



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
**«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»**  
Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова  
Национального исследовательского центра  
«Курчатовский институт»

Препринт 2022–7

В.А. Петров, Н.П. Ткаченко

**Кулон-ядерная интерференция: теория и  
практика для  $pp$ -рассеяния при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ**

Направлено в *Phys. Rev. D*

Протвино 2022

**Аннотация**

Петров В.А., Ткаченко Н.П. Кулон-ядерная интерференция: теория и практика для  $pp$ -рассеяния при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ: Препринт НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ 2022–7. – Протвино, 2022. – 30 с., 11 рис., библиогр.: 25.

Предоставлен подробный пересмотр теоретической основы для обработки кулон-ядерной интерференции (КЯИ) и соответствующий тщательный анализ процедуры извлечения основных параметров  $\rho$ ,  $\sigma_{\text{tot}}$  и  $B$  из экспериментальных данных коллаборации TOTEM при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. Более обоснованный способ обработки КЯИ, а также углубленный статистический анализ данных TOTEM при низких передаваемых импульсах дают результаты, которые отличаются от результатов, опубликованных TOTEM коллаборацией.

**Abstract**

Petrov V.A., Tkachenko N.P. Coulomb-Nuclear Interference: Theory and Practice for  $pp$ -Scattering at 13 TeV: NRC «Kurchatov Institute» – IHEP Preprint 2022–7. – Protvino, 2022. – p. 30, fig. 11, refs.: 25.

We provide a detailed reconsideration of the theoretical basis for the treatment of Coulomb-nuclear interference (CNI) and a corresponding thorough analysis of the procedure of extraction of the basic parameters  $\rho$ ,  $\sigma_{\text{tot}}$  and  $B$  from the TOTEM data at  $\sqrt{s} = 13$  TeV. A more substantiated account of CNI, as well as an in-depth statistical analysis of the TOTEM data at low transferred momenta, give results that differ from those published by the TOTEM collaboration.

## Введение

Измерения, проведенные коллаборацией LHC TOTEM при 13 ТэВ [1], вызвали ряд статей с оживленными дискуссиями<sup>1</sup>, часто с противоположными выводами. TOTEM коллаборация дает два значения параметра  $\rho$ :

$$\rho = \frac{\operatorname{Re} T_N(s, 0)}{\operatorname{Im} T_N(s, 0)} = 0.09 \text{ и } 0.1$$

с поразительно малой погрешностью<sup>2</sup>, менее 10%, хотя сами данные показывают большие систематические ошибки. Неожиданно низкое значение величины  $\rho$ , представленное коллаборацией TOTEM, побудило некоторых авторов рассматривать эти результаты как доказательство существования так называемого "максимального оддерона" (в частности, из работы [2], в которой  $\rho$  оценивалось как очень близкое к 0.1). Такая интерпретация была принята в [1] (правда, с некоторыми оговорками) в качестве первого экспериментального наблюдения "3-глюонного состояния".

Также было заявлено в [1], что такое низкое значение  $\rho$  наряду с упомянутым узким коридором ошибок, по их мнению "подразумевает исключение всех наилучших моделей, классифицированных и опубликованных" группой COMPETE [3].

Что касается достоверности утверждения о наблюдении оддерона, мы отсылаем читателя к [4] и [5], где приведено подробное обсуждение этой проблемы.

В настоящей работе мы сосредоточимся на двух важных вопросах извлечения параметров из данных.

- Прежде всего, это способ учета эффектов КЯИ в полной амплитуде рассеяния. Помимо упрощенного добавления кулоновского однофотонного обмена к ядерной амплитуде, что, очевидно, теоретически несостоятельно, мы находим в литературе два способа учета КЯИ.

Первый из них восходит к новаторской работе Н. Bethe и был значительно улучшен D.R. Yennie and G.V. West [6]. Идея состоит в том, что включение кулоновских обменов приводит к появлению дополнительной фазы в амплитуде рассеяния сильного взаимодействия. В течение нескольких десятилетий этот метод слу-

<sup>1</sup> Сам факт наличия двух значений для одной и той же величины сам по себе удивителен. Мы комментируем этот момент в выводах.

<sup>2</sup> Здесь  $T_N(s, t)$  обозначает амплитуду ядерного  $pp$ -рассеяния в отсутствие электромагнетизма. Как обычно,  $s$  означает квадрат энергии в системе центра масс, а  $t$  - квадрат инвариантной передачи импульса.

жил удобным феноменологическим инструментом для описания дифференциального сечения с учетом КЯИ и извлечения параметров, упомянутых выше (см., например, [8]).

Тем не менее, впоследствии он был раскритикован R.Cahn (а дюжиной лет позже более подробно V. Kundrať и M. Lokajicek) [9]. Было отмечено, что метод Bethe-Yennie-West требует, чтобы фаза амплитуды ядерного рассеяния  $T_N$  не зависела от передаваемого импульса, что является довольно ограничительным условием. Более того, как было недавно доказано [10], такая независимость даже в произвольно узком интервале приводит к одинаковому обращению в нуль этой амплитуды. Кроме того, в [11] отмечается, что форма кулоновской фазы, предложенная Yennie и West, противоречит общим свойствам аналитичности в  $t$ -канале.

В качестве замены метода Bethe-Yennie-West в [9] был предложен другой метод учета эффектов КЯИ, который не накладывает ненужных ограничений на фазу амплитуды ядерного рассеяния. Именно этот метод был принят в [1] для получения  $\rho$ -параметра и т.д., который привлек пристальное внимание.

Однако этот последний метод, который мы будем называть SKL (для Cahn-Kundrať-Lokajicek), также оказался ошибочным. Проблема заключалась, в частности, в чрезмерно упрощенном способе учета формфактора.

Формула, лишенная этого недостатка, была получена в [12], [13].

В дальнейшем мы используем выражение, основанное на этих статьях, для правильного учета эффектов КЯИ. Мы считаем, что он подходит для общего использования.

- Неожиданно низкое значение  $\rho$  было получено в [1] на основе анализа дифференциального сечения при низких значениях передаваемых импульсов. С этой целью были выбраны два массива данных. В частности, наборы экспериментальных данных у которых  $|t| \leq 0.15 \text{ ГэВ}^2$  и второй набор данных у которых  $|t| \leq 0.07 \text{ ГэВ}^2$ , хотя не было приведено никаких причин, по которым были взяты именно эти наборы экспериментальных данных.

Следуя [1], мы также используем при обработке данных ограничение по большим значениям  $|t|$ , но обнаруживаем, что вместе с ним необходимо также ввести ограничение экспериментальных данных с низкими значениями переданного импульса, и в разделе 3 мы мотивируем наш выбор таких ограничений. Значения параметров ( $\rho$ , полное сечение  $\sigma_{\text{tot}}$  и наклон  $B$  дифференциального сечения  $d\sigma/dt$ ),

полученные с помощью такой процедуры, оказываются отличными от заявленных этих параметров полученных в [1]. Что касается параметра  $\rho$ , мы обнаруживаем, что статистически обоснованный поиск неизбежно приводит к значительному расширению коридора ошибок, что имеет фундаментальное значение.

- Последний пункт, на который мы хотели бы обратить внимание, - это вопрос: в какой степени размазывание электрического заряда протона по его объему (воплощенное формфактором  $\mathcal{F}$ ) делает параметры  $\rho$  и т.д. отличными от идеализированного случая точечного заряда ( $\mathcal{F} = 1$ )? Ответ оказался довольно неожиданным и весьма полезным для оценки точности описания поперечного сечения в реалистичном случае.

## 1. Точная формула

Если мы предположим, как это обычно делается, что упругая  $S$ -матрица  $S_{C+N}(b)$  в пространстве параметров взаимодействия учитывает сильные и кулоновские взаимодействия<sup>3</sup>

$$S_{C+N}(b) = S_C(b)S_N(b).$$

В этом случае мы можем без особого труда получить следующую формулу для модуля полной амплитуды рассеяния  $T_{C+N}$  (для краткости мы в основном будем опускать явное указание "пассивного" параметра  $s$  в качестве аргумента)

$$|T_{C+N}|_{q \neq 0}^2 = 4s^2 S^C(q, q) + \int \frac{d^2 q'}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q''}{(2\pi)^2} S^C(q', q'') T_N(q - q') T_N^*(q - q'') + \\ + 4s \int \frac{d^2 q'}{(2\pi)^2} \text{Im} [S^C(q, q') T_N^*(q - q')], \quad (1)$$

где

$$S^C(q', q'') = \int d^2 b' d^2 b'' e^{iq'b' - iq''b''} e^{2i\alpha\Delta_C(b', b'')}, \\ \Delta_C(b', b'') = \frac{1}{2\pi} \int d^2 k \frac{\mathcal{F}^2(k^2)}{k^2} (e^{-ib''k} - e^{-ib'k}) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{F}^2(k^2) [J_0(b''k) - J_0(b'k)]$$

Тот факт, что мы имеем дело непосредственно с квадратом амплитудного модуля, а не с самой амплитудой, позволяет нам избежать хорошо известной ИК-расходимости, которая находится в фазе  $\text{Arg}(T_{C+N})$ , и, наряду с этим, опасных манипуляций с выражениями, которые расходятся при удалении ИК-регуляризации. Уравнение (1) и выражение для  $\Delta_C(b', b'')$  содержат только

<sup>3</sup> На самом деле это свойство не может быть точным и скорее имеет место при больших параметрах взаимодействия, что имеет прямое отношение к предмету настоящего обсуждения.

сходящиеся интегралы как в ИК, так и в УФ. В этой статье мы в основном используем вместо  $t$  более удобную переменную:

$$\mathbf{q}^2 \equiv q^2 \equiv q_{\perp}^2 = \frac{ut}{4p^2} = p^2 \sin^2 \theta, \quad s = 4p^2 + 4m^2.$$

которая отражает  $t - u$ -симметрию рассеяния  $pp$ . При  $\theta \rightarrow 0$   $q^2 \approx -t$ , в то время как при  $\theta \rightarrow \pi$   $q^2 \approx -u$ . Мы будем использовать одни и те же обозначения  $q$  как для 2-мерных векторов  $q$ , так и для их модулей  $|q|$ . В последнем случае пределы интегрирования указаны явно.

В уравнении (1) мы вводим условие  $q \neq 0$ , которое соответствует реальным экспериментальным условиям (рассеянный протон не может быть обнаружен произвольно близко к оси пучка). “Прямые” наблюдаемые понимаются как результат экстраполяции  $t \rightarrow 0$ :

$$\rho = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Re } T_N(s, t)}{\text{Im } T_N(s, t)} \quad \sigma_{\text{tot}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Im } T_N(s, t)}{2p\sqrt{s}} \quad B = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d[\ln(\frac{d\sigma_N}{dt})]}{dt}(s, t) \quad (2)$$

где

$$\frac{d\sigma_N}{dt} \left[ \frac{\text{mb}}{\text{GeV}^2} \right] = \frac{(\hbar c)^2}{16\pi s^2} |T_N|^2 \quad (\hbar c)^2 = 0.389379 [\text{mb} \cdot \text{GeV}^2]$$

Однако это не относится к выражениям, появляющимся в виде подынтегральных выражений, когда они вполне могут содержать такие члены, как  $\delta(\mathbf{q})$ .

Поскольку мы имеем дело с высокими энергиями и имеем в подынтегральных выражениях быстро уменьшающиеся ядерные амплитуды  $T_N(k^2)$  и формфакторы  $\mathcal{F}(k^2)$ , мы можем (по модулю исчезающе малых поправок) расширить интегрирование в  $|\mathbf{k}|$  (кинематически ограниченное  $\sqrt{s}/2$ ) по всему двумерному поперечному импульсному пространству. Преимуществом является удобная возможность свободно использовать прямые и обратные двумерные преобразования Фурье.

Обратите внимание, что “кулоновское ядро”  $S^C(q', q'')$  обладает простыми граничными свойствами

$$S^C(q', q'')|_{\alpha=0} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}') (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}'')$$

пока

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int S^C(q', q'') d^2 q' d^2 q'' = 1, \quad \forall \alpha.$$

В принципе, при применении к анализу данных можно было бы иметь дело непосредственно с уравнением (1), которое является точным выражением полного порядка (по  $\alpha$ ), свободным от особенностей.

Однако, в целом, вряд ли возможно получить явные и удобные для пользователя аналитические выражения с произвольными  $T_N$  и  $\mathcal{F}$ , которые позволили бы их удобное практическое использование.

Таким образом, на практике нам приходится иметь дело скорее с разложениями по константе тонкой структуры  $\alpha$ . Поскольку  $\alpha^2 \approx 5,3 \cdot 10^{-5}$  и  $\alpha^3 \approx 3,9 \cdot 10^{-7}$ , кажется, что мы можем справедливо ограничить наши соображения членами до  $\alpha^2$  включительно с возможной неопределенностью, не превышающей 1% в наихудшем случае<sup>4</sup>.

