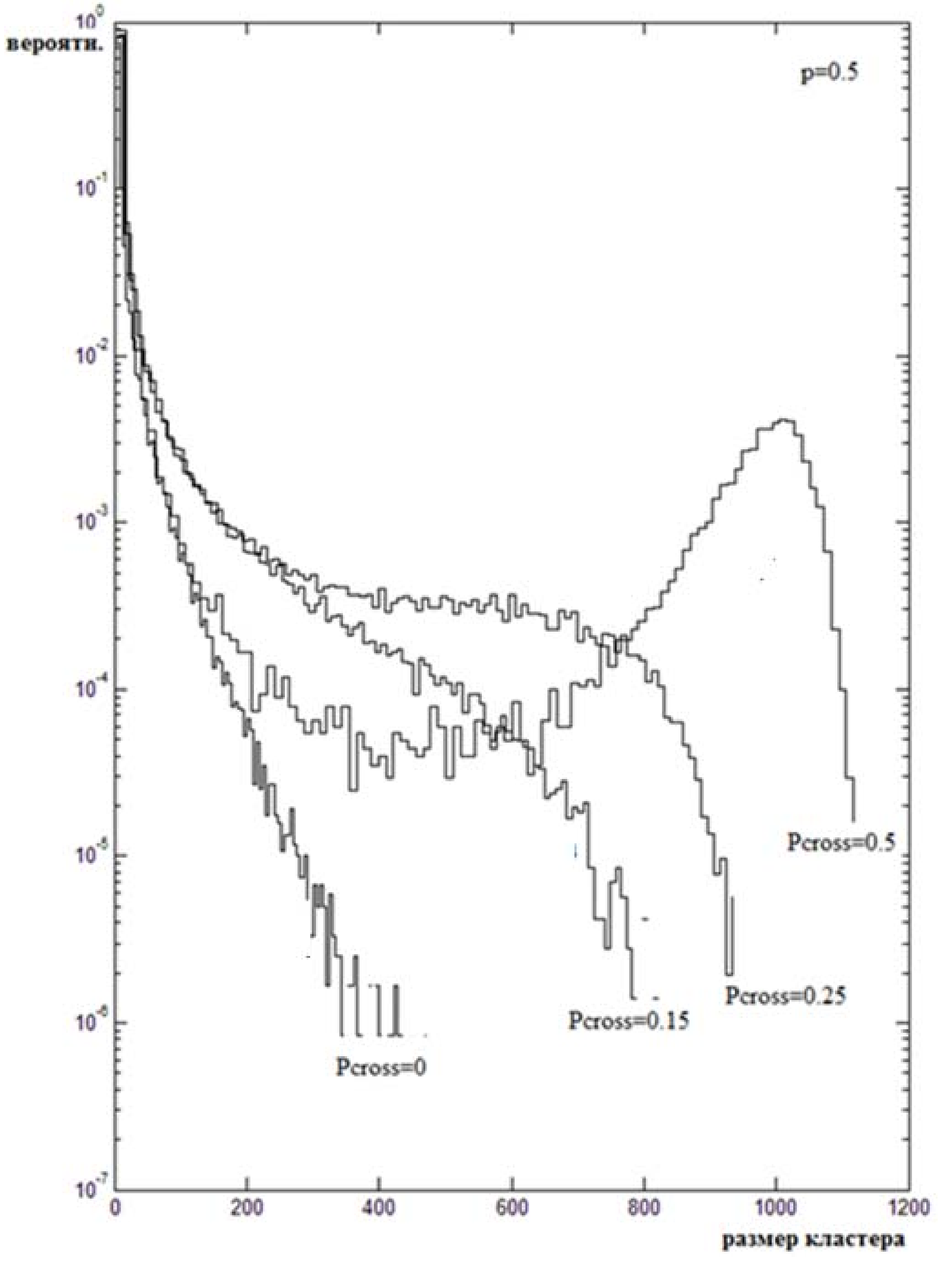

Рис. 5. Вероятность распределения кластеров (нормированная на общее количество кластеров) от размера (количества ячеек) для различных значений Pcross.

