



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова
Национального исследовательского центра
«Курчатовский институт»

Препринт 2022-8

И.А. Качаев, эксперимент ВЕС

Модифицированная амплитуда S-волнового $\pi\pi$ рассеяния для
многочастичного ПВА

Направлено в *Письма в ЖЭТФ*

Протвино 2022

Аннотация

И.А. Качаев. Модифицированная амплитуда S -волнового $\pi\pi$ рассеяния для многочастичного ПВА: Препринт НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ 2022-8. – Протвино, 2022. – 6 с., 2 рис., 2 табл.

Предложенная Ау, Морганом, Пеннингтоном (АМП) амплитуда S -волнового перерассеяния с изоспином $I = 0$ в каналах $\pi\pi$, KK удовлетворительно описывает известные на тот момент экспериментальные данные. Однако эта амплитуда имеет два недостатка, которые препятствуют её использованию в многочастичном парциально-волновом анализе (ПВА). А именно, узкий провал в районе порога открытия канала KK не наблюдается в многочастичных системах; поведение амплитуды при $M(\pi\pi) > 1.6 \text{ GeV}/c^2$ неестественно.

Мы предлагаем модифицированную амплитуду АМП (мАМП), предназначенную для единственной цели, а именно описания широкой части $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ S -волнового рассеяния в широком диапазоне $M(\pi\pi)$ в многочастичном ПВА. Амплитуда мАМП удовлетворительно описывает пороговые особенности $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ S -волнового рассеяния и широкую структуру при $M \sim 1400 \text{ MeV}/c^2$. Подразумевается, что узкие резонансы $f_0(980)$, $f_0(1500)$ вводятся в анализ дополнительно. Рассеяние $\pi\pi \rightarrow KK$ не описывается. Амплитуда мАМП имеет чисто феноменологический характер.

Abstract

Kachaev I.A. Modified S -wave $\pi\pi$ scattering amplitude for multiparticle PWA : NRC «Kurchatov Institute» – IHEP Preprint 2022-8. – Protvino, 2022. – p. 6, figs. 2, tables 2.

Suggested by Au, Morgan, Pennington (AMP) S -wave isospin $I = 0$ $\pi\pi$, KK scattering amplitude is good enough to describe experimental data for the moment. Still it has two disadvantages for use in multiparticle partial wave analysis (PWA), namely sharp drop at the KK threshold and unreasonable behavior at $M(\pi\pi) > 1.6 \text{ GeV}/c^2$. The drop is not seen in multiparticle systems.

We suggest the modified AMP amplitude, mAMP, for the only aim, namely to describe the broad part of S -wave $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ scattering in the wide $M(\pi\pi)$ range in multiparticle PWA. The mAMP amplitude reasonably well describes threshold behavior of the $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ scattering and the wide structure at $M \sim 1400 \text{ MeV}/c^2$. It is assumed that narrow objects $f_0(980)$, $f_0(1500)$ are included in PWA separately. It does not describe $\pi\pi \rightarrow KK$ scattering. The mAMP amplitude is purely phenomenological.

1. Введение

Для выполнения многочастичного ПВА необходимо знание двухчастичных амплитуд, изобар в терминологии ПВА. Для системы $\pi\pi$ в P , D , F волне двухчастичные амплитуды в основном описываются известными резонансами $\rho(770)$, $f_2(1270)$, $\rho_3(1690)$ и др. Однако в $\pi\pi$ S -волне ситуация более сложная. Кроме узких резонансов $f_0(980)$, $f_0(1500)$ здесь имеется широкая волна, включающая в себя по меньшей мере пороговые особенности, широкие $f_0(500)$, $f_0(1370)$, и, возможно, другие объекты. Амплитуда рассеяния в $\pi\pi$ S -волне подробно исследована в работе АМП [1]. В этой работе упор сделан на построение амплитуды перерассеяния в каналах $\pi\pi$, KK с корректной аналитичностью и унитарностью. Используются наилучшие на тот момент экспериментальные данные. Параметризация амплитуды представлена в виде, пригодном для дальнейшего использования.

