



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова  
Национального исследовательского центра  
«Курчатовский институт»

Препринт 2019-11

М.Ю. Боголюбский, А.А. Волков, Д.К. Елумахов, А.Ю. Калинин,  
А.Н. Криницын, В.В. Скворцов

**Амплитудно-временные измерения по дискретной  
выборке псевдогауссова сигнала**

Направлено в *Приборы и техника эксперимента*

Протвино 2019

### Аннотация

Боголюбский М.Ю. и др. Амплитудно-временные измерения по дискретной выборке псевдогауссова сигнала: Препринт НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ 2019-11. – Протвино, 2019. – 16 с., 6 рис., 3 табл., библиогр.: 22.

Рассмотрены амплитудно-временные измерения по оцифрованному профилю сигнала псевдогауссовой формы. Эта форма сигнала охватывает большую часть применений. В качестве алгоритма определения амплитуды  $A$  и временной метки  $t_0$  сигнала выбран метод наименьших квадратов (м.н.к.) как наиболее оптимальный. Для псевдогауссовского сигнала с некоррелированной выборкой м.н.к. сводятся к аналитическим формулам для  $A$ ,  $t_0$ , которые согласуются с экспериментом. Это позволяет оценить количество точек  $N_s$  оцифровки на профиле в зависимости от электронного шума, требуемой точности  $A$ ,  $t_0$  и параметров электронного фильтра. Полученные результаты для  $N_s$  иллюстрируются качественными оценками в соответствии с теоремой Найквиста-Шеннона-Котельникова. Электронный фильтр, формирующий импульс, проанализирован в терминах коэффициента превышения шума, характеризующего его оптимальность. Найдена автокорреляционная функция стохастических источников шума, позволяющая определить недиагональные элементы весовой матрицы м.н.к. и сформулировать требования пренебрежимости корреляций, что необходимо для применения аналитического решения. Это решение может являться кандидатом на встраиваемый в чип алгоритм для передачи во внешний мир требуемых величин  $A$ ,  $t_0$ ,  $\chi^2$  и числа степеней свободы  $N_d$ .

### Abstract

Bogolyubsky M.Yu. et al. Amplitude and time measurements from discrete sampling of pseudo-Gaussian signal: NRC «Kurchatov Institute» – IHEP Preprint 2019-11. – Protvino, 2019. – p. 16, figs. 6, tables 3, refs.: 22.

Amplitude and time measurements from digitized signal of the pseudo-Gaussian shape are considered. This form covers big part of the applications. The least squares method (l.s.m.) is chosen as the most optimal algorithm for determining signal amplitude  $A$  and timestamp  $t_0$ . For pseudo-Gaussian profile with an uncorrelated sampling the l.s.m. is reduced to the analytical formulas for  $A$  and  $t_0$  consistent with the experiment. This permits to estimate the desired number of points  $N_s$  on the profile depending on electronic noise, required accuracy of  $A$ ,  $t_0$  and electronic filter parameters. The obtained results for  $N_s$  are illustrated with qualitative estimates in accordance with Nyquist-Shannon-Kotelnikov sampling theorem. The optimality of electronic filter forming the waveform is analyzed in terms of excess noise factor with calculation of the autocorrelation function from stochastic noise sources. It permits to define non-diagonal weight matrix elements in the l.s.m. with formulation of requirements for neglecting of the sampling correlations desired for application of the analytical solution. This solution is convenient for use in processing of signal profile data and it can be a candidate for an algorithm embedded into the chip to transmit to the external world required values  $A$ ,  $t_0$ ,  $\chi^2$  and number of degrees of freedom  $N_d$ .

## Введение

В эксперименте большая часть измерений сводится к определению амплитуды и временной метки сигналов. Традиционно применяемые способы, построенные на Амплитудно-Цифровых (АЦП) и Временно-Цифровых Преобразователях (ВЦП), все более заменяются устройствами (ВАЦП) с оцифровкой профиля импульса на дискретном множестве точек [1, 2, 3]. Данный способ позволяет определить как амплитуду  $A$  сигнала так и его временную метку  $t_0$ . Оценка величины  $t_0$  здесь свободна от систематических погрешностей в зависимости от  $A$ , свойственных ряду ВЦП. Метод позволяет определять уровень базовой линии сигнала в событии (аналог пьедестала для АЦП) по среднему значению данных пресэмплинга. Последний состоит из 5 – 15 точек оцифровки, предшествующих измеряемому сигналу [4].

Недостатком метода является большой поток снимаемой информации. Объем данных пропорционален количеству точек  $N_s$  на оцифрованном профиле и может достигать больших значений. Возникает вопрос насколько можно уменьшать  $N_s$  без существенного ухудшения точности определения амплитуды и временной метки.

Теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова [5, 6] (см. также монографию [7]) отвечает на вопрос о возможности замены непрерывного сигнала функцией дискретного аргумента. Она утверждает, что непрерывную функцию с ограниченным спектром по частоте  $f < f_1$  можно передавать дискретной выборкой с  $N=2f_1$  отсчетов в секунду без потери информации. Но следует отметить, что для измерений в физическом эксперименте форма сигнала часто известна заранее, а параметрами, подлежащими определению, являются только  $A$  и  $t_0$ . Объем снимаемой информации можно резко понизить, если передавать во внешний мир не оцифрованный профиль сигнала, а сами требуемые величины  $A$  и  $t_0$ . Это возможно, если в чип электроники внедрить эффективный алгоритм определения рассматриваемых величин. Из теории обработки данных известно, что метод наименьших квадратов (м.н.к.) [8] обладает очень высокой эффективностью для определения параметров функции по ряду измеренных ее значений на дискретном множестве точек [9, 10, 11, 12].

Такой подход на основе м.н.к. рассмотрен для фотонного спектрометра PHOS [13] на кристаллах *PWO* в эксперименте ALICE на Большом Адронном Колайдере (БАК) (расстояние от точки столкновения ионных пучков до спектрометра – 460 см). PHOS оснащен ВАЦП типа ALIRO [1] с псевдогауссовой формировкой выходного сигнала. В работе [4] было показано, что для псевдогауссова профиля с некоррелированной выборкой применение м.н.к. сводится к аналитическим формулам для  $A$ ,  $t_0$  и их погрешностей.