## 2. Дифференциальное сечение в $\mathcal{O}(\alpha^2)$ приближении

Как было сказано выше<sup>5</sup>, с нетривиальным формфактором выражение общего порядка для кулоновского ядра  $S^C(q', q'')$  является очень сложным и практически бесполезным<sup>6</sup>. Тем не менее, возмущающее разложение по  $\alpha$ , если сохранить по крайней мере члены до  $\alpha^2$  включительно, дает очень точную оценку  $S^C(q', q'')$  и, следовательно, дифференциального поперечного сечения.

Таким образом, мы будем использовать следующее разложение

$$S^C(q', q'')|_{\alpha=0} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}') (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}'') + 2i\alpha (2\pi)^3 \frac{\mathcal{F}^2(q'')}{q''^2} \delta(\mathbf{q}') - \frac{\mathcal{F}^2(q')}{q'^2} \delta(\mathbf{q}'') - \quad (3)$$

$$- 2\alpha^2 (2\pi)^2 \int d^2k d^2p \frac{\mathcal{F}^2(k^2) \mathcal{F}^2(p^2)}{k^2 p^2} [\delta(\mathbf{q}') \delta(\mathbf{q}'' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) - \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{q}'' - \mathbf{p}) -$$

$$- \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{p}) \delta(\mathbf{q}'' - \mathbf{k}) + \delta(\mathbf{q}'') \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})] + \dots$$

Разложение (3) позволяет нам получить следующее выражение для дифференциального поперечного сечения:

$$(\hbar c)^{-2} \frac{d\sigma_{C+N}}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2} |T_{C+N}|^2 = J_0 + \alpha J_1 + \alpha^2 J_2, \quad (4)$$

где

$$J_0 = \frac{|T_N|^2}{16\pi s^2},$$

$$J_1 = -\frac{\mathcal{F}^2(q)}{q^2} \frac{\text{Re} T_N}{s} - \frac{1}{8\pi^2 s^2} \int \frac{dk^2}{k^2} \mathcal{F}^2(k) dp^2 (-\lambda(q^2, k^2, p^2))_+^{-1/2} \text{Im}[T_N(q^2) T_N^*(p^2)],$$

$$J_2 = 4\pi \frac{\mathcal{F}^4(q^2)}{q^4} + \frac{1}{2\pi s q^2} \int \frac{dk^2 dp^2}{k^2 p^2} (-\lambda(q^2, k^2, p^2))_+^{-1/2} \cdot \quad (5)$$

$$\cdot [q^2 \text{Im} T_N(q^2) \mathcal{F}^2(k^2) \mathcal{F}^2(p^2) - k^2 \text{Im} T_N(k^2) \mathcal{F}^2(p^2) \mathcal{F}^2(q^2) - p^2 \text{Im} T_N(p^2) \mathcal{F}^2(k^2) \mathcal{F}^2(q^2)] +$$

$$+ \frac{1}{16\pi s^2 q^2 \pi^2} \text{Re} \int \frac{dk^2 \mathcal{F}^2(k^2) dp^2 \mathcal{F}^2(p^2) dk'^2 dp'^2}{k^2 p^2} \{(-\lambda(q^2, k^2, p^2))_+^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot [(-\lambda(q^2, k^2, k'^2))_+^{-1/2} T_N(k'^2) T_N^*(p'^2) - (-\lambda(q^2, k'^2, p'^2))_+^{-1/2} T_N(q^2) T_N^*(k'^2)]\}.$$

<sup>4</sup> См. Приложение C более подробно

<sup>5</sup> В этой статье мы используем символ  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  для обозначения (вероятно, с отклонением от стандартного математического использования) суммы первых  $n$  членов разложения Маклорена по  $\alpha$ .

<sup>6</sup> Это не относится к идеализированным электрически точечным протонам с  $\mathcal{F} = 1$ , см. Приложение B.

Функция  $(-\lambda(x, y, z))_+^{-1/2}$  с  $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$  симметрична по всем переменным и обладает свойством:

$$\lim_{x=0} (-\lambda(x, y, z))_+^{-1/2} = \pi \delta(y - z) \text{ и } \int dx (-\lambda(x, y, z))_+^{-1/2} = \pi$$

С очевидной цикличностью по  $x, y, z$ .

Напомним также определение обобщенной функции  $(-\lambda(x, y, z))_+^{-1/2}$  [15]

$$(-\lambda)_+^{-1.2} = \begin{cases} 0 & \text{для } \lambda \geq 0 \\ |\lambda|^{-1/2} & \text{для } \lambda < 0 \end{cases}$$

Свойства  $(-\lambda)_+^{-1.2}$  помогают проверить ИК-сходимость интегралов в приведенных выше формулах.

В дальнейшем мы используем феноменологическую и часто используемую параметризацию амплитуды сильного взаимодействия<sup>7</sup>

$$T_N(s, q^2) = s \sigma_{\text{tot}}(s) [i + \rho(s)] e^{-B(s)q^2/2} \quad (6)$$

В терминах этой параметризации (которая также была по существу использована ТОТЕМ коллаборацией в [1] для получения прямых параметров (2)) дифференциальное поперечное сечение (4) приобретает вид<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{C+N}}{dt} = & \frac{\sigma_{\text{tot}}^2 (1+\rho^2)}{16\pi(\hbar c)^2} e^{-B(s)q^2} - \alpha \frac{\rho \sigma_{\text{tot}}}{q^2} \mathcal{F}^2(q^2) e^{-\frac{B(s)q^2}{2}} + \\ & + \alpha^2 \left[ \frac{4 (\hbar c)^2}{q^4} \mathcal{F}^4(q^2) - \frac{\sigma_{\text{tot}}}{q^2} \mathcal{F}^2(q^2) e^{-\frac{B(s)q^2}{2}} H(q^2) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$H(q^2) = \ln \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} + 1 \right) - \sum_{k=1}^3 k^{-1} \left( 1 + \frac{q^2}{\Lambda^2} \right)^{-k} - \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\frac{B(s)\Lambda^2}{2}x} I_0(Bq\Lambda\sqrt{x})}{(1+x)^4} dx \quad (8)$$

В дальнейшем мы используем дипольную параметризацию формфактора  $\mathcal{F}^2(q^2) = (1 + q^2/\Lambda^2)^{-4}$  с  $\Lambda^2 = 0.71 \text{ ГэВ}^2$ .  $I_0(z)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

В отсутствие точного выражения для  $d\sigma_{C+N}/dt$  трудно судить о точности аппроксимации, заданной ур-ем (7).

<sup>7</sup> Такая амплитуда имеет фазу, не зависящую от передаваемого импульса  $q$ . Как было доказано в [10], если бы такое свойство было точным даже в произвольно малом, но фиксированном интервале  $q^2$ , это сделало бы амплитуду  $T_N(q^2)$  идентичной нулю. Мы предполагаем, что уравнение (6) выполняется только приблизительно при очень высоких энергиях.

<sup>8</sup> Ниже, перед первым членом уравнения (7), мы опускаем коэффициент  $1 + \mathcal{O}(\alpha^2) = 1.00004$ , предполагая, что он равен в точности 1.



Тем не менее, существуют некоторые средства для такой оценки. Дело в том, что в идеализированном случае “электрически точечных” протонов, т.е. если  $\mathcal{F} = 1$ , мы можем получить (см. Приложение В) точное выражение для  $d\sigma_{C+N}/dt$ , которое позволяет нам сравнивать точные и приближенные (до  $\alpha^2$  членов включительно) выражения. Это позволяет нам судить о том, насколько велика ошибка аппроксимации, по крайней мере, в идеализированном случае. Удивительно, но оказывается, что дифференциальное сечение с реалистичным формфактором чрезвычайно близко к таковому в точечном случае при низких значениях  $|t|$  мы рассматриваем. Таким образом, достаточно использовать оценку точности аппроксимации второго порядка в точечном случае, как это сделано в Приложении В. Отклонение от  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ -приближения из-за отсутствия члена  $\alpha^3$  не превышает доли процента (см. Приложение С).

В следующем разделе уравнения (7) – (8) будут использоваться для извлечения параметров  $\rho$ ,  $\sigma_{\text{tot}}$  и  $B$  из данных TOTEM при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ.

### 3. Обработки данных и извлечение параметров $\rho(s)$ , $\sigma_{\text{tot}}(s)$ и $B(s)$ из измерений TOTEM $d\sigma_{C+N}/dt$

Перед описанием обработки на основе уравнений (7), (8) мы выделим главные принципы наших процедур в использовании экспериментальных данных.

Коллаборация TOTEM измерила  $d\sigma/dt$  на интервале значений:

$$0.0008 \lesssim |t| \lesssim 0.2 \text{ [ГэВ}^2\text{]}.$$

Сразу возникает вопрос – можно ли использовать все эти точки при обработке или ряд точек с большим значением  $|t|$  надо отбросить, для того чтобы как можно лучше выполнялось условие  $|t| \rightarrow 0$  в определении извлекаемых параметров:

$$\rho(s, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Re } T_N(s, t)}{\text{Im } T_N(s, t)} \quad \sigma_{\text{tot}}(s, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Im } T_N(s, t)}{2p\sqrt{s}} \quad B(s, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d \left[ \ln \left( \frac{d\sigma_N}{dt} \right) \right]}{dt} (s, t)$$

Здесь нет никаких физических указаний о максимально допустимых значениях  $|t|$  у экспериментальных точек, использование которых допустимо при извлечении параметров. Коллаборация TOTEM отсекала часть данных с большими значениями  $|t|$  (двумя разными способами – см. [1]), но при этом совершенно не указывая причину по которой именно такие данные были отброшены. В силу этого нам не оставалось ничего другого как поэтапно и постепенно отсекал значения экспериментальных данных с большими значениями  $|t|$  и анализировать какие при этом получаются значения извлекаемых параметров. Для описания этой процедуры мы в дальнейшем используем термин *параметр отсечения*  $t_0 > 0$ , который обозначает что

при обработке данных выбрасываются все экспериментальные данные для которых выполнено условие  $|t| > t_0$ .

Априори нет ясности и в том, какие данные можно использовать с очень низкими значениями  $|t|$ , при которых ядерный вклад становится пренебрежимо малым по сравнению с кулоновским вкладом и таким образом делает невозможным точное извлечение указанных параметров из-за пренебрежимо малого вклада ядерной составляющей на фоне огромного кулоновского. Этот вопрос мы тоже затронем в дальнейшем.

В работе [14] мы уже обсуждали описанное выше поведение параметров при отсутствии корреляций между данными. Поэтому в этой работе мы, напротив, используем корреляции между экспериментальными точками везде где это возможно в соответствие с экспериментальными результатами приведенными TOTEM в работе [1]. Использование корреляций ведется стандартным способом с использованием весовой матрицы (получаемой из экспериментальных данных) при составлении выражения для суммарного значения  $\chi_{\Sigma}^2 \equiv \chi^2$ .

Везде при анализе извлекаемых параметров мы использовали только результаты с высоким уровнем доверительности, у которых PValue не меньше 0.85.

Результаты приведены в Приложении D1, D2, D3.

Однако, как будет показано ниже, использование стандартного способа с весовой матрицей не дает удовлетворительного результата. Получаются значения параметров с высоким уровнем доверительности, но теоретическая кривая с этими значениями параметров проходит систематически ниже центральных экспериментальных значений  $d\sigma/dt$ , что свидетельствует о завышенной (заниженной) оценке систематических погрешностей. Такой систематический сдвиг был назван "*Peele's Pertinent Puzzle*" (PPP) (см. [16]). Поэтому полученные таким образом значения параметров следует воспринимать как оценочные, а не как окончательные. Численные и графические результаты такого способа извлечения параметров приведены в Приложении D1.

Характерным результатом отсечения экспериментальных точек по значению  $t_0$ , является тот факт что значения параметров стабилизируются на отрезке данных:

$$0.01 \lesssim t_0 \lesssim 0.05 \text{ [ГэВ}^2\text{]},$$

и имеют на этом отрезке практически одинаковые ошибки.

Вне этого отрезка эти свойства не выполняются. Справа от него они нестабильны и имеют низкий уровень доверительности, а слева они кроме нестабильности своих значений (и не всегда высокого уровня доверительности) имеют еще и резко возрастающие ошибки.

Систематическое прохождение теоретической кривой ниже экспериментальных точек побудило нас применить метод сдвига экспериментальных данных, широко применяемый при обработке экспериментальных данных с большими систематическими ошибками.

Но этот сдвиг можно осуществлять двумя разными способами. Мы проводили эту сдвижку двумя способами.