Можно сказать, что в процессе регистрации имеется переход из упорядоченного состояния в хаотическое, который возможно трактовать как фазовый переход. Согласно модели Изинга, полная энергия системы выглядит следующим образом [6,8-11]:

$$H = H(s) = -\sum_{\langle i,j \rangle} J s_i s_j - \sum_i h s_i \qquad (6)$$

где s_i =1, когда пиксель сработал, и s_i = -1, когда пиксель не сработал, первая сумма берётся по всем ближайшим парам пикселей, а вторая сумма – по всем пикселям решётки. h – энергия взаимодействия внешнего поля (в нашем случае внешнее облучение или общая электромагнитная наводка), действующая на все пиксели, J – константа взаимодействия, которая имеет смысл энергии связи между соседними пикселями. Параметр $\beta = \frac{1}{kT}$, где T – температура.

Известно, что в случае одномерной модели Изинга не существует фазового перехода, тогда как в двумерной наблюдается фазовый переход при критической температуре T_c (температура Кюри) [8-10].

Намагниченность ферромагнетика есть разница между количеством спинов направленных "вверх" и "вниз" [6,8,10]. В нашем случае, намагниченность есть разница между количеством возбуждённых и невозбуждённых пикселей, которая выглядит следующим образом:

$$M = (N_0 - N_1) \qquad (7)$$

Тогда эффективность работы детектора связана с «намагниченностью» :

$$\begin{aligned} M &= \varepsilon N - (1-\varepsilon)N \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{M}{N}\right) \end{aligned} \qquad (8)$$

где ε – средняя эффективность детектора на 1 пиксель, N –общее количество пикселей. Из выражения (8) следует, что эффективность детектора будет равна 1, если «намагниченность» максимальна, т.е. все пиксели находятся в невозбуждённом состоянии. В случае, когда «намагниченность» $M=0$, т.е. имеется одинаковое количество возбуждённых и невозбуждённых пикселей и эффективность ε=0.5.

Рассмотрим двумерный пиксельный детектор. Будем обсуждать модель без внешнего облучения, поскольку точное аналитическое решение для двумерной модели Изинга существует только для случая отсутствия внешнего магнитного поля, и было получено Онзагером [8]. Им было показано, что для двумерной решётки при температуре Кюри при нулевом внешнем поле ферромагнетик переходит из одного фазового состояния в другое:

$$T_c = \frac{2J}{\ln(1+\sqrt{2})k} \approx 2.269\frac{J}{k} \tag{9}$$

где T_c – температура Кюри.

«Намагниченность» при этом выражается следующей формулой:

$$M(T) = \begin{cases} \left(1-\left(sh(2J/kT)\right)^{-4}\right)^{1/8}, & T \le T_c \\ 0, & T > T_c \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, при температуре Кюри «намагниченность» детектора будет равна нулю, а его эффективность равной 50%. Основываясь на этих соображениях, можно оценить константу взаимодействия между пикселями экспериментально. Пусть порог срабатывания электроники, при котором достигается 50% эффективность срабатывания детектора, будет $Q_{50\%}$. Тогда можно записать следующее соотношение, связывающее критическую температуру с пороговым значением заряда:

$$\varphi Q_{50\%} = kT_c \tag{11}$$

где φ – энергия образования одной электронно-ионной пары.

Подставляя в это соотношение выражение для температуры Кюри, получим выражение для оценки величины константы взаимодействия между пикселями:

$$J = \frac{\varphi Q_{50\%}}{2.269} \tag{12}$$

Сравним вероятность распределения кластеров по размеру для модели Изинга и моделью невзаимодействующих пикселей (*МНП*), находящихся в тепловом равновесии. Зависимость «намагниченности» от температуры в модели Изинга в случае отсутствия поля облучения получена моделирование методом Монте-Карло, с использованием алгоритма Метрополиса [10]. Из рис. 6 видно, что вероятность появления кластеров больших размеров для *МНП* больше, чем в модели Изинга, т.е. обменное взаимодействие уменьшает размер кластера из сработавших пикселей. Если в качестве взаимодействия между пикселями детектора рассматривать взаимодействия, которые приводят к возбуждению соседних пикселей (что соответствует реальной модели детектора), то чем больше взаимодействие между пикселями, тем меньше критическая температуры T_c и величина параметра J. Поэтому необходима модификация гамильтониана модели Изинга, которая позволит более точно найти численный коэффициент в выражении (6).