В данной работе проанализированы условия применимости метода. Получены ограничения м.н.к. на величину количества точек оцифровки  $N_s$  на профиле сигнала в зависимости от уровня шума электроники, требуемой точности измерений  $A$ ,  $t_0$  и параметров электронного фильтра. Найденные результаты для  $N_s$  иллюстрируются качественными оценками по теореме Найквиста-Шеннона-Котельникова. Свойства электронного фильтра, формирующего необходимый вид импульса, проанализированы в терминах коэффициента превышения шума, характеризующего оптимальность тракта электроники. Найдена автокорреляционная функция стохастических источников шума, позволяющая сформулировать требования для получения некоррелированной выборки, необходимой для использования алгоритма с аналитическим решением.

Отметим, что выбор псевдогауссовой формировки выходного импульса для спектрометра PHOS обусловлен условиями работы в центральной области псевдобыстрот ( $-0.12 < \eta < 0.12$ ) эксперимента ALICE при умеренных загрузках каналов с пренебрежимо малым вкладом наложений сигналов. В эксперименте ATLAS на БАК в условиях больших загрузок для работы с жидкостными ионизационными калориметрами была выбрана другая формировка сигнала [14], имеющая в начале главный положительный пик, переходящий с ростом времени в отрицательный затухающий выброс. В этом случае рассмотрение обработки сигнала не удастся свести к простым аналитическим решениям.

## 1. Форма импульса

Амплитуда сигнала  $A$  и его временная метка  $t_0$  входят в зависимость профиля сигнала  $y(t)$  от времени  $t$  следующим образом

$$y(t) = A \cdot \phi(t - t_0) , \quad (1)$$

где вид функции  $\phi$  определяется формировкой импульса в электронном тракте, примем ее в виде:

$$\phi(t) = \Theta(t) \cdot (ek/n)^n \cdot f_{nk}(t/\tau) , \quad (2)$$

где  $n > 0$  и  $k > 0$  — некоторые числа,  $\tau > 0$  — значение константы временного отклика,  $f_{nk}$  — псевдогауссовая функция, определяемая как

$$f_{nk}(x) = x^n \exp(-kx) , \quad (3)$$

а функция  $\Theta(t)$  есть

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Функция  $f_{nk}(t/\tau)$  быстро падает с ростом  $t$  после достижения максимума в точке  $t=t_m=\tau n/k$ . При больших  $t$  информация в измеренных точках сильно уменьшается, а ее относительный вклад в определение параметров импульса падает из-за наличия шумов. Поэтому оцифровку профиля следует учитывать до некоторой величины  $t=t_2$ , при которой функция уменьшается до значения  $\kappa$  относительно своего максимума. Из данных [4] со спектрометра PHOS, мы делаем в этой работе выбор  $\kappa=1/10$ . Учет оцифровки профиля при  $t>t_2$  уже не приводит к существенному улучшению точности измерений параметров импульса.

Граничная величина времени  $t_2$ , соответствующая  $\kappa=1/10$ , может быть найдена по формуле

$$t_2 = d_{nk}\tau, \quad (5)$$

где значения коэффициента  $d_{nk}$  приведены в Таблице 1 для  $n=k=1,2,3,4,5,6$ . Количество точек оцифровки  $N_s$  на профиле сигнала будет определяться как

$$N_s = d_{nk}f\tau, \quad (6)$$

где  $f$  - частота оцифровки.

Таблица 1. Значения коэффициента  $d_{nk}$  из формулы (5) определения граничного времени  $t_2$ , при котором псевдогауссова функция  $f_{nk}(t/\tau)$  уменьшается до уровня  $\kappa=1/10$  относительно своего максимума при  $t=\tau n/k$ . Данные представлены для электронных фильтров с  $n=k=1,2,3,4,5,6$ .

$n=k=1$	$n=k=2$	$n=k=3$	$n=k=4$	$n=k=5$	$n=k=6$
4.89	3.36	2.80	2.49	2.29	2.15

Аппроксимация выходного сигнала псевдогауссовой функцией  $f_{nk}(t/\tau)$  на фотонном спектрометре PHOS с ВАЦП типа ALTRO [1] представлена в [4]. Ее параметры:  $n=k=4$  и  $\tau=1.17$  мкс. Отметим, что на экспериментальном профиле наблюдаются небольшие (не превышающие нескольких процентов) систематические дисторсии (микронаводки) относительно идеальной псевдогауссовой зависимости. Эффект указанных дисторсий происходит из-за принятых схемотехнических решений электроники и работы цифровой части чипов ВАЦП. Измеренные параметры дисторсий для электроники ALTRO приведены в [4], и они могут быть вычтены из данных перед фитом для определения амплитуды и временной метки. Тем не менее, их остаточное влияние остается в виде эффективного электронного шума, который на профиле сигнала несколько превышает стохастический электронный шум  $\sigma_{es}$ .

В работе [2] описан ВАЦП, созданный на основе интегральной микросхемы AD9222 фирмы Analog Devices и используемый в эксперименте ВЕС на ускорителе У-70. Этот ВАЦП характеризуется значительно меньшим значением константы временного отклика  $\tau$ , чем рассмотренный выше ВАЦП на основе электроники ALTRO. На рисунке 1 показана аппроксимация выходного сигнала рассматриваемого ВАЦП псевдогауссовой зависимостью  $y(t)=A \cdot \phi(t - t_0) + y_0$  с учетом базового уровня  $y_0$  (см. формулы (1)-(3)) при  $n=k=2$  и  $\tau=55$  нс.