**Первый способ сдвига экспериментальных данных:** сдвигаются центральные значения экспериментальных данных на величину, пропорциональную систематической ошибке каждой точки, предполагая, что коэффициент пропорциональности одинаков и равен  $\lambda$  для всех точек. В этом случае функция  $\chi^2$  составляется таким же способом как и в случае отсутствия корреляций, только вместо измеренной экспериментальной точки используется сдвинутая точка и полагается что полная ошибка равна просто статистической ошибке. Но в этом случае к этому выражению добавляется так называемая штрафная функция:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{Y^{\text{th}}(x_i) - [Y^{\text{exp}}(x_i) + \lambda \Delta Y_{\text{syst}}(x_i)]}{\Delta Y_{\text{stat}}} \right]^2 + \lambda^2,$$

где слагаемое  $\lambda^2$  - и есть штрафная функция для  $\chi^2$ , возникающей в статистике вследствие сдвига экспериментальных данных по систематическим ошибкам. Т.е. мы сдвигаем экспериментальные значения вверх или вниз на величину их систематических ошибок с определенным коэффициентом  $|\lambda| \leq 1$ , одинаковым для все экспериментальные точки. В этом случае мы оставляем в знаменателе выражения для  $\chi^2$  только статистическую погрешность измеряемой величины. Коэффициент  $\lambda$  в этом случае сам по себе является фитируемым параметром.

Отметим что фитирование в этом случае не должно приводить к существенному отличию от способа рассмотренного выше. Аналогично предыдущему методу проводилось поэтапное отсечение экспериментальных данных. Фитирование проводилось с использованием тех же формул (7) и (8).

Численные и графические результаты такого способа извлечения параметров приведены в Приложении D2.

**Второй способ сдвига экспериментальных данных:** в этом варианте центральные значения смещаются на величину, пропорциональную самому (измеренному) центральному значению, предполагая, что коэффициент пропорциональности  $\lambda > 0$  одинаков для всех точек. В этом случае функция  $\chi^2$  составляется способом, аналогичным предыдущему, только штрафная функция запишется несколько иначе:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{Y^{\text{th}}(x_i) - \lambda Y^{\text{exp}}(x_i)}{\Delta Y_{\text{stat}}} \right]^2 + \left( \frac{\lambda - 1}{0.055} \right)^2,$$

причем  $\lambda$  одинакова для всех точек массива используемых экспериментальных данных. Второй член справа - это штрафная функция для  $\chi^2$ , которая возникает в статистике в результате сдвига экспериментальных данных в этом конкретном случае. Такой вид штрафной функции обусловлен методом сдвига и тем фактом, что все систематические ошибки равны 0.055 от дифференциального поперечного сечения. То есть мы сдвигаем экспериментальные значения вверх ( $\lambda > 1$ ) или вниз ( $0 < \lambda < 1$ ) на величину, пропорциональную самому измеренному значению. Ясно, что в этом случае коэффициент  $\lambda$  должно быть положительным и близким к единице. Мы предполагаем, что этот коэффициент одинаков для всех экспериментальных точек. Как и в первом способе в выражении для  $\chi^2$  в качестве полной ошибки мы используем только статистическую погрешность измеренного значения. Разумеется что как и в предыдущем случае множитель  $\lambda$  сам по себе является фитируемым параметром.

Фит в этом случае не должно приводить к значениям параметров, существенно отличающимся от фита с использованием весовой матрицы.

Фит проводилось по тем же формулам (7) и (8). Результаты показаны в Приложении D3.

Таким образом мы имеем следующие варианты извлеченных параметров полученных тремя разными способами:

$$\rho = 0.10 \pm 0.01, \quad \sigma_{\text{tot}} = 110.3 \pm 1.8 \text{ [mb]}, \quad B = 20.87 \pm 0.35 \text{ [ГэВ}^{-2}\text{]}.$$

$$\rho = 0.10 \pm 0.01, \quad \sigma_{\text{tot}} = 109.5 \pm 1.6 \text{ [mb]}, \quad B = 21.02 \pm 0.26 \text{ [ГэВ}^{-2}\text{]}.$$

$$\rho = 0.11 \pm 0.01, \quad \sigma_{\text{tot}} = 107.6 \pm 1.7 \text{ [mb]}, \quad B = 21.15 \pm 0.55 \text{ [ГэВ}^{-2}\text{]}.$$

Эти результаты чрезвычайно близки друг к другу и фактически неразличимы с учетом своих ошибок. Казалось бы, на этом можно и закончить. Тем более что два метода смещения экспериментальных результатов дают не только практически неотличимые результаты с прекрасной достоверностью, но и соответствуют практически одинаковому сдвигу экспериментальных данных. Причем этот сдвиг соответствует систематическому сдвигу теоретической кривой относительно исходных данных, полученный первым способом.

Но у каждого из этих результатов есть свои недостатки: первый метод дает систематический сдвиг теоретической кривой относительно экспериментальных значений, а два других метода основаны на сдвиге экспериментальных данных, что вообще говоря не совсем корректно – экспериментальные данные трогать крайне нежелательно.

И, пожалуй, главный недостаток этих трех методов состоит в том что извлеченные параметры опираются и на ряд экспериментальных точек с очень низкими значениями  $|t|$ , фит по которым дает неустойчивые значения параметров и имеющие в своем большинстве низкую достоверность. Как правило это экспериментальные точки у которых  $|t| < 0.01 \text{ ГэВ}^2$ . Это

навело нас на мысль провести фит экспериментальных данных, исключив эти точки (разумеется исключая, как и выше, экспериментальные точки у которых  $|t| > 0.05 \text{ ГэВ}^2$  и у которых не наблюдается стабильность результатов). Причем фит проводился с использованием весовой матрицы, извлекаемой и экспериментальных данных TOTEM.

Результаты получились следующие.

$$\left( \begin{array}{rllll} \rho = & \mathbf{0.099311} & \pm & \mathbf{0.0384101} & [ ] & \mathbf{0.01} & < |t| < & \mathbf{0.05} & & [\text{GeV}^2] \\ \sigma_{\text{tot}} = & \mathbf{111.78} & \pm & \mathbf{2.18484} & [\text{mb}] & & \chi^2_{\Sigma} = & & \mathbf{31.6917} & \\ \mathbf{B} = & \mathbf{20.8551} & \pm & \mathbf{0.0933167} & [\text{GeV}^{-2}] & \text{DoP} = & \mathbf{40} & \chi^2_{\Sigma}/\text{DoP} = & \mathbf{0.792292} & \\ & & & & & \text{NoF} = & \mathbf{37} & \chi^2_{\Sigma}/\text{NoF} = & \mathbf{0.856532} & \\ & & & & & & & \text{PValue} = & \mathbf{0.568153} & \\ & & & & & & & & & \mathbf{F(|t|) \equiv (1-t/\Lambda^2)^{-2}} \end{array} \right)$$

$$(d\sigma/dt)_{pp} \quad \text{at} \quad \sqrt{s} = \mathbf{13} \quad [\text{TeV}]$$

$$\text{Correlation matrix [\%]} = \begin{pmatrix} & \rho & \sigma_{\text{tot}} & \mathbf{b} \\ \rho & \mathbf{1.} & \mathbf{-0.134383} & \mathbf{0.866296} \\ \sigma_{\text{tot}} & & \mathbf{1.} & \mathbf{-0.111545} \\ \mathbf{B} & & & \mathbf{1.} \end{pmatrix}$$

**The minimum number of decimal places to hold in the correlation matrix = 1;**

**Minimum number of decimal places for the parameter  $\rho = 2$  ;**

**Minimum number of decimal places for the parameter  $\sigma_{\text{tot}} = 1$  ;**

**Minimum number of decimal places for the parameter  $\mathbf{b} = 2$  ;**

Рис. 1. Краткое описание параметров и характеристик фита. Указано минимальное количество знаков после запятой, которые необходимо сохранить в значениях параметров и весовой матрицы для правильного их использования в приложениях, что подробно описано в [17].

Результат получается мало отличными от описанных выше, за исключением того что параметр  $\rho$  получил огромную ошибку – почти 40% от своего значения. Два остальных параметра остались практически неизменными от полученных выше значений (с учетом ошибок).

Однако этот результат избавлен от всех недостатков, свойственным первым трем способам и имеет высокую степень достоверности – более 50%.

Теоретическая кривая идеально проходит по экспериментальным точкам (рис. 8) на интервале фитирования. Более того – она очень хорошо соответствует экспериментальным данным и по более широкому набору экспериментальных точек, что хорошо видно из рис. 9.

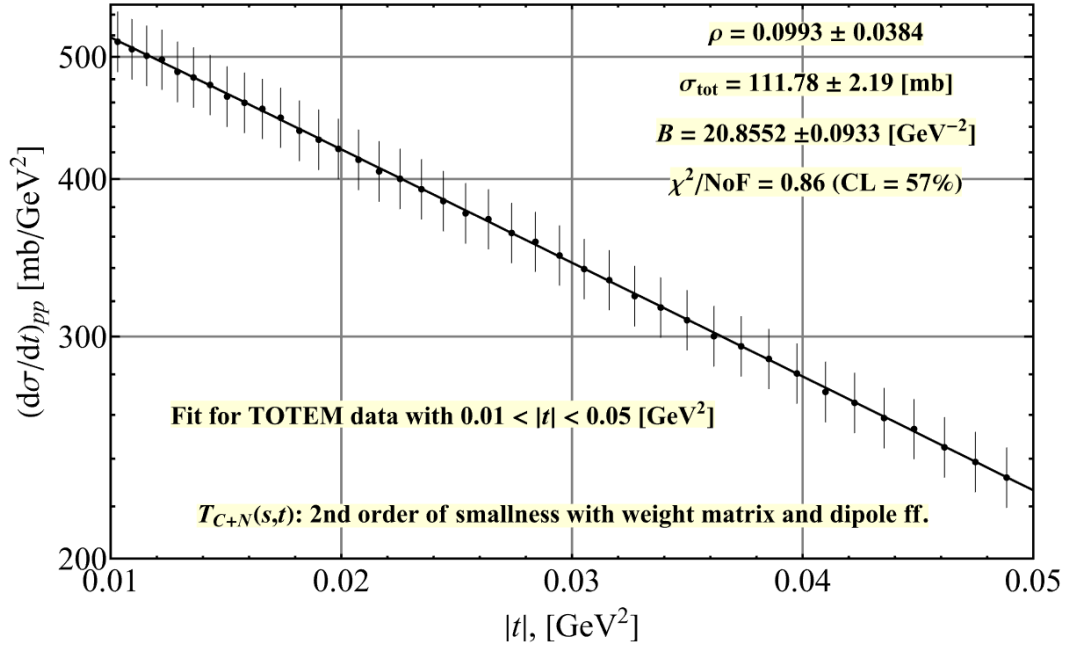


Рис. 2. Результаты фита экспериментальных данных на интервале  $0.01 \lesssim |t| \lesssim 0.05$  [ГэВ<sup>2</sup>], с использованием весовой матрицы. Шкала для  $d\sigma/dt$  логарифмическая. Указаны полные ошибки, извлеченные из корреляционной (весовой) матрицы. Видно, что в этом случае нет регулярного сдвига теоретической кривой относительно центральных экспериментальных точек, в отличие от подгонки по полному массиву (с весовой матрицей) как в первом варианте обработки.

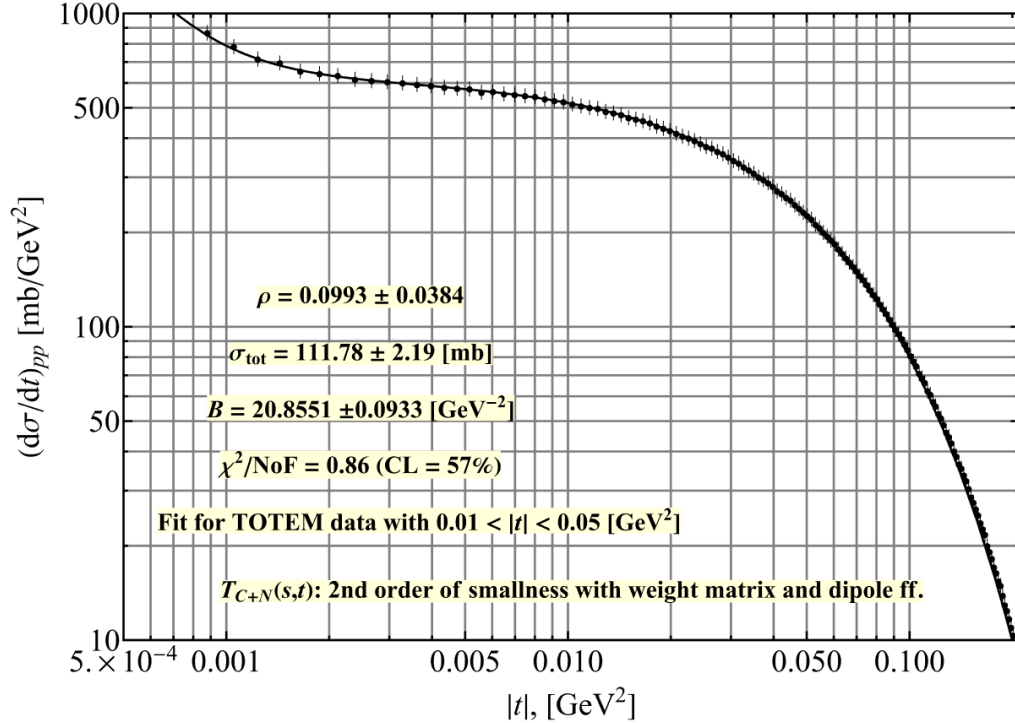


Рис. 3. Теоретическое описание полных данных ТОТЕМ кривой  $d\sigma/dt$  при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. Фит соответствует интервалу экспериментальных точек у которых  $0.01 \lesssim |t| \lesssim 0.05$  [ГэВ<sup>2</sup>].