При использовании параметризации АМП амплитуды $\pi\pi$ рассеяния в трехчастичном ПВА системы $\pi^-\pi^-\pi^+$ были обнаружены следующие проблемы. Параметризация АМП описывает S -волну в $\pi\pi$ системе как целое, во всем диапазоне $M(\pi\pi)$. Это имеет как физические, так и технические ограничения.

С точки зрения физики, амплитуды и фазы резонансов и фонового рассеяния в амплитуде АМП зафиксированы раз и навсегда. Авторы [1] использовали для описания рождения $\pi\pi$ системы так называемый подход P -вектора. В амплитуде АМП при $M(\pi\pi) \approx 1 \text{ GeV}/c^2$ есть нуль, обусловленный резонансом $f_0(980)$ и порогом в канале KK . Если этот нуль не наблюдается в многочастичной системе, он должен быть компенсирован полюсом в P -векторе. Это невозможно в многочастичном ПВА, если в нем связь $\pi\pi$ системы с каналом рождения описывается набором коэффициентов, как сделано в программе Иллинойс ПВА [2].

Технически, амплитуда АМП параметризована набором полюсов и фоном в виде полинома 4-й степени. Известно, что описание данных полиномом быстро теряет смысл за пределами области определения. Вследствие этого амплитуда АМП имеет нефизический максимум при $M(\pi\pi) > 1.6 \text{ GeV}/c^2$.

2. Метод K матрицы

Амплитуда АМП строится в формализме K -матрицы [3, 4]. Формально, амплитуда перехода из исходного состояния $|i\rangle$ в конечное состояние $|j\rangle$ $S_{ij} = \langle j|S|i\rangle$ есть унитарный оператор рассеяния, $SS^+ = S^+S = I$.

Однако гораздо проще работать с эрмитовыми матрицами, чем с унитарными. Построим эрмитову матрицу K , которая полностью определяет S . Если отделить случай отсутствия взаимодействия, можно определить оператор перехода T как

$$S = I + 2iT \quad (1)$$

где I есть единичный оператор, а фактор $2i$ введен для удобства. Из унитарности S для оператора перехода T имеем

$$T - T^+ = 2iT^+T = 2iTT^+ \quad (2)$$

Вводя обратный оператор T^{-1} , получаем

$$(T^+)^{-1} - T^{-1} = 2iI \quad \text{откуда} \quad (T^{-1} + iI)^+ = T^{-1} + iI \quad (3)$$

Отсюда видно, что являются эрмитовыми операторы K и M , вводимые по определению как

$$K^{-1} = T^{-1} + iI \quad \text{и} \quad M = K^{-1} \quad (4)$$

При наличии инвариантности относительно обращения времени операторы K и M не только эрмитовы, но и действительны и соответственно симметричны. Явное выражение для T есть

$$T = K(I - iK)^{-1} = (I - iK)^{-1}K \quad (5)$$

Введенная амплитуда T не является Лоренц инвариантной. Построим её в лоренц-инвариантном виде. Для распада системы с массой m на частицы с массами m_a, m_b фазовый объем есть $\rho = 2q/m$, где q распадный импульс:

$$\rho = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_a + m_b}{m}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{m_a - m_b}{m}\right)^2\right]} \quad (6)$$

Фазовый объем нормирован как $\rho \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$. Фазовый объем по определению считается диагональной матрицей, например в двухканальном случае

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Релятивистски инвариантная амплитуда \hat{T} определяется как

$$T_{ij} = \{\rho_i^*\}^{1/2} \hat{T}_{ij} \{\rho_j\}^{1/2} \quad (8)$$

или в матричной форме

$$T = \{\rho^+\}^{1/2} \hat{T} \{\rho\}^{1/2} \quad (9)$$

Ниже порога реакции фазовый объем становится комплексным, комплексное сопряжение в (8) требуется для аналитического продолжения в область ниже порога.

Отметим важное различие между T и \hat{T} . В одноканальном случае

$$S = e^{2i\delta}, \quad T = e^{i\delta} \sin \delta, \quad \hat{T} = \frac{1}{\rho} T \quad (10)$$

где δ есть известная фаза рассеяния. При любом δ амплитуда T заключена в круге с центром $(0, i/2)$ и радиусом $1/2$, зависимость $T(s)$ называют диаграммой Арганда. Амплитуда \hat{T} имеет другую нормировку и используется как амплитуда Далиц плота в программах ПВА. На пороге реакции в случае S -волнового рассеяния $T \rightarrow 0$, но $\hat{T} \rightarrow const$.