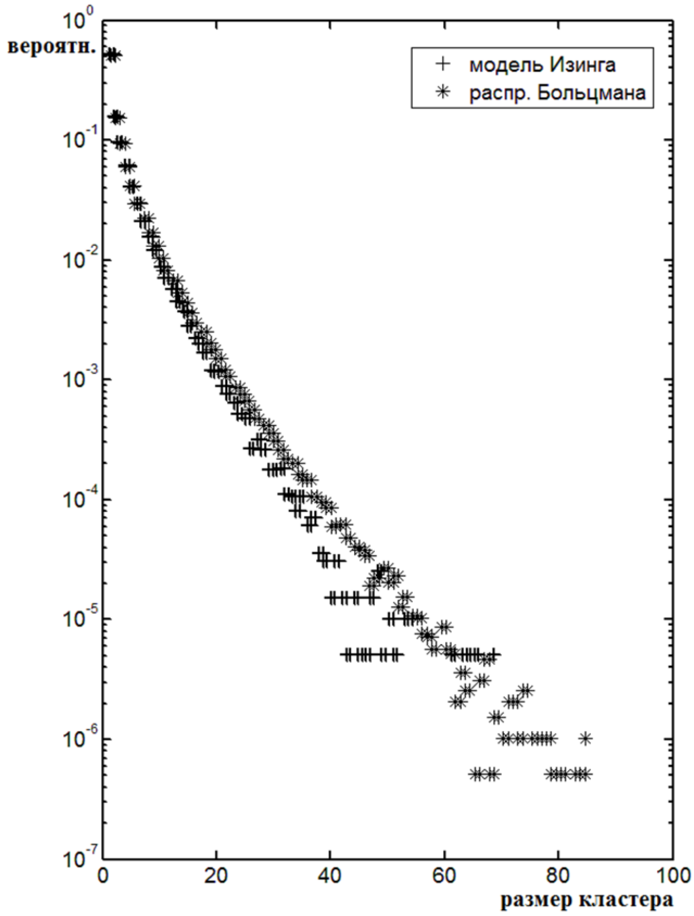

Рис. 6. Вероятность распределения кластеров от размера (количества ячеек) для модели Изинга и модели невзаимодействующих пикселей при $Tc=4\cdot10^7$, $Q_{50\%}=1000e^-$, $\varphi=3.6$эВ, J=0.01 эВ.

Распределение кластеров по размерам в 2D модели Изинга при $T = Tc$, имеет следующий вид [11]:

$$n_s(T_c) \propto s^{-\tau} \qquad (13)$$

где n_s – число кластеров с размером s и $\tau \approx 2.03$ в независимости от величины J и количества пикселей детектора (аналогично фазовому переходу для задачи перколяции).

Таким образом, использование зависимости распределения кластеров от их размеров при эффективности цифрового пиксельного детектора ε=50% позволяет судить о независимости пикселей, величине взаимодействия соседних пикселей, порогах регистрирующей электроники.

Обсуждение результатов

Основная идея, рассмотренная в данной работе, состоит в том, чтобы для матричного (двумерного) многопиксельного детектора *найти точку, в которой система из сработавших и несработавших от собственного шума пикселей была бы хаотична*. Тогда любое взаимодействие между соседними пикселями или изменение управляющих параметров системы (порог регистрирующей электроники, внешние наводки) приводит к изменению состояния системы и влияет на форму распределения числа кластеров от их размера. Оказалось, что для описания поведения такой системы удобно использовать модели с фазовым переходом, которые в этой точке (фазового перехода) являются масштабно инвариантными и позволяют по поведению части системы судить о свойствах всей системы. Для всех рассмотренных моделей существует универсальная зависимость, определённая в точке фазового перехода (ε=50%), и описывающая поведение зависимости числа кластеров от размера. Данная зависимость имеет вид : $n_s \propto s^{-\tau}$, где: n_s – число кластеров с размером s и показателем $\tau \approx 2.03$-2.05. В двойном логарифмическом масштабе эта зависимость представляет собой прямую линию, на концах которой, в области малых размеров кластера и больших размеров есть небольшие отклонения, вызванные конечностью системы. Точка, в которой эффективность цифрового детектора составляет ε=50% , является точкой с максимальной информационной энтропией и является точкой фазового перехода.

Очевидно, что рассмотренные модели имеют определённые ограничения для описания работы цифрового многопиксельного детектора. Модели 1,2 (МНП,МВП) не содержат возможности самопроизвольного возвращения пикселя в основное состояние (запись и сброс состояний пикселей происходит от внешних сигналов: "старт", "стоп"), т.е. детектор не находится в тепловом равновесии с внешней средой. Данные модели позволяют легко ввести необходимые параметры для описания различных расположений пикселей в детекторе и видов взаимодействия между пикселями, и их стоит использовать, например, для кремниевых цифровых пиксельных детекторов.