Все сказанное дает нам основания считать последний способ обработки экспериментальных данных наиболее правильной процедурой. При этом следует важнейший вывод о том что параметр  $\rho$  не определяется с высокой точностью из экспериментов TOTEM, можно только говорить о том что он лежит в пределах

$$0.061 < \rho < 0.138$$

А это не является основанием для исключения описания моделями COMPETE и другими далеко идущими выводами.

## Выводы и заключение

В настоящей работе было проведено всестороннее обсуждение различных методов извлечения параметра  $\rho$  из экспериментальных результатов совместной работы TOTEM при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ.

Теоретически обоснованные формулы, уравнения (4) – (5) и, для некоторой общей формы для  $T_N$  (ур-ие 6), уравнения (7) – (8), которые позволяют нам описать данные для малых значений  $q^2 (|t|)$ .

Показано, что для статистически обоснованного извлечения параметра  $\rho$  из экспериментальных данных [1] нужно учитывать только точки, удовлетворяющие условию  $0.01 < |t| < 0,05$  ГэВ<sup>2</sup>. Следовательно, хотя значение  $\rho$  остается близким к 0.1, его среднеквадратичная ошибка увеличивается, в отличие от результата TOTEM (10%), почти до 40%.

По этой причине мы считаем преждевременным делать вывод, как это делали авторы многих работ, что значение параметра  $\rho$  было определено коллаборацией TOTEM при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ очень точно, а именно как  $\rho = 0,09 \pm 0,01$  (из массива экспериментальных данных у которых  $|t| \leq 0,07$  ГэВ<sup>2</sup>).

Также преждевременно делать далеко идущие физические выводы, основанные на этих измерениях, такие как существование оддерона или, по крайней мере, его значительный вклад в наблюдаемые величины.

*Вышесказанное также дает нам основание считать необоснованным вывод о неправильных прогнозах [3] COMPETE, заявленных в [1].*

Ниже мы приводим краткое изложение конкретных численных значений основных параметров, полученных и обсужденных в этой статье.

I

С использованием выражения IR (7) – (8) для дифференциального поперечного сечения  $d\sigma_{C+N}^{pp}/dt$ , которое правильно учитывает (в приближении  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ) кулоновский вклад, мы извлекли из данных TOTEM [1] следующие значения трех важных параметров при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ:

$$\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 111.8 \pm 2.2 \text{ [mb]}, \quad B^{pp} = 20.86 \pm 0.09 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad \rho = 0.10 \pm 0.04, \quad (9)$$

$$0.01 \lesssim |t| \lesssim 0.05 \text{ ГэВ}^2.$$

II

Чтобы проверить влияние размазывания электрического заряда по объему протона, мы рассмотрели идеализированный случай “электрически точечных протонов” (единичный формфактор) ( $\mathcal{F} = 1$ ) и получили следующий результат:

$$\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 111.8 \pm 2.2 \text{ [mb]}, \quad B^{pp} = 20.86 \pm 0.09 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad \rho = 0.10 \pm 0.04, \quad (10)$$

$$0.01 \lesssim |t| \lesssim 0.05 \text{ ГэВ}^2.$$

Это практически совпадает<sup>9</sup> с (9). Что может означать совпадение двух наборов (9) и (10)?

Размазывание электрического заряда внутри протона ограничено физическим размером протона (его валентного ядра, ответственного за формфактор при малом  $t$ ), который составляет (в поперечной проекции) около 0.6 [фм] [18]. Область физического взаимодействия равна  $(2B)^{1/2}$ . При  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ средний размер области взаимодействия составляет около 1.3 fm. Согласно такому рассуждению, собственным размером протона вряд ли можно пренебречь по сравнению со средним радиусом взаимодействия. Хотя можно было бы утверждать, что формфакторы по существу близки к 1 при рассматриваемом  $t$ , мы наблюдаем, что в нашем доверительном интервале  $0.01 < |t| < 0.05 \text{ ГэВ}^2$  значения  $\mathcal{F}^2$  и  $\mathcal{F}^4$  могут измениться на 10% и 25% соответственно. Кроме того, формфакторы также вводят интегралы в уравнении (5), где они принимают все значения от 1 до 0. Конечно, разница между точечными и реальными протонами могла бы вполне проявиться, если бы нас интересовали экспериментальные данные с более высокими значениями  $|t|$ .

III

Теперь мы должны сравнить наши результаты (9)<sup>10</sup> с опубликованными значениями [1], полученными на основе другого теоретического требования [9] для результатов CNI<sup>11</sup>:

$$\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 110.5 \pm 2.4 \text{ [mb]}, \quad B^{pp} = 21.78 \pm 0.06 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad \rho = 0.09 \pm 0.01, \quad (11)$$

$$|t| < 0.07 \text{ ГэВ}^2$$

<sup>9</sup> Уравнения (9) и (10) на самом деле отличаются более высокими десятичными дробями, но это, конечно, не имеет большого значения.

<sup>10</sup> Чем это приближение отличается от точного подхода, показано в Приложении А.

<sup>11</sup> Из двух наборов параметров, приведенных в [1], мы сохраняем только тот, который соответствует верхнему пределу  $t_0 = 0.07 \text{ ГэВ}^2$ , поскольку стабилизация, обсуждаемая в разделе 4, имеет место при  $t_0 < 0,1 \text{ ГэВ}^2$ .



Обратите внимание, что параметры  $\sigma_{\text{tot}}^{pp}$  и  $B^{pp}$  обоих наборов мало отличаются (.1%) как по центральным значениям, так и по ошибкам. Однако значения  $\rho$  довольно сильно различаются, как по величине, так и по ошибкам. Разница составляет 10% для центрального значения и 30% для диапазона ошибок.

На первый взгляд, наш результат (9) выглядит вполне обычно, будучи, с точки зрения  $\rho$ , близким к TOTEM-результату, равному (11) (хотя такая разница может иметь существенную физическую причину). Однако концептуально важным моментом является то, что такое расширение коридора ошибок в уравнении (9) по сравнению с уравнением (11) ”возвращает на повестку дня” ряд моделей (дающих  $0.12 < \rho < 0.14$ , см., например, [19]), которые отклоняются авторами [1] .

Напомним, что в этой статье мы использовали в качестве ядерной амплитуды  $T_N$  вариант (6), который, хотя и широко используется в литературе (включая публикацию TOTEM [1]), строго говоря, не является полностью удовлетворительным<sup>12</sup> из-за  $t$ -независимости его от фазы<sup>13</sup>.

Мы также должны заметить, что значения  $\rho$ , полученные с помощью разных моделей  $T_N$ , неизбежно различаются. Такой полутеоретический характер  $\rho$ -параметра был осознан в течение длительного времени, но никогда не изучался систематически.

Мы надеемся продолжить изучение этих важных вопросов в предстоящих исследованиях.

## Благодарности

Мы благодарны Владимиру Ежеле, Анатолию Лиходеду, Jan Kačpar, Vojtech Kandr`at за их интерес к этой работе и вдохновляющие беседы и переписку. Мы благодарим В.Ю. Рубаева за ценную помощь.

## Приложение А. О разнице между $\alpha$ -разложениями точного выражения для $d\sigma_{C+N}/dt$ и приближением СКЛ.

Как уже упоминалось выше, схема СКЛ имеет два недостатка.

Начнем с того, что учет формфактора в формуле для полной амплитуды  $T_{C+N}$  предполагался упрощенным способом, отличным от точного варианта. Более того, при использовании

<sup>12</sup> Это не касается (4) - (5), которые носят общий характер.

<sup>13</sup> Важность  $t$ -зависимости фазы амплитуды сильного взаимодействия рассматривалась в ссылках [20], [10].

разложения в  $\alpha$  СКЛ [9] сохраняют в  $T_{C+N}$  только член первого порядка. Поскольку это приближение затем используется в  $|T_{C+N}|^2 \sim d\sigma_{C+N}/dt$ , необходимо либо использовать только  $\mathcal{O}(\alpha)$ -приближение также в  $d\sigma_{C+N}/dt$  (что в конечном итоге приведет к абсурдной ситуации), либо, чтобы быть математически корректным, сохранить  $\alpha^2$ -член уже в амплитуде. В противном случае в  $d\sigma_{C+N}/dt$  отсутствует член второго порядка по  $\alpha$ .

Нетрудно сохранить  $\alpha^2$ -член в  $\alpha$ -разложении  $T_{C+N}^{CKL}$  (игнорируя вышеупомянутую ошибку с учетом формфактора), и это то, что мы сделали, чтобы сравнение между двумя схемами лучше отражало суть вопроса. Таким образом, модифицированное полное сечение СКЛ (т.е. скорректированное с сохранением  $\alpha^2$ -члена в полной амплитуде) отличается от  $\alpha$ -разложения точного выражения (4), (5) на величину:

$$\delta\left(\frac{d\sigma_{C+N}}{dt}\right) = \frac{d\sigma_{C+N}}{dt} - \frac{d\sigma_{C+N}^{CKL}}{dt}$$

который имеет место во втором порядке только в  $\alpha$  и выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{d\sigma_{C+N}}{dt}\right) &= \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{2\pi s q^2} \int \frac{dk^2 dp^2}{k^2 p^2} (-\lambda(q^2, k^2, p^2))_+^{-1/2} \cdot \\ &\cdot \{q^2 \text{Im}T_N(q^2)[\mathcal{F}^2(k^2)\mathcal{F}^2(p^2) - \mathcal{F}^2(q^2)] - k^2 \text{Im}T_N(k^2)[\mathcal{F}^2(p^2)\mathcal{F}^2(q^2) - \mathcal{F}^2(k^2)] - \\ &\quad - p^2 \text{Im}T_N(p^2)[\mathcal{F}^2(q^2)\mathcal{F}^2(k^2) - \mathcal{F}^2(p^2)]\} + \\ &+ \frac{\alpha^2}{4\pi(\hbar c)^2 s^2 (2\pi)^2} \int \frac{d^2k d^2p}{k^2 p^2} [\mathcal{F}^2((k+p)^2) - \mathcal{F}^2(k^2)\mathcal{F}^2(p^2)] \text{Re}[T_N(q^2)T_N^*((q-k-p)^2)] \end{aligned}$$

В точном пределе  $\mathcal{F} \rightarrow 1$  приведенные выше интегралы оказываются равными нулю, а приближение СКЛ (с поправкой на удержание  $\alpha^2$ -члена в амплитуде) эквивалентно нашим формулам.

Декремент также был бы равен нулю, если бы амплитуда в  $T_{C+N}^{CKL}$  отличалась от  $T_{C+N}$  только на фазовый коэффициент<sup>14</sup>. В этом случае амплитуды были бы физически эквивалентны. Однако, как мы видим, это не так.

В общем случае декремент ведет себя при малом  $q^2$  как

$$\delta\left(\frac{d\sigma_{C+N}}{dt}\right) \cong \frac{\alpha^2}{16\pi} \left\{ \left[ \ln\left(\frac{\Lambda^2}{q^2}\right) - \frac{11}{6} - A\left(\frac{B\Lambda^2}{2}\right) \right]^2 \frac{\sigma_{\text{tot}}^2}{(\hbar c)^2} + 64\pi\mathcal{F}^2(q^2) \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\Lambda^2} \right\}$$

где

$$A(z) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-zx}}{x(1+x)^4} dx = C + \frac{z^2 - 4z + \text{Ei}(-z)e^z(z^3 - 3z^2 + 6z - 6)}{6} + \ln z.$$

<sup>14</sup> Под полными амплитудами  $T_{C+N}$  мы подразумеваем здесь амплитуды после разложения на множители ИК-расходящейся части фазы регуляризованной амплитуды с фиктивной "массой фотона"

В своем выступлении на семинаре Low-x 2021 на Эльбе [22] К. Остерберг представил сравнение нашего подхода (как объяснено совсем недавно в [13]) с приближенной схемой SKL [9] (принятой в [1]) с суровым приговором (на основе статьи [23]):

“новая формула CNI от Петрова... терпит неудачу”.

Отношение  $\frac{d\sigma_{C+N}^{SKL}}{d\sigma_{C+N}^1}$  показало отклонение (4%) от единицы (в области низкого  $t$ ), что было ошибочно квалифицировано как провал нашего подхода [12], [13].