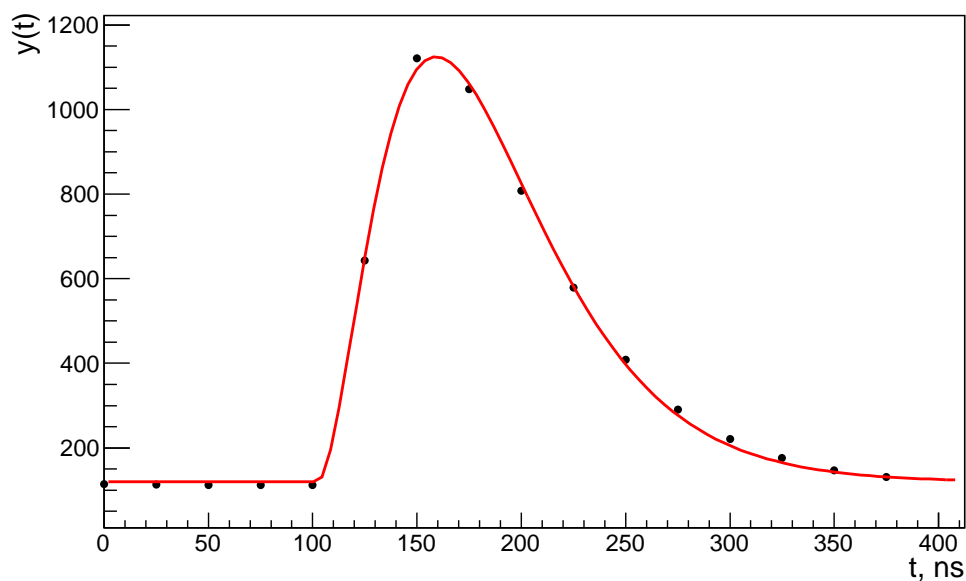


Рис. 1. Аппроксимация выходного сигнала ВАЦП, созданного на основе интегральной микросхемы AD9222 фирмы Analog Devices, псевдогауссовой зависимостью  $y(t)=A \cdot \phi((t - t_0)/\tau) + y_0$  (см. формулы (1)-(3)) при  $n=k=2$  и  $\tau=55$  нс,  $A$  и  $t_0$  – амплитуда и временная метка сигнала,  $y_0$  – базовый уровень сигнала (точки на профиле взяты из работы [2]).

Приведем выражение для Фурье-образа  $F_{nk}(w)$  от описывающей форму импульса функции  $\Theta(t) \cdot f_{nk}(t/\tau)$

$$F_{nk}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t) \cdot f_{nk}(t/\tau) \exp(-iwt) dt = \frac{\tau n!}{(k + iw\tau)^{n+1}}, \quad (7)$$

где  $w=2\pi f$ . Зависимость модуля  $|F_{nk}(w)|$  от аргумента  $f\tau$  показана на рисунке 2. Из представленного графика можно определить границу спектра  $f_1$  как частоту,

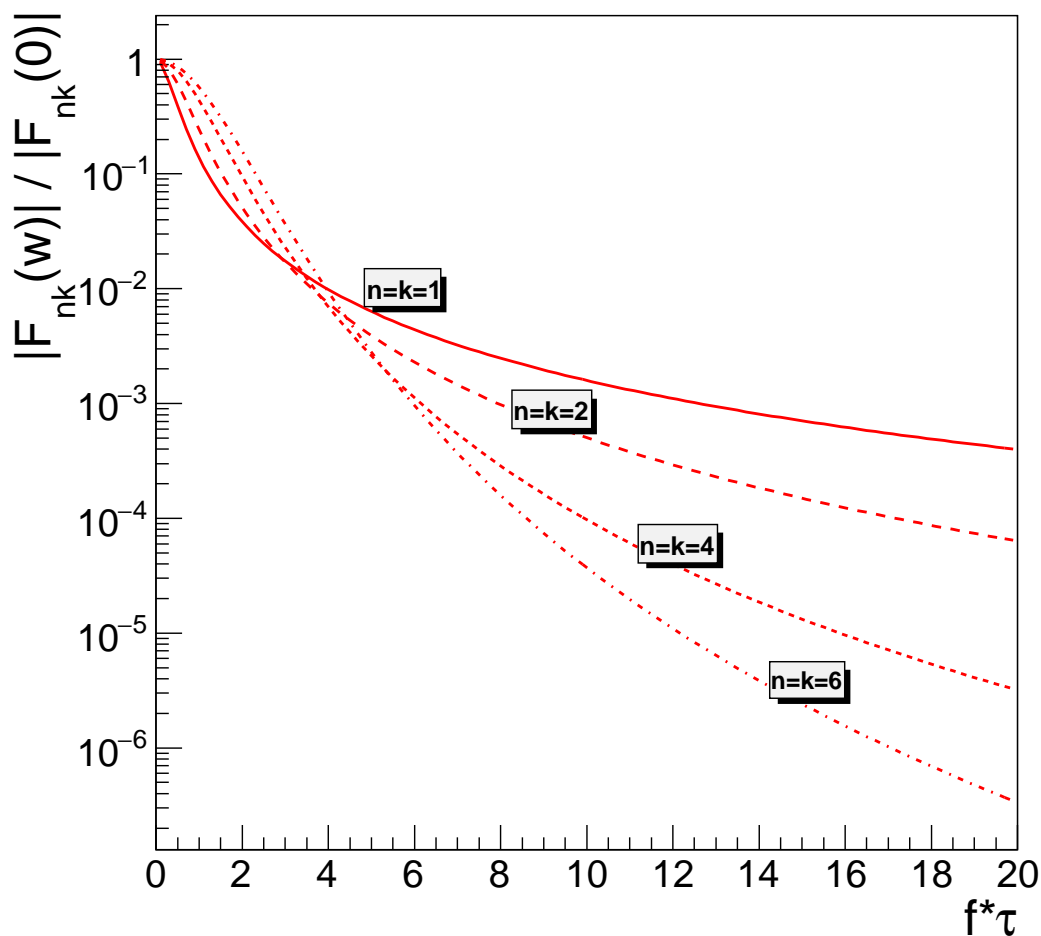


Рис. 2. Зависимость модуля  $|F_{nk}(w)|$  Фурье-образа (нормирована на 1 в точке максимума) псевдогауссова импульса (см. (2)) от аргумента  $f\tau$ , где  $w=2\pi f$ , при  $n=k=1,2,4,6$ . Сплошные, пунктирные, точечные и штрих-пунктирные кривые соответствуют псевдогауссовым электронным фильтрам типа  $f_{11}$ ,  $f_{22}$ ,  $f_{44}$  и  $f_{66}$ .

при которой модуль  $|F_{nk}(w)|$  Фурье-образа падает до уровня  $\kappa_w < 1$  относительно максимального значения. При пренебрежении вклада частот спектра  $f > f_1$  в соответствии с теоремой Найквиста-Шеннона-Котельникова частота оцифровки должна

составлять величину  $f=2f_1$ . Отсюда получаем результаты для  $N_s$  (см. формулу (6)), представленные в Таблице 2, для значений  $\kappa_w$ , равных 1/100, 1/200, 1/500, 1/1000 и электронных фильтров с  $n=k=1,2,3,4,5,6$ . Видно, что при  $3 \leq n=k \leq 6$  величина  $N_s$  сравнительно слабо зависит от порядка фильтра  $n$ .

Таблица 2. Ограничение на число точек оцифровки  $N_s$  псевдогауссова сигнала, следующее из теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова, при определении границы  $f_1$  спектра импульса как частоты, при которой модуль  $|F_{nk}(w)|$  Фурье-образа (см. формулу (7)) падает до уровня  $\kappa_w$  относительно максимального значения, данные представлены для электронных фильтров с  $n=k=1,2,3,4,5,6$ .