Модель 3 (модель Изинга) стоит использовать для описания характеристик детектора с взаимодействующими соседними пикселями, находящегося в состоянии теплового равновесия. Но, как отмечено выше, необходимо модифицировать гамильтониан модели Изинга для уточнения числового коэффициента между энергией взаимодействия соседних пикселей и критической температурой. Подобную модель возможно использовать для описания свойств SiPMs, GAPD, MPPC, Philips' Digital Photon Counting SiPM [15].

Существует ряд практических задач, таких как: производство и тестирование полупроводниковых пиксельных детекторов большой площади, тестирование многопиксельных систем, где можно использовать полученные результаты. Алгоритм применения видится следующим: выбирается некоторая часть детектора, находится порог срабатывания электроники, при котором происходит 50% срабатывание всех пикселей от собственного шума и строится распределение числа кластеров от размера кластеров. По форме данного распределения можно делать выводы о величине взаимодействия между пикселями, пороге электроники, числе работающих пикселей.

Заключение

В данной работе показано, что информация о распределении шумовых кластеров по размеру кластера является интегральной характеристикой работоспособности многопиксельного цифрового детектора, и позволяет делать выводы о его свойствах. Модели с фазовым переходом позволяют описывать распределение шумовых кластеров по размеру кластера для детектора в точке фазового перехода (эффективность детектора 50%, или вероятность срабатывания пикселей *p=0.5*). Наличие в таких моделях универсальной зависимости в точке фазового перехода $n_s \propto s^{-\tau}$, где n_s – число кластеров с размером s и τ в диапазоне от 2.03 до 2.05, позволяет оценить работу детектора в целом, используя только часть детектора.

В заключение автор выражает благодарность С.П. Денисову и А.М. Зайцеву за внимание, проявленное к работе. В.Д. Самойленко хочется поблагодарить за многочисленные полезные замечания и комментарии, позволившие уточнить некоторые вопросы, изложенные в данной статье.

Список литературы

[1] P. Buzhan, B. Dolgoshein, L. Filatov, et. al. Nucl. Instr. and Meth. A 504 (2003) p.48-52.

[2] M. Pindo Nuclear Instrum. and Meth. A 480 (2002) p. 754-762.

[3] M. Pindo Nuclear Instrum. and Meth. A 500 (2003) p. 406-411

[4] Х. Гульд, Я. Тобочник. Компьютерное моделирование в физике. Москва «Мир» 1990.

[5] Ю.Ю. Тарасевич. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. М.:Едиториал УРСС, 2002. – 112 с..

[6] А.Ю. Захаров, М.И. Бичурин. Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2010, том 2, № 1, 25–53.

[7] Ю.Б. Румер, М.Ш.Рывкин. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: «Наука» 1972.

[8] L. Onsager, Phys. Rev. 65, 1944, 117.

[9] http://www.phys.huji.ac.il/~springer/Ising/Ising.pdf Computational Physics of Complex Systems Solution of problem set no. 1 Ran Roth, Ofer Springer June 16, 2006.

[10] D.P. Landau, K. Binder. A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics, Cambridge University Press, New York, 2009.

[11] W. S. Jo, S. D. Yi, S.K. Baek, B.J. Kim. Cluster-size heterogeneity in the two-dimensional Ising model. Phys. Rev. E 86, 032103 (2012).

[12] Binbin Ding, Chaolin Li, Meng Zhang, Gang Lu and Fei Ji. Numerical analysis of percolation cluster size distribution in two-dimensional and three-dimensional lattices. Eur. Phys. J. B (2014) 87: 179.

[13] J. Hoshen, D. Stauffer, George H Bishop et al. Monte Carlo experiments on cluster size distribution in percolation. J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 12, No. 8, 1979.

[14] Тоффоли Т., Марголус Н. Машины клеточных автоматов, М.: «Мир», 1991.
[15] T. Frach et al., "The Digital Silicon Photomultiplier – Principle of operation and intrinsic detector performance," Nuclear Science Symposium Conference Record, N 28-5, 2009.

Рукопись поступила 11 мая 2018 г.

Ерин С.В.
Цифровые пиксельные детекторы и модели с фазовым переходом.

Препринт отпечатан с оригинала-макета, подготовленного автором.

Подписано к печати 17.05.2018. Формат 60 × 84/16. Цифровая печать.
Печ. л. 1,25. Уч.– изд.л. 1,72. Тираж 80. Заказ 7. Индекс 3649.

НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ
142281, Московская область, г. Протвино, пл. Науки, 1

www.ihep.ru библиотека http://web.ihep.su/library/pubs//all-w.htm

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2018-5,
НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ, 2018