Чтобы прояснить ситуацию, давайте, в свою очередь, оценим сравнительное качество величины  $d\sigma_{C+N}^1/dt$  ТОТЕМ, и выражения SKL  $d\sigma_{C+N}^{SKL}/dt$  [1], [9]. На рис. 7 мы показываем (аналогично тому, что было сделано в [23]) соотношения  $(d\sigma/dt - ref)/ref$ , где мы принимаем в качестве эталонного значения  $ref$  наше выражение в уравнении. (7) в то время как для  $d\sigma/dt$  мы принимаем  $d\sigma_{C+N}^{SKL}/dt$  и  $d\sigma_{C+N}^1/dt$ :<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} \text{Ratio 1} &= \frac{d\sigma_{C+N}^{SKL}}{d\sigma_{C+N}} - 1 = \\ &= \alpha^2 \left\{ \frac{\sigma_{\text{tot}}^2 e^{-Bq^2} \left[ A \left( \frac{B\lambda^2}{2} \right) - \ln \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} \right) + \frac{11}{6} \right]^2}{16\pi(\hbar c)^2} + \frac{4\mathcal{F}^2(q^2)\sigma_{\text{tot}} \ln \left( \frac{q^2}{\Lambda^2} + 1 \right) e^{-Bq^2/2}}{q^2} \right\} \\ &\quad \underline{\hspace{10em}} \\ &\quad \quad \quad d\sigma_{C+N}/dt \\ \\ \text{Ratio 2} &= \frac{d\sigma_{C+N}^1}{d\sigma_{C+N}} - 1 = \\ &= \alpha^2 \left\{ \frac{\sigma_{\text{tot}}^2 (1 + \rho^2) e^{-Bq^2} \left[ A \left( \frac{B\lambda^2}{2} \right) - D \right]^2}{16\pi(\hbar c)^2} + \frac{\mathcal{F}^2(q^2)\sigma_{\text{tot}} L(q^2) e^{-Bq^2/2}}{q^2} \right\} \\ &\quad \underline{\hspace{10em}} \\ &\quad \quad \quad d\sigma_{C+N}/dt \end{aligned}$$

Отклонение от исходных значений, как показано на рис. 7 демонстрирует, что учет членов  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  в амплитуде становится все более и более существенным с уменьшением  $|t|$ . Отсюда их влияние на непосредственно наблюдаемые, прежде всего на  $\rho$ -параметр.

Как объяснить очевидное несоответствие двух соотношений на рис.10 в отношении учета  $\alpha^2$ -членов? Если две амплитуды различаются только по фазам, они могут существенно отличаться по форме амплитуды. Тем не менее, они дают один и тот же результат для полного

<sup>15</sup> с  $d\sigma_{C+N}/dt$  из уравнения(7) и

$$L(q^2) = \ln \left( \frac{\Lambda^2}{q^2} + 1 \right) - \sum_{i=1}^3 k^{-1} \left( \frac{q^2}{\Lambda^2} + 1 \right)^{-k}$$

сечения, как во всех порядках, так и при сохранении нескольких членов в  $\alpha$ -разложении. Однако, если мы имеем дело с физически неэквивалентными амплитудами, результаты могут существенно отличаться. В частности, неэквивалентные амплитуды по-разному реагируют на включение более высоких порядков в  $\alpha$ . То, с чем мы имеем дело в нашем случае, - это очевидная физическая неэквивалентность двух рассматриваемых модулей амплитуды.

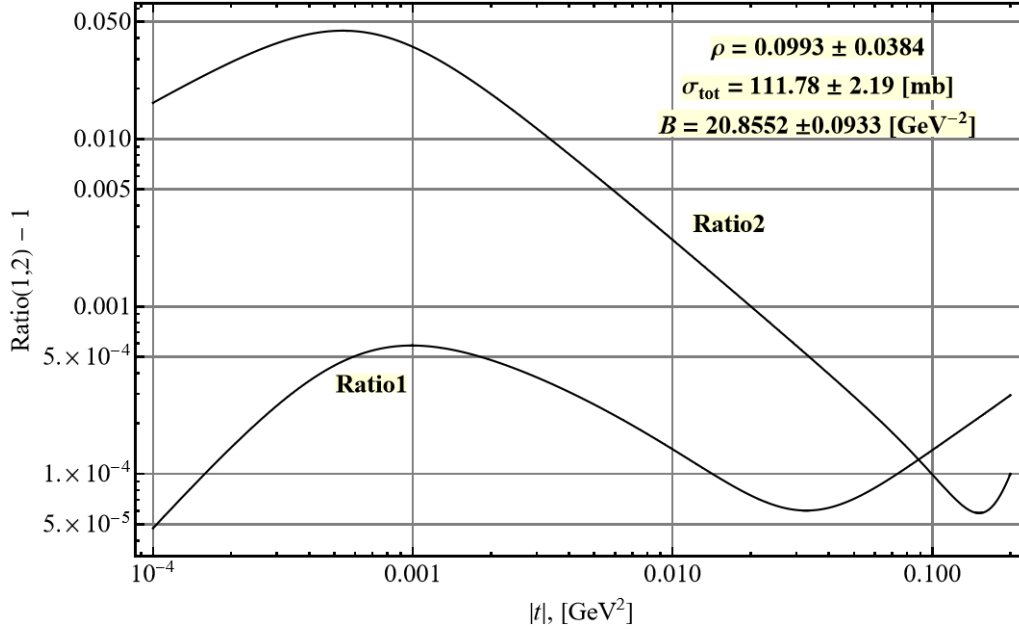


Рис. 4: Сравнительное качество выражений  $\frac{d\sigma_{C+N}^1}{d\sigma_{C+N}}$  и  $\frac{d\sigma_{C+N}^{CKL}}{d\sigma_{C+N}}$  (которые сохраняют только члены первого порядка в  $\alpha$  в амплитуде  $T_{C+N}$ ) с учетом опорного полного сечения  $d\sigma_{C+N}/dt$  (уравнение (7)) с полным учетом членов  $\alpha^2$ .

## Приложение В. Точечные электрические заряды.

Мы считаем поучительным рассмотреть идеализированный случай ”электрически точечных” протонов с  $\mathcal{F} = 1$ . В этом случае можно получить явные выражения в общем виде (без разложения в ряд).

В случае ”электрически точечных” протонов, т.е. если  $\mathcal{F} = 1$ , мы имели бы компактное явное выражение для кулоновского ядра  $S^C(q', q'')$ , выраженное в терминах хорошо известных обобщенных функций, описанных, например, в [15]:

$$S^C(q', q'') = (4\pi\alpha)^2 \frac{(q''^2/q'^2)^{i\alpha}}{(q'^2/q''^2)}$$

Физически использование такого приближения было бы оправдано, если бы средний параметр удара между сталкивающимися протонами был намного больше, чем ”радиус заряда” протона. Если (с некоторой оговоркой) мы примем за среднее поперечное расстояние между

центрами сталкивающихся протонов значение  $\sqrt{2B(s)} \approx (b^2)^{1/2}$ , где  $B(s)$  - наклон вперед, то оно превышает (при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ) размер “валентного ядра” ( $\approx 0,63$  fm) [18] только в два раза.

Тем не менее, в конце этого раздела мы проанализируем такой вариант в сравнении с данными TOTEM, чтобы впоследствии, при использовании реалистичного формфактора ( $\mathcal{F} \neq 1$ ) позволяет лучше увидеть влияние размазывания электрического заряда протона.

Уравнения (2) и (3) позволяют преобразовать уравнение (1) в выражение полного порядка по  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{C+N}}{dt} = & \frac{\sigma_{\text{tot}}^2 (1+\rho^2)}{16\pi(\hbar c)^2} e^{-B(s)q^2} |\Gamma(1+i\alpha) \cdot {}_1F_1(i\alpha, 1; z)| - \\ & - \frac{\alpha\sigma_{\text{tot}}}{q^2} e^{-\frac{B(s)q^2}{2}} \text{Re} \left\{ (\rho - i) \text{Exp} \left[ -i\alpha \ln \left( \frac{Bq^2}{2} \right) \right] \Gamma(1+i\alpha) \cdot {}_1F_1(i\alpha, 1; z) \right\} + \alpha^2 \frac{4\pi(\hbar c)^2}{q^4} \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  ${}_1F_1(i\alpha, 1; z)$  вырожденная гипергеометрическая функция<sup>16</sup> (см. Chapter 9.21 in [24]). При энергиях до 13 ТэВ и  $q^2 = -t < 0,05$  ГэВ<sup>2</sup> значения  $z = B(s)q^2/2$  порядка 0,5 или меньше. При таком  $z$  функция  $\Gamma(1+i\alpha) \cdot {}_1F_1(i\alpha, 1; z)$  чрезвычайно близка к 1 и исчерпывающе аппроксимируется следующим выражением

$$\Gamma(1+i\alpha) \cdot {}_1F_1(i\alpha, 1; z) = 1 + i\alpha f(z) - \alpha^2 g(z)$$

где<sup>17</sup>

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n n!} - c, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \psi(n)}{n n!} + \frac{c^2}{2} + \frac{\pi^2}{12}.$$

С учетом выражений (4) и (5) мы получаем следующее выражение для дифференциального сечения

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{C+N}}{dt} \left[ \frac{\text{mb}}{\text{GeV}^2} \right] = & \frac{\sigma_{\text{tot}}^2 (1+\rho^2)}{16\pi(\hbar c)^2} e^{B(s)t} - \alpha \frac{\rho\sigma_{\text{tot}}}{|t|} e^{B(s)t/2} + \\ & + \alpha^2 \left\{ \frac{4\pi(\hbar c)^2}{t^2} - \frac{\sigma_{\text{tot}}}{|t|} e^{\frac{B(s)t}{2}} [f(z) - \ln z] + \frac{\sigma_{\text{tot}}^2 (1+\rho^2)}{16\pi(\hbar c)^2} e^{B(s)t} [f^2(z) - 2g(z)] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Мы полагаем  $z = \frac{B(s)q^2}{2} = \frac{Bq^2}{2} = -\frac{B(s)t}{2} = \frac{B|t|}{2}$ .

Давайте воспользуемся уравнением (12) для описания тотемных данных в области кулоновско-ядерной интерференции. Мы опускаем повторение нескольких шагов, подобных тем, которые описаны в случае реалистичных формфакторов, и показываем конечный результат. Мы также не включаем графики, которые практически идентичны тем, которые имеют дипольный формфактор.

<sup>16</sup>  ${}_1F_1(i\alpha, 1; z) = \frac{1}{\Gamma(i\alpha)\Gamma(1-i\alpha)} \int_0^1 dx e^{zx} x^{i\alpha-1} (1-x)^{-i\alpha}$

<sup>17</sup>  $c = 0,5772156649\dots$  – Постоянная Эйлера и  $\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n n!}$

Итак, значения трех стандартных параметров, полученные в результате описания данных в предположении о “электрически точечных протонах” ( $\mathcal{F} = 1$ ), следующие:

$$\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 111.8 \pm 2.2 \text{ [mb]}, \quad B^{pp} = 20.85 \pm 0.09 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad \rho = 0.10 \pm 0.04, \\ 0.01 \lesssim |t| \lesssim 0.05 \text{ ГэВ}^2.$$

Мы должны подчеркнуть, что использование  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ -приближения представляется практически равным использованию точного выражения (11) (см. ур-ие для точного выражения (11) (более подробно см. ур-ие (17)).

При анализе значений параметров  $\rho$ ,  $\sigma_{\text{tot}}$ ,  $B$  следует обратить внимание, что, несмотря на то, что мы игнорируем влияние формфактора, результаты почти совпадают с результатами, полученными с полным учетом формфактора.

В приложении А мы отметили, что схема СКЛ (при исправлении с включением члена второго порядка в амплитуду) в точечном пределе (при  $\mathcal{F} = 1$ ) идентична нашим, т.е. правильная. Здесь, однако, мы берем для сравнения исходное выражение для амплитуды в точечном случае [9].