$\kappa_w$	$n=k=1$	$n=k=2$	$n=k=3$	$n=k=4$	$n=k=5$	$n=k=6$
1/100	16	10	9	8	7	7
1/200	22	13	10	9	9	8
1/500	35	17	13	11	10	10
1/1000	50	22	15	13	11	11

Представленные ограничения для  $N_s$  на основе теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова являются в значительной степени качественными, поскольку в реальном эксперименте форма импульса зачастую известна заранее и параметрами, подлежащими определению, являются только амплитуда сигнала и его временная метка. В следующих разделах будет проанализирована электронная схема формирования псевдогауссова импульса с оптимизацией ее параметров для минимизации электронного шума, найдена автокорреляционная функция шума, а также рассмотрено применение м.н.к. для получения  $A$ ,  $t_0$  и количественных оценок необходимого числа точек  $N_s$  на профиле сигнала.

## 2. Формировка выходного импульса

Зависимость формы сигнала  $y(t)$  от времени  $t$  на выходе электронного тракта определяется интегралом свертки токового импульса детектора  $I_d(t)$  с переходной функцией рассматриваемого электронного тракта  $h(t)$

$$y(t) = \int_0^t h(t-t')I_d(t') dt' , \quad (8)$$

где  $h(t)=0$  при  $t<0$  (принцип причинности), а время  $t$  отсчитывается от момента начала сигнала детектора  $I_d(t)$ .

В дальнейшем при анализе будем считать, что длительность импульса  $I_d(t)$  намного меньше, чем характерное время реакции электронного фильтра (такое пред-



положение справедливо для электроники ALTRO на спектрометре PHOS. В рассматриваемом пределе сигнал  $I_d(t)$  пропорционален  $\delta$ -функции

$$I_d(t) = Q\delta(t) , \quad (9)$$

где  $Q$  - полный заряд, полученный от детектора. Соответственно, интеграл свертки (8) принимает вид:

$$y(t) = Q \cdot h(t) , \quad (10)$$

т.е. форма выходного сигнала повторяет форму переходной функции  $h(t)$ .

Для дальнейшего анализа будем считать, что электронный тракт состоит из зарядово-чувствительного усилителя (СА) и последующего фильтр-усилителя (ФА), см. рисунок 3, так что в результате формируется псевдогауссова форма выходного импульса. Конкретные схемотехнические решения для достижения этого можно найти в [1, 2, 3].

Переходная функция СА в частотном представлении есть

$$S(w) = -1 / ( iwC_0 ) , \quad (11)$$

где  $C_0$  - величина конденсатора обратной связи,  $w=2\pi f$ . Обозначим переходную функцию ФА как  $H_F(w)$ . Усилители СА и ФА формируют результирующую переходную функцию  $H(w)$  в виде произведения

$$H(w) = S(w) \cdot H_F(w) . \quad (12)$$

Функция  $H(w)$  легко вычисляется, так как она, по определению, есть Фурье-образ от переходной функции  $h(t)$  электронного фильтра, форма которая совпадает с формой выходного импульса, см. формулу (2):

$$H(w) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-iwt) dt = C \cdot (ek/n)^n F_{nk}(w) , \quad (13)$$

где  $C=A/Q$  - калибровочная константа канала, задающая переход от единиц измерения заряда к отсчетам оцифровки,  $F_{nk}(w)$  определяется формулой (7).

Детектор характеризуется собственной емкостью  $C_d$  и представляется в виде источника тока  $\delta$ -образных импульсов. В принятом приближении Фурье-образ  $i_d(w)$  импульсов ток  $I_d(t)$  есть:

$$i_d(w) = \int_{-\infty}^{\infty} I_d(t) \exp(-iwt) dt = Q . \quad (14)$$

Возможные виды шума описываются стандартно двумя независимыми источниками (стационарными и стохастическими) – последовательным шумовым напряжением  $E_s$  и параллельным шумовым током  $I_p$ . Соответствующие шумовые спектральные плотности (для последовательного шума пренебрегается вклад фликкер-компоненты) определяются формулой Найквиста, см., например, [15]

$$\frac{d}{df} \overline{E_s^2} = 4KTR_s , \quad (15)$$

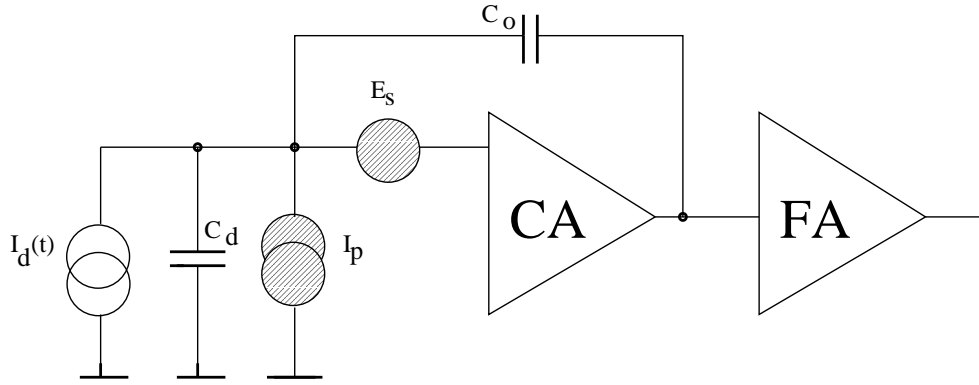


Рис. 3. Электронный тракт считывания сигнала; обозначения: СА – зарядово-чувствительный усилитель, FA – фильтр-усилитель.

$$\frac{d}{df} \overline{I_p^2} = 4KT/R_p, \quad (16)$$

где  $R_s$  и  $R_p$  – эквивалентные сопротивления последовательного и параллельного шума,  $K$  – константа Больцмана,  $T$  – температура по шкале Кельвина.