Амплитуда СКЛ 1-го порядка для точечного электрического заряда имеет вид

$$\hat{T}_{C+N}^{CKL}|_{\mathcal{F}=1} = T_N(q^2) - \frac{8\pi\alpha s}{q^2} + i\alpha \int_0^{p^2} \frac{dk^2}{k^2} [T_N(q^2) - \bar{T}_N(q^2)]$$

Или в явном виде:

$$\hat{T}_{C+N}^{CKL} = T_N(q^2) - \frac{8\pi\alpha s}{q^2} + i\alpha T_N(q^2) \left[ \ln\left(\frac{Bp^2}{2}\right) + c - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{Bq^2}{2}\right)^n}{n n!} \right] \quad (14)$$

и мы окончательно получаем:

$$\frac{d\hat{\sigma}_{C+N}^{CKL}}{dt}\Big|_{\mathcal{F}=1} = \frac{\sigma_{\text{tot}}^2}{16\pi(\hbar c)^2} e^{-Bq^2} - \alpha \frac{\rho\sigma_{\text{tot}}}{q^2} e^{Bq^2/2} + \\ + \alpha^2 \left\{ \frac{4\pi(\hbar c)^2}{q^4} - \frac{\ln\left(\frac{Bp^2}{2}\right) + c - \psi\left(\frac{Bq^2}{2}\right)}{q^2} \sigma_{\text{tot}} e^{-\frac{Bq^2}{2}} + \frac{\sigma_{\text{tot}}^2 e^{-Bq^2}}{16\pi(\hbar c)^2} \left[ \ln\left(\frac{Bp^2}{2}\right) - \psi\left(\frac{Bq^2}{2}\right) \right]^2 \right\}$$

Если мы возьмем уравнение для  $\frac{d\hat{\sigma}_{C+N}^{CKL}}{dt}\Big|_{\mathcal{F}=1}$  для подгонки данных, мы получим следующий результат для наших основных параметров

$$\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 111.81 \pm 1.75 \text{ [mb]}, \quad B^{pp} = 20.76 \pm 0.30 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad \rho = 0.2740 \pm 0.0098, \quad (15) \\ |t| \lesssim 0.015 \text{ ГэВ}^2.$$

В этом случае кривая дифференциального сечения систематически проходит ниже центральных значений экспериментальных точек (эффект PPP, см. [16]), что, как и прежде, указывает на то, что систематические ошибки переопределены. Однако значение  $\rho$ -параметра оказывается неожиданно высоким. Это, вероятно, указывает на неполный учет членов второго порядка в  $\alpha$ . Тем не менее, значения  $\sigma_{\text{tot}}$  и  $B$  оказываются вполне совместимыми (в пределах погрешности) с ранее полученными значениями.

Таким образом, мы видим, что точечный предел в соответствии с [9] приводит к значениям основных параметров уравнения (15), отличным от значений в случае дипольного формфактора, см. уравнение (11). Однако это в основном касается параметра  $\rho$ , в то время как два других, по-видимому, мало чувствительны к изменению учета формфактора.

Как и выше, мы также произвели подгонку по наиболее конфиденциальному интервалу значений экспериментальных данных, т.е. при  $0.01 \lesssim |t| \lesssim 0.05 \text{ ГэВ}^2$ . В этом случае кривая проходит идеально относительно экспериментальных точек, параметры  $\sigma_{\text{tot}}$  и  $B$ , как и везде выше, демонстрируют завидную стабильность, в то время как  $\rho$ -параметр претерпевает значительные изменения, оставаясь, однако, необычно высоким.

$$\sigma_{\text{tot}}^{pp} = 112.36 \pm 2.18 \text{ [mb]}, \quad B^{pp} = 20.54 \pm 0.06 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad \rho = 0.2356 \pm 0.0032, \quad (16)$$

$$0.01 \lesssim |t| \lesssim 0.05 \text{ ГэВ}^2.$$

Однако мы хотели бы еще раз указать, что формула (14) является результатом неправильной манипуляции с расходящимися интегралами и, следовательно, содержит УФ-логарифмы, которые неестественны для задач, связанных с дифракцией и кулоновско-ядерной интерференцией, как уже указывалось ранее в [12].

## Приложение С. Расширение в $\alpha$ : где остановиться?

Здесь мы приводим некоторые комментарии по поводу использования разложения по константе тонкой структуры  $\alpha$  в узком смысле, т.е. применительно к конкретной проблеме, рассматриваемой в тексте.

Что касается общего мнения о КЭД как теории возмущений, существует убеждение, что ряд в  $\alpha$  не сходится и должен рассматриваться как асимптотический из-за пресловутой неаналитичности константы связи в начале координат. Это не исключает того, что некоторые части амплитуд будут иметь сходящееся разложение в  $\alpha$ , в то время как неаналитические члены имеют незначительное значение (например,  $\exp(-c/\alpha)$ ,  $c > 0$ ). Это именно то, что мы имеем в уравнении (1), где разложение по  $\alpha$  имеет бесконечный радиус сходимости, и мы молчаливо предполагали отсутствие неаналитических членов.

Однако на практике, когда кто-то имеет дело с усеченным рядом по  $\alpha$ , необходимо оценить ошибку используемого усечения ряда, т.е. оценить значение отброшенных членов. Вполне может случиться так, что для некоторых значений дополнительных параметров (в наших случаях и  $t$ ) приближение оправдано, в то время как для других оно вообще не может рассматриваться как "приближение". В последнем случае, как правило, приходится учитывать больше членов по параметрам разложения.

В качестве простого примера рассмотрим упрощенный учет точечного кулоновского взаимодействия, когда полная амплитуда рассеяния задается следующим образом

$$T_{C+N}(s, t) = T_N(s, t) + T_C(s, t) = T_N(s, t) + \alpha \frac{8\pi s}{t}$$

Если (просто для иллюстрации) мы возьмем параметры из Заключения и пренебрежем значением  $\rho$ , то получим, что второй "корректирующий" член при "критическом значении"  $|t| = 6.4 \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}^2$  становится равным "основному", а затем при меньшем  $|t|$  превосходит его. Отметим, что наименьшее значение  $|t|$ , достигнутое коллаборацией TOTEM (при  $\sqrt{s} = 13 \text{ ТэВ}$ ), составляет  $|t| = 8.79 \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}^2$ . Это уже сигнал о том, что необходимо учитывать хотя бы второй порядок в  $\alpha$ . В то же время при  $|t| = 10^{-2} \text{ ГэВ}^2$  использование кулоновского члена первого порядка вполне оправдано и составляет около 6% от основного члена  $T_N$ .

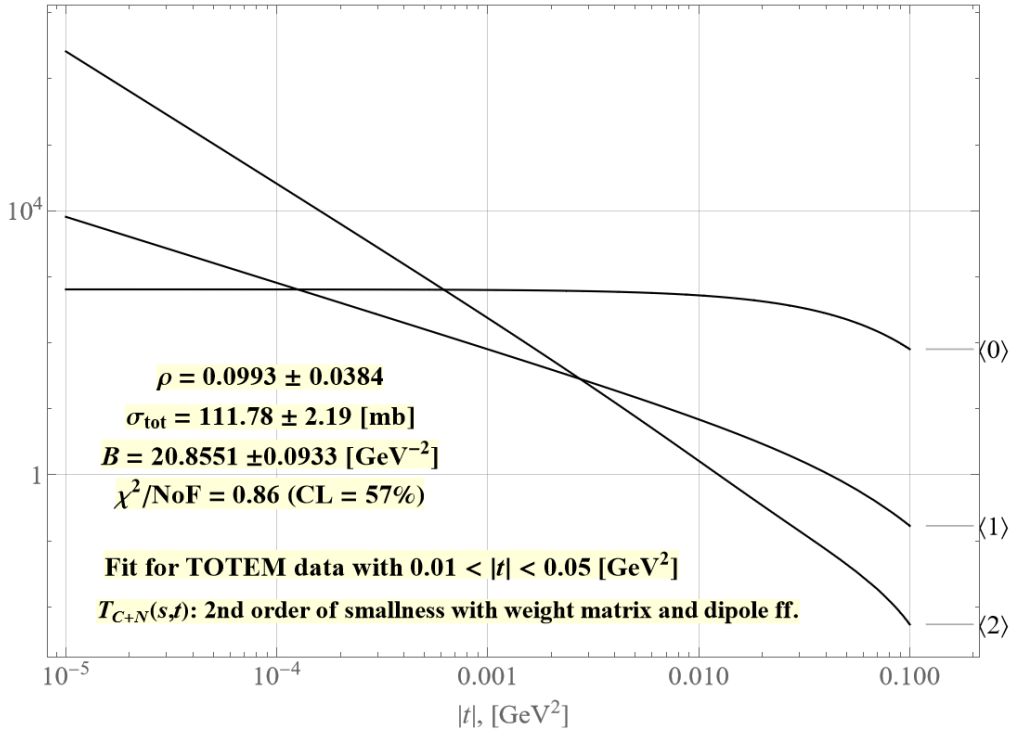


Рис. 5: Вклады различных порядков  $\alpha$  в  $d\sigma_{C+N}/dt$ .



Конечно, в более реалистичных случаях критические значения  $|t|$  могут отличаться, но вывод один и тот же: вес членов в  $\alpha$ -разложении ”работает” совместно с  $|t|$ .

На рис. 8 показано, что для  $|t| > 0.003 \text{ ГэВ}^2$  мы получаем ”естественный” порядок (мы обозначаем  $n$ -й порядок как  $\langle n \rangle$ ), т.е.

$$\langle 0 \rangle > \langle 1 \rangle > \langle 2 \rangle$$

При  $6 \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}^2 < |t| < 3 \cdot 10^{-3} \text{ ГэВ}^2$  порядок нарушается:

$$\langle 0 \rangle > \langle 2 \rangle > \langle 1 \rangle$$

И, наконец, при  $|t| < 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}^2$  ”естественный” порядок нарушается еще больше, фактически меняется на противоположный:

$$\langle 2 \rangle > \langle 1 \rangle > \langle 0 \rangle$$

Это обстоятельство побуждает нас проверить ошибку, определяемую остаточным членом разложения в ряд в  $\alpha$ , который в данном случае фактически является выражением

$$\delta_3 \frac{d\sigma_{C+N}}{dt} = -\alpha^3 \frac{\rho\sigma_{\text{tot}} e^{-\frac{Bq^2}{2}}}{q^2} \left[ \frac{3}{2} \ln^2 \left( \frac{2}{Bq^2} \right) - \ln \left( \frac{2}{Bq^2} \right) \left( C + \frac{1}{2} - Bq^2 \right) - \frac{\pi^2}{12} \right] \quad (17)$$

Используя параметры из ур-ия (9), мы убедились, что ошибка не превышает доли процента от полного выражения во всем диапазоне экспериментально доступных значений  $t$ .

Таким образом, для  $10^{-4} < |t| < 5 \cdot 10^{-2} \text{ ГэВ}^2$  более высокие порядки в  $\alpha$  вполне безвредны, и использование уравнения (7) вполне оправдано.

Приложение D1. Критерий  $\chi^2$  с использованием весовой матрицы.

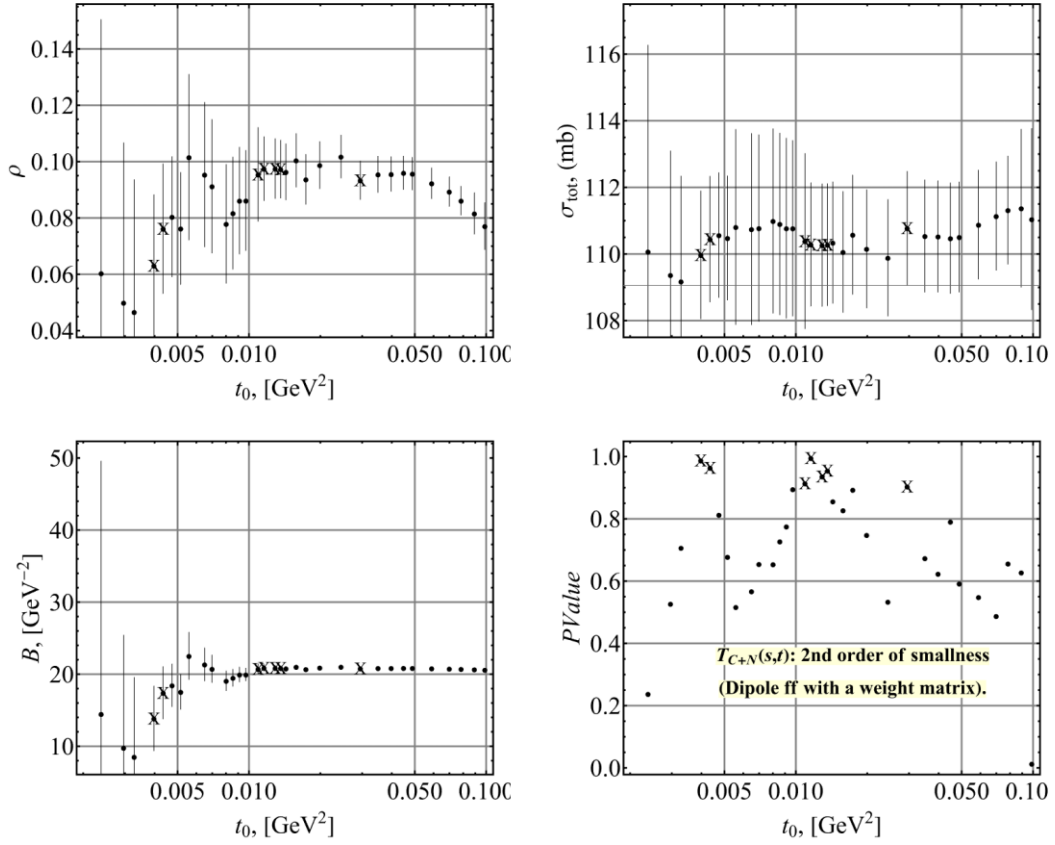


Рис. 6. Значения параметров как функции параметра отсечения  $t_0$ . Точки со значениями  $P\text{value} > 0,9$  (высокий уровень доверительности) отмечены крестиками.

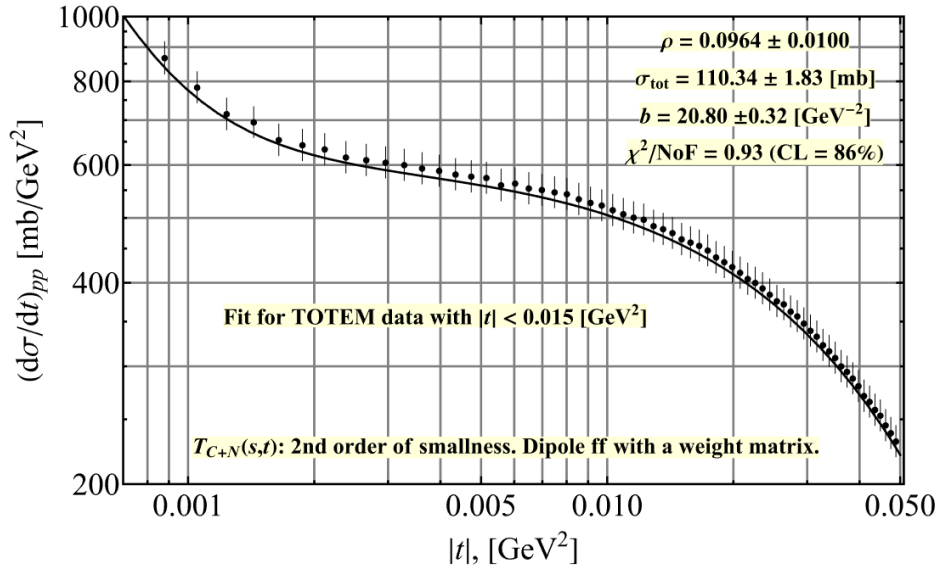


Рис. 7. Результаты подгонки данных [1] при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ при  $|t| \leq t_0 = 0.015$  ГэВ<sup>2</sup>. Теоретическая кривая систематически проходит ниже экспериментальных значений ("эффект PPP"). Полные ошибки были получены с использованием корреляционной матрицы.

$$\rho = 0.10 \pm 0.01, \quad \sigma_{\text{tot}} = 110.3 \pm 1.8 \text{ [mb]}, \quad B = 20.87 \pm 0.35 \text{ [ГэВ}^{-2}\text{]}.$$

Приложение D2. Критерий  $\chi^2$  с использованием "метода сдвига экспериментальных данных" (вариант 1).

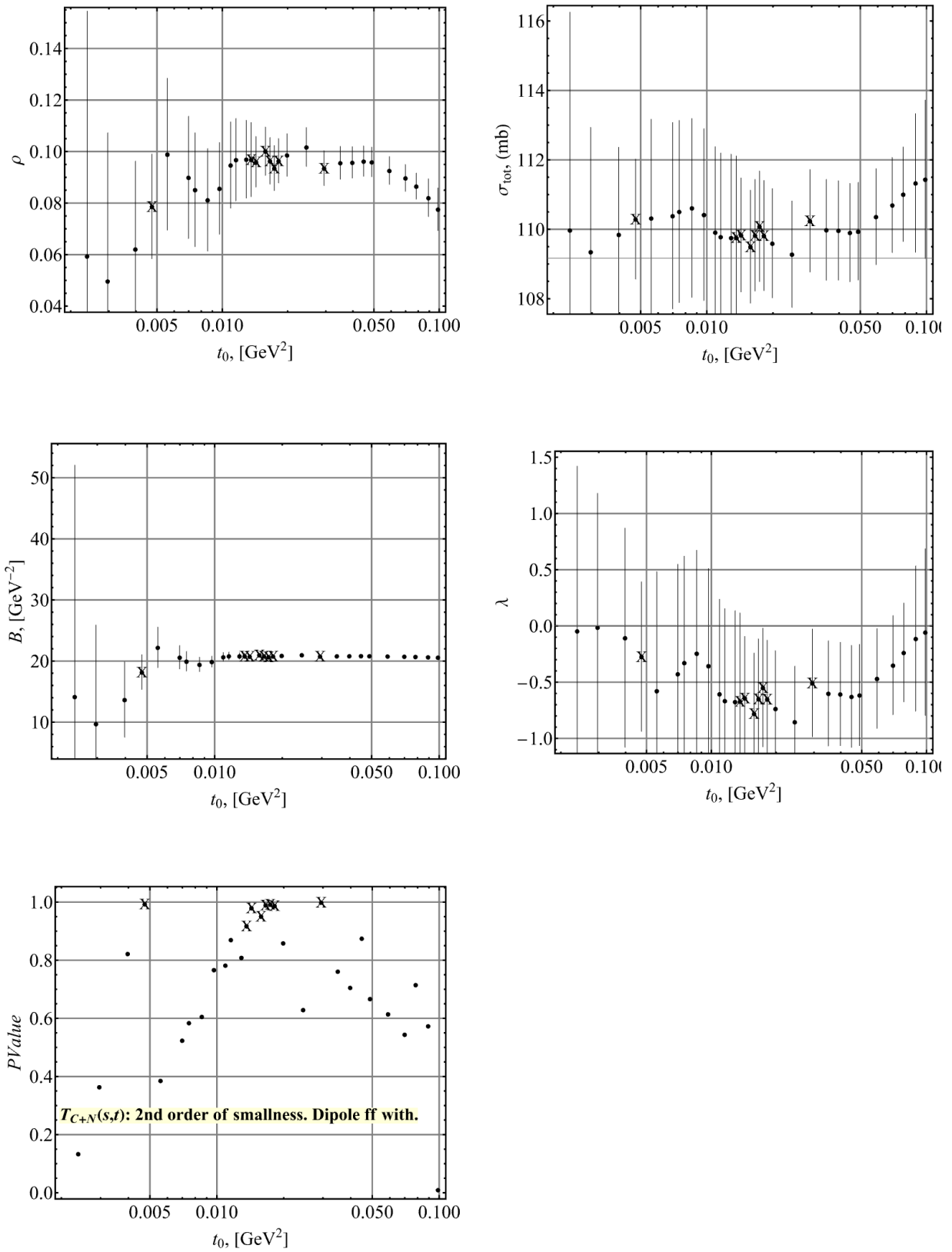


Рис. 8. Значения параметров для различных значений отсечки экспериментальных данных  $t_0$ . Точки со значением  $P$ value  $\geq 0.9$  (высокий уровень достоверности) отмечены крестиками.

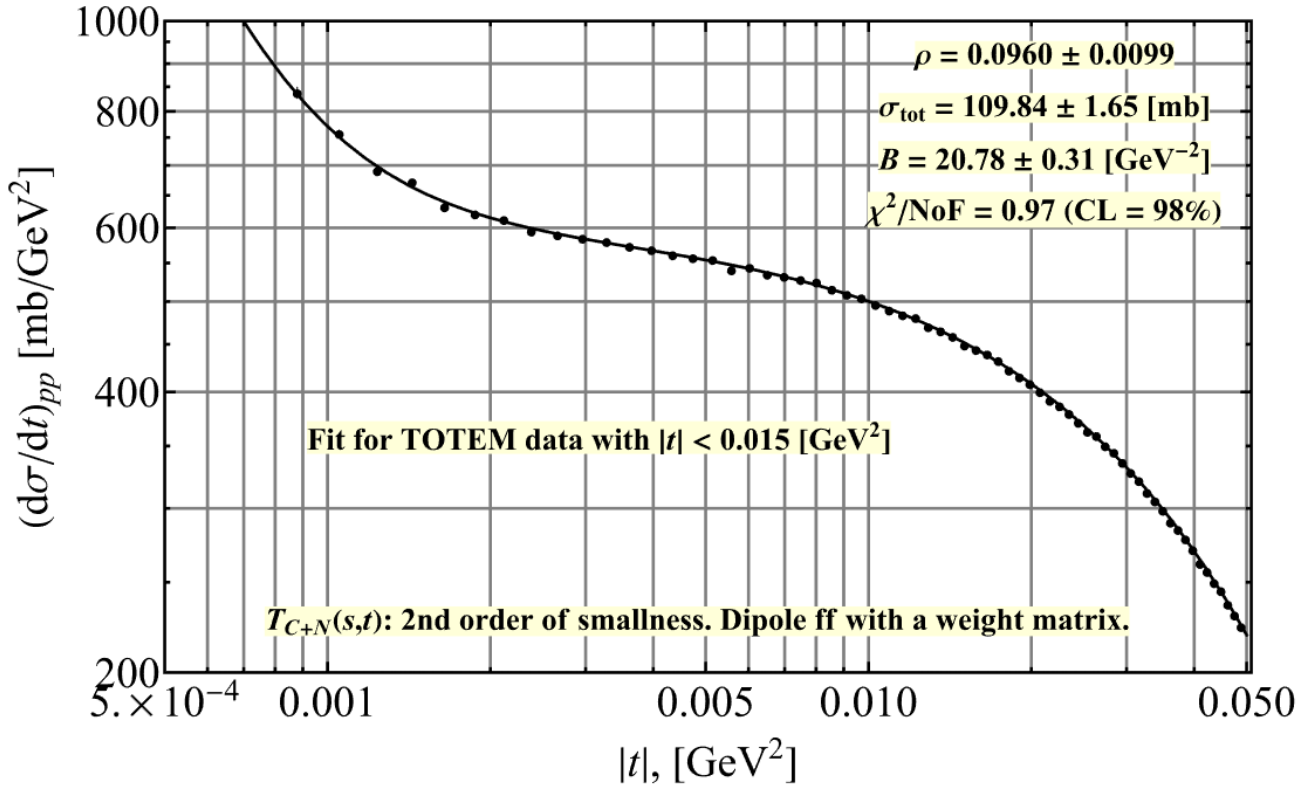


Рис. 9. Результаты фита экспериментальных данных при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ с  $|t| < t_0 = 0,015$  ГэВ<sup>2</sup>. Указаны только статистические ошибки (которые в данном масштабе практически неразличимы).

Здесь мы имеем (см. рис. 3) пять точек с очень высоким уровнем достоверности, и чем больше точка лежит влево, тем больше она удовлетворяет определению наших основных параметров, приведенных в уравнениях (2).

Таким образом, значения параметров с учетом погрешностей не противоречат их одинаковым значениям для малых и больших значений отсечки. В интервале  $0.01 < t_0 < 0.05$  ГэВ<sup>2</sup> мы наблюдаем стабильность параметров, извлеченных из фитирования, и по этой причине мы используем тот же метод для выбора конкретного результата, что и в предыдущем случае, т.е. мы берем фит, соответствующий при  $t_0 = 0.015$  ГэВ<sup>2</sup>. Результаты этой подгонки показаны на рис. 4.

Извлеченные таким образом параметры следующие:

$$\rho = 0.10 \pm 0.01, \quad \sigma_{\text{tot}} = 109.5 \pm 1.6 \text{ [mb]}, \quad B = 21.02 \pm 0.26 \text{ [ГэВ}^{-2}\text{]}.$$

Кривая с извлеченными параметрами фитирования идеально проходит по экспериментальным точкам, однако последние все смещены вниз с коэффициентом  $\lambda = -0.64106$  от своей систематической ошибки (отрицательный знак указывает на сдвиг вниз).

Приложение D3. Критерий  $\chi^2$  с использованием метода сдвига экспериментальных данных” (вариант 2).