Теперь легко найти в общем спектре  $U_{tot}(w)$  вклады полезного сигнала и шума, а также определить спектральную интенсивность шума  $W_n(w)$  на входе FA:

$$U_{tot}(w) = (i_d + I_p) \cdot S(w) - E_s(1 + C_d/C_0), \quad (17)$$

$$W_n(w) = (2KT/R_p) (w^{-2} + \tau_n^2)/C_0^2, \quad (18)$$

где  $\tau_n$  – временная константа шума, определяемая как

$$\tau_n = \sqrt{R_s R_p} \cdot (C_0 + C_d). \quad (19)$$

Полезную компоненту  $U_{sig}(w)$  в полном спектре  $U_{tot}(w)$  (см. (17)) на входе FA, определяемую через произведение (14) и (11), запишем в виде

$$U_{sig}(w) = Q \cdot S(w). \quad (20)$$

Затем легко можно получить выражение для оптимальной с точки зрения отношения сигнал/шум переходной функции  $H_F^{opt}(w)$  фильтр-усилителя, используя формулы хорошо известные в литературе, см., например, [16, 17, 18, 19]:

$$H_F^{opt}(w) = K_F S^*(w) \exp(-iwt_m) / W_n(w), \quad (21)$$

где  $K_F$  – некоторая константа. Отношение сигнал/шум для этого фильтра достигает максимума, который вычисляется по формуле [16, 17, 18, 19]

$$\mu^{opt} = Q \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(w)|^2}{W_n(w)} \cdot \frac{dw}{2\pi}}. \quad (22)$$

Поставляя выражения для  $S(w)$  и  $W_n(w)$ , получаем

$$\mu^{opt} = Q/\sqrt{4KT\tau_n/R_p}. \quad (23)$$

Качество фильтра характеризуется параметром  $K_n$ , называемом фактор превышения шума (excess noise factor), который определяется как отношение

$$K_n = \mu^{opt}/\mu, \quad (24)$$

где  $\mu^{opt}$  — отношение сигнал/шум при оптимальной фильтрации, см. (22) и (23),  $\mu$  — это же отношение для рассматриваемого фильтра, равное

$$\mu = A/\delta A, \quad (25)$$

здесь  $A$  — максимальное (амплитудное) значение сигнала, достигаемое в момент  $t_m = \tau n/k$ , а  $\delta A$  — погрешность величины  $A$

$$\delta A = \sqrt{W}, \quad (26)$$

где  $W$  — мощность шума на выходе электронного тракта. Так как интенсивность спектральной плотности на выходе электронного тракта определяется произведением  $W_n(w) \cdot |H_F(w)|^2$  (выражения для  $H_F(w)$  может быть получено из формулы (12) с учетом (11 и (13)), то имеем

$$W = C^2 \cdot (ek/n)^{2n} \cdot (2KT/R_p) \cdot (\tau n!)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + w^2\tau_n^2}{(k^2 + w^2\tau^2)^{n+1}} \cdot \frac{dw}{2\pi}. \quad (27)$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$W = C^2(2KT\tau_n/R_p) \cdot (e/(2n))^{2n} \cdot n(2n-2)! \cdot ((2n-1)\tau/(k\tau_n) + k\tau_n/\tau). \quad (28)$$

Отсюда находим следующую формулу для  $K_n$  (24), выраженную через параметры псевдогауссова фильтра

$$K_n = (e/(2n))^n \cdot \sqrt{(n/2) \cdot (2n-2)!} \cdot \sqrt{(2n-1)(\tau/\tau_n) / k + (\tau_n/\tau) \cdot k} \quad (29)$$

Чем оптимальнее является электронный фильтр, тем ближе к единице значение его коэффициента превышения шума  $K_n$ . Рисунок 4 показывает зависимость величины  $K_n-1$  от отношения  $\tau_n/\tau$  при  $n=k=1,2,4,6$ .

Представленные результаты демонстрируют: а) имеется оптимальное значение параметра  $\tau$  электронного фильтра, несколько превышающее временную константу шума  $\tau_n$ , при котором  $K_n$  достигает минимума, б) минимальные значения  $K_n$  уменьшается с ростом порядка фильтра  $n$ , в) в точке минимума коэффициент превышения шума  $K_n$  для фильтров 1-го, 2-го, 4-го и 6-го порядка составляет, соответственно, 1.37, 1.23, 1.17 и 1.15. Т.е. качество фильтра 6-го порядка, примерно, на 22% выше по сравнению с фильтром 1-го порядка, а фильтр 4-го порядка только на 6% лучше фильтра 2-го порядка.

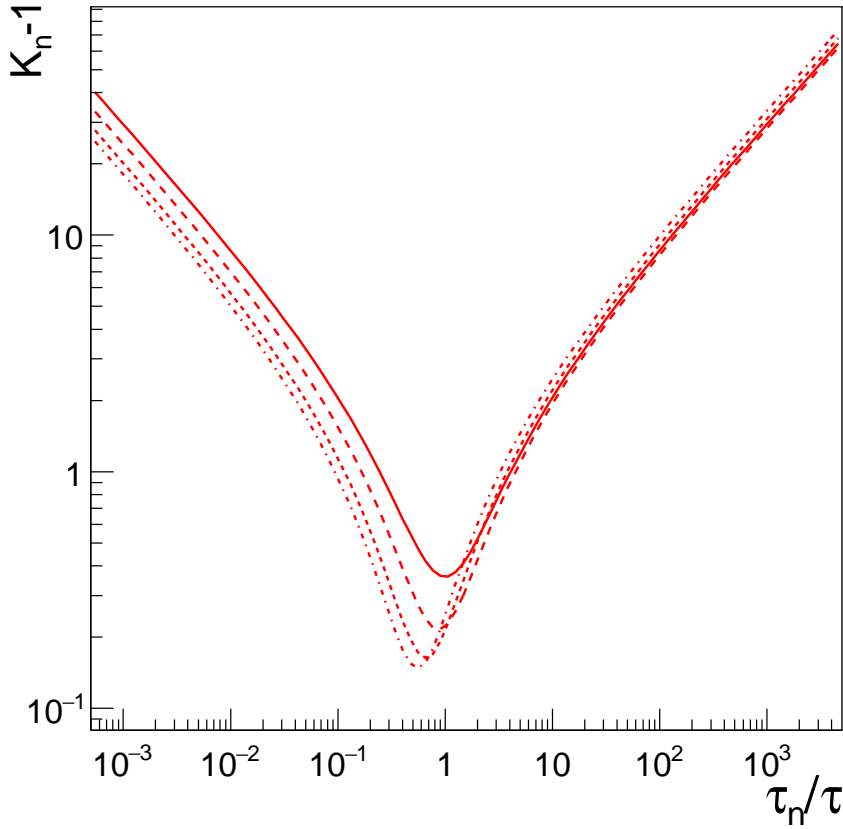


Рис. 4. Зависимость величины  $K_n - 1$  от отношения  $\tau_n / \tau$  ( $K_n$  – коэффициент превышения шума), сплошные, пунктирные, точечные и штрих-пунктирные кривые соответствуют псевдогауссовым электронным фильтрам типа  $f_{11}$ ,  $f_{22}$ ,  $f_{44}$  и  $f_{66}$ .