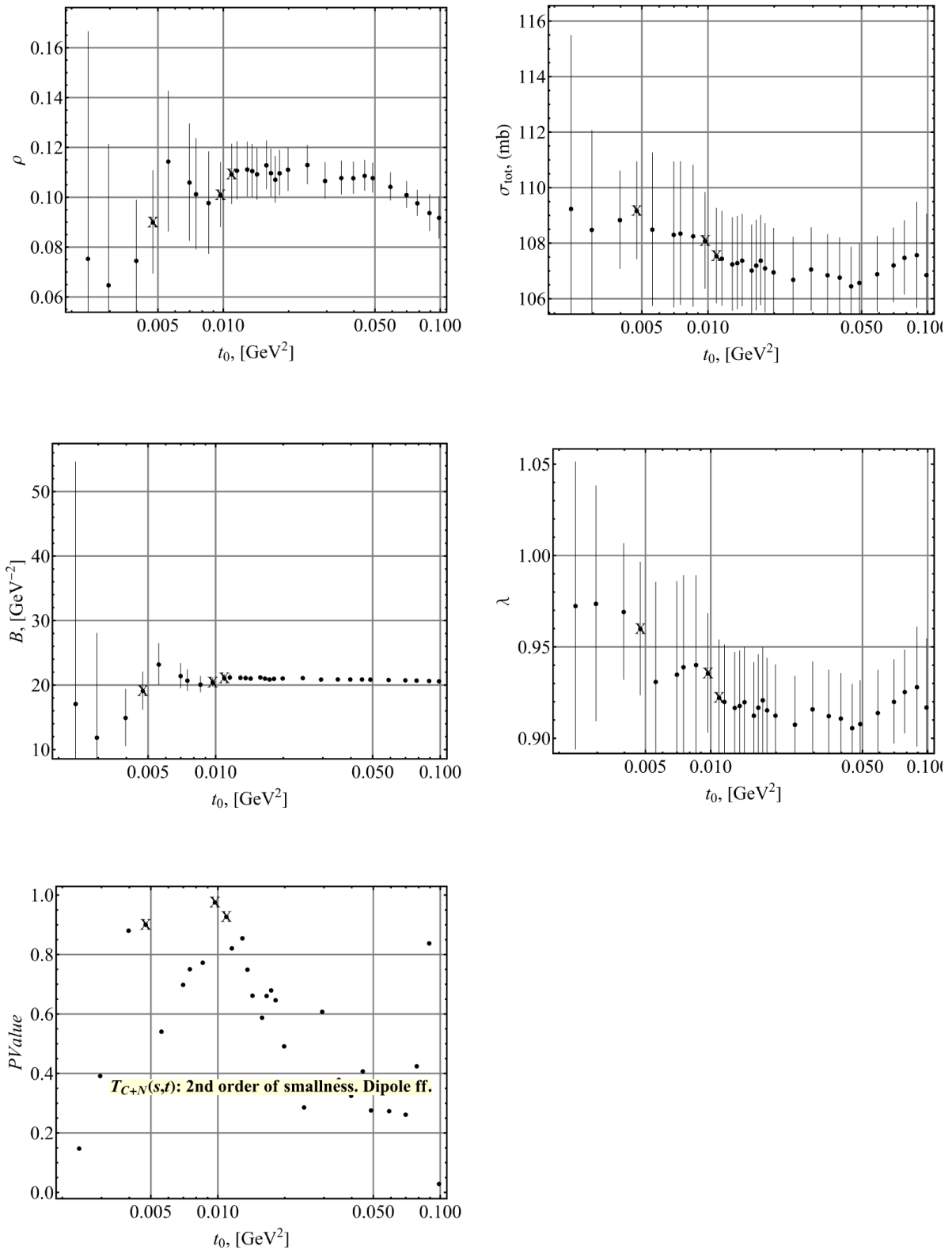


Рис. 10. Значения параметров для различных значений отсечки экспериментальных данных  $t_0$ . Точки со значением  $P$  value  $\geq 0.9$  (высокий уровень доверительности) отмечены крестиками.

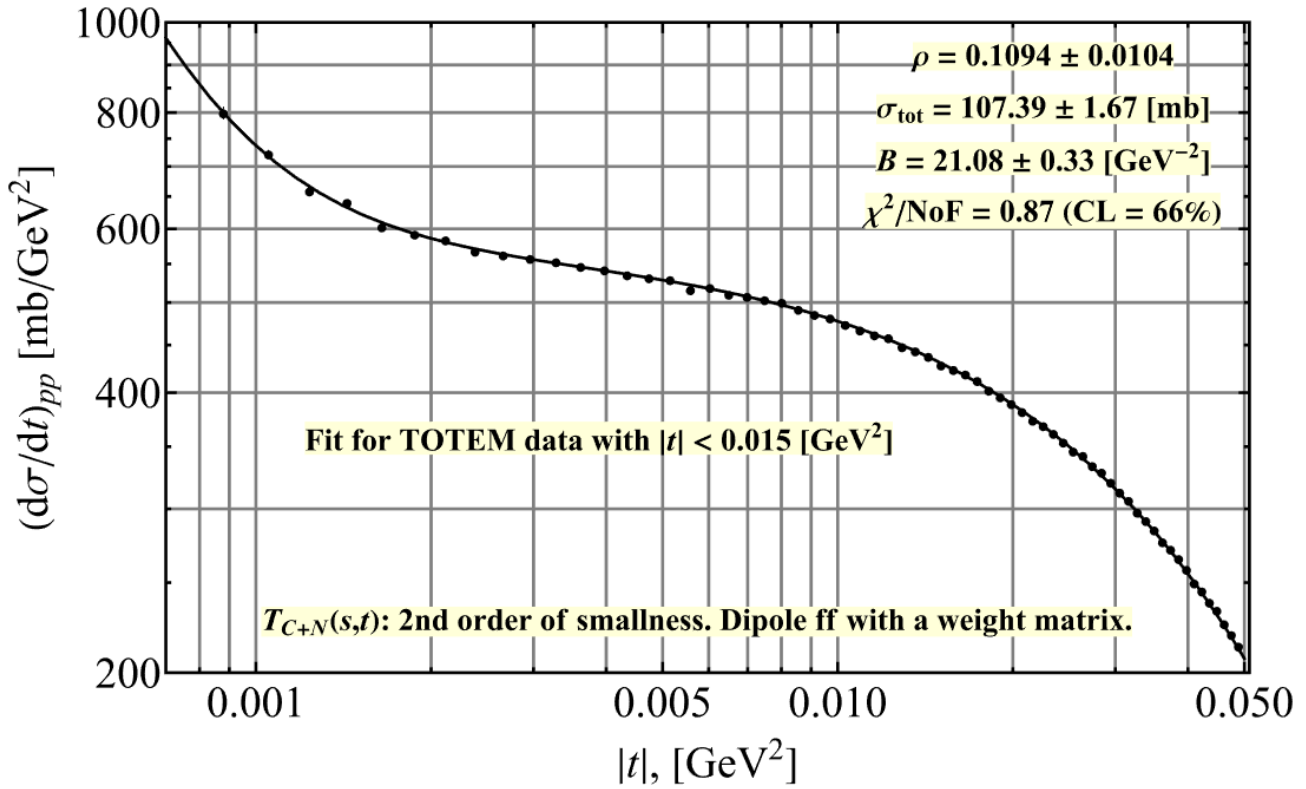


Рис. 11. Результаты фитирования экспериментальных данных при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ с  $|t| < t_0 = 0,015$  ГэВ<sup>2</sup>. Указаны только статистические ошибки (которые в данном масштабе практически неразличимы).

Здесь у нас есть только три точки со значением Pvalue > 0.9. Таким образом, у нас нет другого выбора, кроме как выбрать подгонку, соответствующую правой крайней точке с крестом. Как и прежде, мы наблюдаем в интервале  $0.01 < t_0 < 0.05$  ГэВ<sup>2</sup> стабильность параметров, извлеченных из фита, и по этой причине мы используем тот же метод выбора конкретной подгонки (хотя в этом случае у нас фактически нет выбора).

Извлекаемые параметры в этом случае имеют следующие значения:

$$\rho = 0.10 \pm 0.01, \quad \sigma_{\text{tot}} = 109.5 \pm 1.6 \text{ [mb]}, \quad B = 21.02 \pm 0.26 \text{ [ГэВ}^{-2}\text{]}.$$

Кривая с извлеченными параметрами фитирования идеально проходит по экспериментальным точкам, однако последние все смещены вниз с коэффициентом  $\lambda = 0.920005$  от своего центрального значения (тот факт что  $\lambda < 1$  означает сдвиг экспериментальных точек вниз).

## References

- [1] G. Antchev et al. TOTEM Collaboration.  
Eur.Phys.J. C79 (2019) no.9, 785,  
arXiv:1812.04732; CERN-EP-2017-335-v3.
- [2] E. Martynov and B. Nicolescu,  
EPJ Web Conf. 206 (2019) 06001.
- [3] <http://hermes.ihep.su:8001/compas/kuyanov/predictor/CS/Models/index.html>
- [4] V.A. Petrov,  
Eur.Phys.J.C 81 (2021) 670,  
e-Print: 2008.00990 [hep-ph].
- [5] V.A. Petrov and N.P. Tkachenko,  
e-Print :2201.06948 [hep-ph].
- [6] H. Bethe, Ann. Phys. 3 (1958) 190.
- [7] G.B. West and D. R. Yennie, Phys. Rev. 172, 1413(1968).
- [8] O.V. Selyugin,  
Phys. Rev. D 60 (1999) 074028;  
V. A. Petrov, E. Predazzi and A. Prokudin,  
Eur. Phys. J. C28 (2003) 525.
- [9] R. Cahn, Z. Phys. C15, 253 (1982);  
V. Kandr'at and M. Lokaj'icek, Z. Phys. C63, 619(1994).
- [10] V. A. Petrov,  
Theor. Math. Phys. 204, 896900 (2020),  
<https://doi.org/10.1134/S0040577920070041>.
- [11] A. Donnachie, P.V. Landshoff,  
e-Print: 2203.00290 [hep-ph].
- [12] V.A. Petrov,  
Eur.Phys.J. C78 (2018) no.3, 221;  
Erratum: Eur.Phys.J. C78 (2018) no.5, 414.
- [13] V. A. Petrov,  
Proc.Steklov Inst.Math. 309 (2020) 1, 219-224;  
e -Print:2001.06220 [hep-ph].
- [14] V. V. Ezhela, V.A. Petrov and N. P. Tkachenko,  
Phys.At.Nucl. 84 (2021) 3, 298-313.
- [15] I. M. Gel'fand and G.E. Shilov,  
Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations,  
AMS Chelsea Publishing: An Imprint of the American Mathematical Society, 1964.
- [16] R. Frhwirth, D. Neudecker and H. Leeb,  
EPJ Web of Conferences, 27 (2012)00008 .
- [17] V.V. Ezhela,  
Data Science Journal, Volume 6, Supplement, 13 October 2007, S 676-689;  
<https://datascience.codata.org/articles/abstract/492/>.
- [18] V.A. Petrov and V.A. Okorokov,  
Int.J.Mod.Phys.A 33 (2018) 13, 1850077,  
e-Print: 1802.01559 [hep-ph].
- [19] A. A. Godizov,  
Eur.Phys.J.C 82 (2022) 1, 56,  
e-Print: 2110.11895 [hep-ph];  
O.V. Selyugin,  
e-Print: 2201.02403 [hep-ph];  
M. Broilo, D.A. Fagundes, E.G.S. Luna, and M.Pel'aez,  
Phys. Rev. D 103 2021) 1, 014019,  
e-Print:2012.08664 [hep-ph] 014019;  
Atri Bhattacharya, Jean-Ren Cudell, Rami Oueslati, and Arno Vanthieghem,

- Phys. Rev. D 103(2021)5, L051502,  
e-Print:2012.07970 [hep-ph], L051502;  
A. Donnachie, P.V. Landshoff,  
Phys.Lett.B 798 (2019) 135008,  
e-Print:1904.11218 [hep-ph].
- [20] J.Procházka and V. Kundrať,  
Eur. Phys. J. C 80, (2020)779.
- [21] G. Antchev et al. TOTEM Collaboration,  
Eur. Phys. J. C 76, (2016) 661
- [22] K. Osterberg,  
Talk at the Low-x Workshop 2021 (Elba),  
e-Print: 2202.03724 [hep-ex].
- [23] J. Kašpar,  
Acta Phys.Polon.B 52 (2021) 2, 85-97,  
e-Print: 2001.10227 [hep-ph];
- [24] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik,  
Table of Integrals, Series, and Products. Seventh Edition.  
A. Jeffrey(ed.), D. Zwillinger (ed.)  
Academic Press as an imprint of Elsevier.  
ISBN-13: 978-0-12-373637-6, ISBN-10:0-12-373637-4.
- [25] G. Antchev et al. TOTEM Collaboration,  
Eur. Phys. J. C 79, (2019) 103.

## Оглавление

Введение .....	1
1. Точная формула .....	3
2. Дифференциальное сечение в $\mathcal{O}(\alpha^2)$ приближении.....	5
3. Обработки данных и извлечение параметров $\rho(s)$ , $\sigma_{\text{tot}}(s)$ и $B(s)$ из измерений TOTEM $d\sigma_{C+N}/dt$	7
Выводы и заключение .....	13
I.....	13
II.....	14
III.....	14
Благодарности.....	15
Приложение А. О разнице между $\alpha$ -разложениями точного выражения для $d\sigma_{C+N}/dt$ и приближением SKL .....	15
Приложение В. Точечные электрические заряды .....	18
Приложение С. Расширение в $\alpha$ : где остановиться? .....	21
Приложение D1. Критерий $\chi^2$ с использованием весовой матрицы.....	24
Приложение D2. Критерий $\chi^2$ с использованием ”метода сдвига экспериментальных данных” (вариант 1).....	25
Приложение D3. Критерий $\chi^2$ с использованием метода сдвига экспериментальных данных” (вариант 2).....	27
References.....	29

*Рукопись поступила 21 сентября 2022 г.*



В.А. Петров, Н.П. Ткаченко

Кулон-ядерная интерференция: теория и практика для  $pp$ -рассеяния  
при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ

Препринт отпечатан с оригинала-макета, подготовленного авторами.

---

Подписано к печати 26.09.2022                      Формат 60 x 84/16.    Цифровая печать.

Печ.л. 2,1.    Уч.- изд.л. 3.    Тираж 60.    Заказ 7.                      Индекс 3649.

---

НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ

142281, Московская область, г. Протвино, пл. Науки, 1

www.ihep.ru; библиотека <http://web.ihep.su/library/pubs/all-w.htm>