Величина стохастического шума  $\sigma_{es} = \sqrt{W}$  (ширина шумовой дорожки на временной развертке сигнала) выражается через  $K_n$  как

$$\sqrt{W} = C \sqrt{4KT\tau_n/R_p} \cdot K_n . \quad (30)$$

Важно соотношение  $\sigma_{es}$  и погрешности  $\sigma_d$  из-за оцифровки профиля. Последняя выражается через дисперсию равномерного распределения на интервале  $[0,1]$  (в отсчетах TADC) как [4]

$$\sigma_d = \sqrt{2/12} \simeq 0.41 \quad (31)$$

Коэффициент 2 под знаком квадратного корня объясняется вычитанием базового уровня сигнала, который также оцифровывается.

Рассмотренная здесь связь оптимальности шумовых свойств электронного тракта с отношением временного отклика электроники к временной константе шума также отмечена при анализе схемы, составленной из зарядово-чувствительного усилителя с интегратором и последующим блоком двойной выборки для измерения базовой линии и уровня сигнала [20].

### 3. Автокорреляционная функция от стационарных стохастических источников шума

Автокорреляционная функция  $F_c(t)$ , где аргумент  $t$  – интервал времени, определяется обратным преобразованием Фурье от квадрата модуля частотного спектра шума на выходе электронный тракт [15]. Вычисление  $F_c(t)$  проводится аналогично вычислению мощности шума  $W$  (27) (заметим, что  $W=F_c(0)$ , см. также (28)). Для определения  $F_c(t)$  используется такое же выражение как в правой части формулы (27), но с заменой  $dw \rightarrow \exp(iwt)dw$ . В результате

$$F_c(t) = C^2(e/n)^{2n}(2KT\tau_n/R_p) \cdot (n!)^2 \cdot ((1/\alpha - \alpha)I_n(kt/\tau, 1) + \alpha I_{n-1}(kt/\tau, 1)) , \quad (32)$$

где  $\alpha = k\tau_n/\tau$ , а  $I_n(x, a)$  – следующий интеграл:

$$I_n(x, a) = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(ixz)/(z^2 + a^2)^{n+1}) dz/(2\pi) . \quad (33)$$

При  $n=0$  интеграл легко вычисляется  $I_0(x, a) = \exp(-xa)/(2a)$ , а при  $n>0$  он может быть найден из рекуррентного соотношения:

$$I_n(x, a) = -(\partial I_{n-1}(x, a)/\partial a)/(2na) . \quad (34)$$

Из (34) получаем для  $I_n(x, a)$ :

$$I_n(x, a) = (\exp(-xa)/(2^{n+1}a \cdot n!)) \sum_{j=0}^n D_j^{(n)} x^{n-j}/a^{n+j} . \quad (35)$$

Значение коэффициента  $D_0^{(0)}=1$  определяется из вычисленного выше интеграла  $I_0(x, a)$ . При  $j>0$  и  $n>0$  коэффициенты  $D_j^{(n)}$  находятся из рекуррентного соотношения, следующего из (34)

$$D_j^{(n)} = D_j^{(n-1)} + (n + j - 1)D_{j-1}^{(n-1)} , \quad (36)$$

где учитывается, что по определению,  $D_j^{(n)}=0$  при  $j>n$  или  $j<0$ . Из (36), в частности, получается, что  $D_0^{(n)}=1$ , а  $D_n^{(n)}=(2n + 1)!/(2n + 1)=(2n)!/(2^n n!)$  для любых  $n$ . Найденные значения коэффициента  $D_j^{(n)}$  приведены в Таблице 3 для  $n \leq 6$  и  $j \leq 6$ .

На рисунке 5 показана вычисленная автокорреляционная функция стационарных стохастических источников шума на выходе электронного тракта в зависимости от интервала времени  $t$  для значений отношения  $\tau_n/\tau$ , равных 0.05, 1, 20 для электронных фильтров с  $n=k=1,2,4,6$ . Видно, что временная длина корреляции стохастических источников шума близка к константе временного отклика  $\tau$  электронного фильтра.

В случае, когда ошибки измерений имеют существенные корреляции, последние могут быть учтены в рамках обобщенного метода наименьших квадратов [21] с введением в минимизируемый функционал весовой матрицы  $G_m=B^{-1}$  со следующими матричными элементами

$$B_{ij} = \begin{cases} \sigma_{es}^2 F_c(|t_i - t_j|)/F_c(0) , & i \neq j , \\ \sigma_n^2 , & i = j , \end{cases} \quad (37)$$

Таблица 3. Значения коэффициента  $D_j^{(n)}$  из формулы (35) при  $n \leq 6$  и  $j \leq 6$ .

$n$	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	3	3	0	0	0	0
3	1	6	15	15	0	0	0
4	1	10	45	105	105	0	0
5	1	15	105	420	945	945	0
6	1	21	210	1260	4725	10395	10395

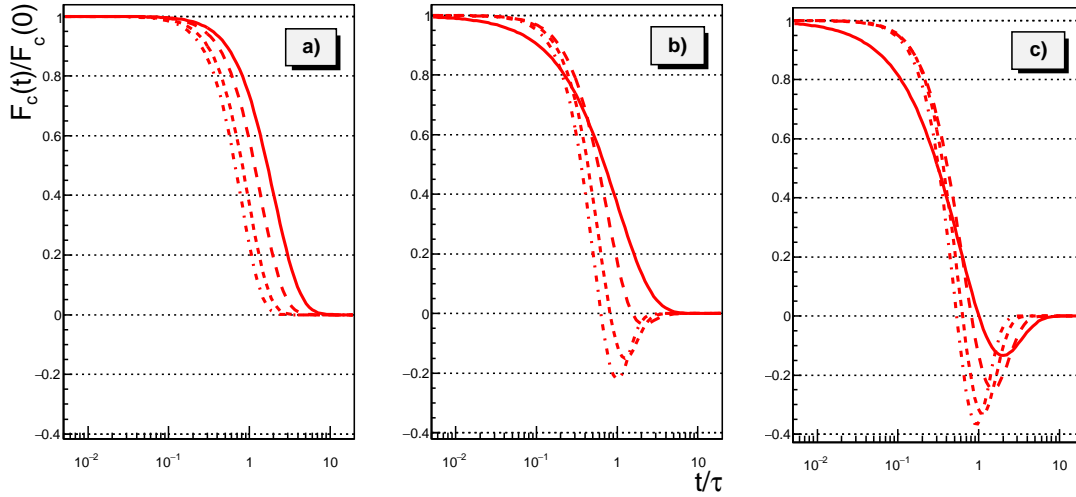


Рис. 5. Вычисленная автокорреляционная функция  $F_c(t)$  стационарных стохастических источников шума на выходе электронного тракта в зависимости от интервала времени  $t$  (нормирована на 1 при  $t=0$ ), а) – отношение  $\tau_n/\tau=0.05$ , б) –  $\tau_n/\tau=1$ , в) –  $\tau_n/\tau=20$ , где  $\tau$  и  $\tau_n$  – временные константы, соответственно, электронного фильтра и шума; сплошные, пунктирные, точечные и штрих-пунктирные кривые соответствуют псевдогауссовым электронным фильтрам типа  $f_{11}$ ,  $f_{22}$ ,  $f_{44}$  и  $f_{66}$ .

где  $t_i$  и  $t_j$  - время, соответствующее  $i$ -ой и  $j$ -ой точкам профиля,  $\sigma_n$  - полный шум, включающий электронный шум, погрешность оцифровки и вклад микронаводок (для электроники ALTRO  $\sigma_n=1.59$  отсчетов [4], калибровка PHOS дала, что один отсчет соответствует энергии фотона 8 МэВ [4] с 9.2 ф.е./МэВ [22]). Влиянием корреляций можно пренебречь, если стохастический электронный шум  $\sigma_{es}$  существенно меньше полного шума:  $\sigma_{es}^2 \ll \sigma_n^2$ .

В эксперименте [4] на спектрометре PHOS с электроникой ALTRO [1] корреляции измерительных ошибок в соседних точках на профиле сигнала отсутствуют, что позволяет воспользоваться аналитическим решением для параметров импульса.

#### 4. Аналитическое решение м.н.к. для амплитуды и временной метки

Для амплитуды  $A$  и временной метки  $t_0$  сигнала псевдогауссовой формы с некогерентной выборкой м.н.к. дает аналитическое решение, приведенное в формулах (15) и (21) в работе [4]. Выпишем выражения для погрешностей  $\sigma_A$  и  $\sigma_t$ , соответственно, величин  $A$  и  $t_0$  в виде зависимостей от числа точек оцифровки  $N_S$  на профиле. Для  $N_S$  воспользуемся равенством (6), затем

$$\sigma_A = \sigma_n \sqrt{d_{nk}/N_S} \cdot (2n)^n \exp(-n) / \sqrt{(n/k) (2n-1)!}, \quad (38)$$

$$\sigma_t/\tau = (\sigma_A/A) \sqrt{2n-1}/k. \quad (39)$$

Значения коэффициента  $d_{nk}$  приведены в Таблице 1,  $\sigma_n$  - полная измерительная ошибка, определяемая квадратичным сложением шума электроники, погрешности оцифровки и вклада микронаводок.

Из формулы (39) видно, что временное разрешение изменяется обратно пропорционально амплитуде сигнала  $A$ . Указанная  $A$ -зависимость, а также вычисляемые по формулам (38) и (39) величины погрешностей согласуются [4] с результатами эксперимента на спектрометре PHOS. При частоте оцифровки  $f=20$  МГц и постоянной времени электронного фильтра  $\tau=1.17$  Мкс измеренные значения временной погрешности составляет величину  $\sigma_t^{(e)}=C_t/A$ , где  $C_t=311 \pm 11$  нс,  $A$  выражена в отсчетах ВАЦП.

Зависимость ошибок  $\sigma_A$  и  $\sigma_t$  определения амплитуды сигнала и его временной метки от количества точек оцифровки  $N_S$  на профиле для псевдогауссовых фильтров с  $n=k=1,2,4,6$  в соответствии с формулами (38), (39) показана на рисунке 6. Видно, что погрешность  $\sigma_A$  слабо зависит от порядка электронного фильтра  $n$  и приведенные кривые при  $n=k=2,4,6$  практически сливаются. Для погрешности измерения времени  $\sigma_t$  прослеживается ее уменьшение с ростом  $n$ .

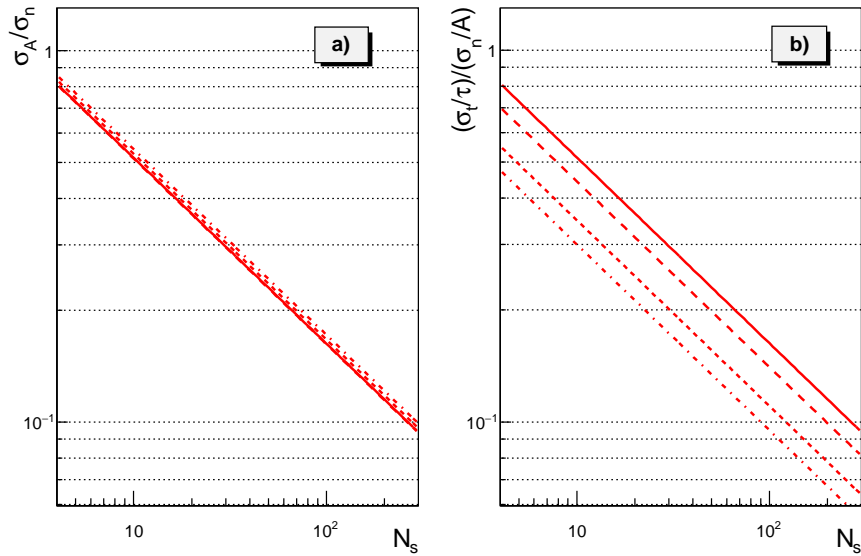


Рис. 6. Зависимость ошибок  $\sigma_A$  (а) и  $\sigma_t$  (б) определения амплитуды сигнала и его временной метки методом наименьших квадратов от количества точек оцифровки  $N_s$  на профиле для псевдогауссовых электронных фильтров с  $n=k=1,2,4,6$ ,  $\sigma_n$  - полный шум, включающий шум электроники, погрешность оцифровки и вклад микронаводок,  $\tau$  - константа временного отклика электронного фильтра,  $A$  - амплитуда сигнала, сплошные, пунктирные, точечные и штрих-пунктирные кривые соответствуют электронным фильтрам типа  $f_{11}$ ,  $f_{22}$ ,  $f_{44}$  и  $f_{66}$ .

## Заключение

В работе рассмотрена оптимальная схема измерений амплитуды  $A$  и временной метки  $t_0$  для оцифрованного сигнала псевдогауссовой формы, для которой решения можно получить в аналитическом виде. Данная форма сигнала охватывает большую часть применений.

Проанализирована степень оптимальности шумовых свойств электроники при различных параметрах электронного фильтра, формирующего необходимый вид выходного импульса.

Выбран метод наименьших квадратов (м.н.к.) как наиболее оптимальный для определения параметров сигнала заранее известной формы. Применение м.н.к. для некоррелированной выборки псевдогауссова сигнала сводится к вычислениям величин  $A$ ,  $t_0$  и их погрешностей по простым аналитическим формулам согласующиеся с экспериментом. В результате получены ограничения на величину количества точек оцифровки  $N_s$  на профиле сигнала в зависимости от требуемой точности определения  $A$ ,  $t_0$ , уровня шума электроники и параметров электронного фильтра.

Найдена автокорреляционная функция источников стохастического шума, позво-



ляющая сформулировать требования к электронному тракту для получения некоррелированной выборки, необходимой для применения метода с аналитическим решением.

Рассматриваемый подход, благодаря сведению его к простым аналитическим формулам, удобен для применения при обработке данных профиля сигнала и может являться кандидатом на встраиваемый в чип алгоритм для передачи во внешний мир не объемной информации оцифровки, а только требуемых величин  $A$ ,  $t_0$ ,  $\chi^2$  и числа степеней свободы  $N_d$ .

Данная работа поддержана грантом РФФИ № 19-02-00278.

## Список литературы

- [1] CERN-EP/ED, Alice TPC Readout chip. User Manual. CERN, June 2002.
- [2] Е.В. Волков, А.В. Ивашин, В.В. Календарёв, В.Д. Матвеев, В.П. Сугоняев, Ю.А. Хохлов, А.А. Шумаков. "Автономный модуль амплитудно-цифрового преобразования ADC-32АТС с оцифровкой формы импульса" , Препринт НИЦ "Курчатовский институт" – ИФВЭ 2017-8.
- [3] Д.Р. Еремеев, А.В. Ивашин, В.Д. Матвеев, М.О. Михасенко, В.П. Сугоняев, Ю.А. Хохлов. "Применение модуля ADC-32АТС с оцифровкой формы импульса на установке ВЕС" , Препринт НИЦ "Курчатовский институт" – ИФВЭ 2019-2.
- [4] M.Yu. Bogolyubsky, V.I. Manko, L. Musa, S.A. Sadovsky, B. Scaali, Yu. G. Sibiryak, Nucl. Instr. and Meth. A621 (2010) 231.
- [5] А.А. Котельников, "О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи" — Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности, 1933. Репринт статьи в журнале УФН, 176:7 (2006), 762—770.
- [6] С.Е. Shannon, "Communication in the presence of noise" , Proc. Institute of Radio Engineers, Vol. 37, № 1, p. 10—21, Jan. 1949.
- [7] М.А. Басараб, Е.Г. Зелкин, В.Ф. Кравченко, В.П. Яковлев, "Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона" — монография, ISBN: 5-93108-064-3, Москва: Радиотехника, 2004.
- [8] Dereck J. Hudson, "Statistics, Lectures on Elementary Statistics and Probability", Geneva, 1964. (см. также перевод на русский: Д. Худсон, "Статистика для физиков", изд. МИР, Москва, 1970).
- [9] W.T. Radie, D. Dryard, P.F. James, M. Roos, "Statistical Methods in Experimental Physics", CERN, Geneva and University of Helsinki, North - Holland, Publishing Company, Amsterdam, London 1971.

- [10] В.С. Курбатов, А.А. Тяпкин, II приложение к русскому изданию книги [9], перевод с англ. под редакцией А.А. Тяпкина, Москва, Атомиздат, 1976.
- [11] R.Fletcher and M.J.D.Powell, Comput. J , 1963, v.6, p.163.
- [12] R.Fletcher and C.M.Reeves, Comput. J , 1964, v.7, p.149.
- [13] ALICE technical Design Report of the Photon Spectrometer (PHOS), CERN/LHCC 99-4, ALICE TDR 2, March 1999, Geneva.
- [14] W.E. Cleland, E.G. Stern, Nucl. Instr. and Meth. A338 (1994) 467. DOI: 10.1016/0168-9002(94)91332-3
- [15] С.М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, Издательство Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1976.
- [16] А.Папулис, "Signal Analysis" , (McCraw-Hill,1976), p.324.
- [17] А.Р. Цитович, "Ядерная электроника", Москва, Энергоиздат, 1984.
- [18] Ю.К. Акимов, О.В. Игнатъев, А.И. Калинин, В.Ф. Кушнирук, "Полупроводниковые детекторы в экспериментальной физике", Москва, Энергоиздат, 1989.
- [19] N.N.Fedyakin et all., Nucl. Instr. and Meth. A292 (1990) 450.
- [20] L. Kurchaninov, Nucl. Instr. and Meth. A374 (1996) 91.
- [21] R. Bock, CERN 60-30, Geneva, 1960.
- [22] M. Ippolitov, S. Beloglowsky, S. Burachas, V. Ikonnikov, A. Kuriakin, V. Lebedev, I. Makov, V. Manko, S. Nikulin, A. Nyanin, Yu. Saveliev, G. Tamulaitis, A. Tsvetkov, A. Vasiliev, Yu. Vinogradov, Nucl. Instr. and Meth. A537 (2005) 353. DOI: 10.1016/j.nima.2004.08.042

*Рукопись поступила 3 декабря 2019 г.*

Препринт отпечатан с оригинала-макета, подготовленного авторами.

Боголюбовский М.Ю. и др.

Амплитудно-временные измерения по дискретной выборке псевдогауссова сигнала.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**.

---

Подписано к печати 11.12.2019. Формат 60 × 84/16. Цифровая печать.  
Печ.л. 1,25. Уч.-изд.л. 1,7. Тираж 80. Заказ 14. Индекс 3649.

---

НИИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ  
142281, Московская область, г. Протвино, пл. Науки, 1

[www.ihep.ru](http://www.ihep.ru); библиотека <http://web.ihep.su/library/pubs/all-w.htm>

Индекс 3649

---

П Р Е П Р И Н Т 2019–11,  
НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ, 2019

---