Теперь мы можем определить релятивистски инвариантную матрицу \hat{K} как

$$K = \{\rho^+\}^{1/2} \hat{K} \{\rho\}^{1/2} \quad (11)$$

Если выбрать \hat{K} действительной и симметричной, соответствующая K является эрмитовой, а S унитарной, даже если некоторые каналы находятся под порогом реакции. Из (4) имеем

$$\hat{K}^{-1} = \hat{T}^{-1} + i\rho \quad (12)$$

откуда в явном виде получаем

$$\hat{T} = \hat{K} (I - i\rho\hat{K})^{-1} = (I - i\hat{K}\rho) \hat{K} \quad (13)$$

3. Исходная амплитуда АМР

В [1] (3.18) для K -матрицы использована следующая параметризация, в виде суммы полюсов и параметризованного полиномом фона

$$K_{ij} = \frac{(s - s_0)}{4m_K^2} \sum_p \frac{f_i^p f_j^p}{(s_p - s)(s_p - s_0)} + \sum_{n=0} c_{ij}^n \left(\frac{s}{4m_K^2} - 1 \right)^n \quad (14)$$

По определению $m_K = 1/2(m_{K^+} + m_{K^0})$. Здесь s_0 есть известный нуль Адлера вблизи порога $\pi\pi$. Нами было обнаружено, что построенная по данной формуле амплитуда не совпадает с изображенными в [1] графиками. При указанных в статье параметрах с графиком совпадает амплитуда, построенная по формуле

$$K_{ij} = \frac{(s - s_0)}{4m_K^2} \left[\sum_p \frac{f_i^p f_j^p}{(s_p - s)(s_p - s_0)} + \sum_{n=0} c_{ij}^n \left(\frac{s}{4m_K^2} - 1 \right)^n \right] \quad (15)$$

Мы считаем, что именно формула (15) описывает исходную АМР амплитуду. Для M -матрицы аналогично имеем в [1] (3.20)

$$M_{ij} = \frac{a_{ij}}{(s - s_0)} + \sum_p \frac{f_i^p f_j^p}{(s_p - s)} + \sum_{n=0} c_{ij}^n \left[\frac{s}{4m_K^2} - 1 \right]^n \quad (16)$$

Мы считаем, что здесь имеется опечатка в знаке, и правильный вид исходной амплитуды M -решения следующий:

$$M_{ij} = \frac{a_{ij}}{(s - s_0)} - \sum_p \frac{f_i^p f_j^p}{(s_p - s)} + \sum_{n=0} c_{ij}^n \left[\frac{s}{4m_K^2} - 1 \right]^n \quad (17)$$

Отметим, что при $s \rightarrow \infty$ для M -решения параметры T -матрицы стремятся к нулю, а для K -решений — к унитарному пределу. Причина в том, что за пределами области определения полиномиальный фон стремится к бесконечности. Поведение M -решения мы считаем более физическим и используем далее его. Параметры исходной амплитуды M -решения, скопированные из [1], приведены в таблице 1:

s_0	s_1	f_1^1	f_2^1	a_{11}	a_{12}	a_{22}
-0.0074	0.9828	0.1968	-0.0154	0.1131	0.0150	-0.3216

c_{11}^0	c_{11}^1	c_{11}^2	c_{11}^3	c_{11}^4
0.0337	-0.3185	-0.0942	-0.5927	0.1957
c_{12}^0	c_{12}^1	c_{12}^2	c_{12}^3	c_{12}^4
-0.2826	0.0918	0.1669	-0.2082	-0.1386
c_{22}^0	c_{22}^1	c_{22}^2	c_{22}^3	c_{22}^4
0.3010	-0.5140	0.1176	0.5204	-0.3977

Таблица 1. Таблица коэффициентов исходной амплитуды АМР

s_0	s_1	f_1^1	f_2^1	a_{11}	a_{12}	a_{22}
-0.0074	0.9828	0	0	0.1131	0	-0.3216

c_{11}^0	c_{11}^1	c_{11}^2	c_{11}^3	c_{11}^4
0.0337	-0.3185	-0.0942	-0.5927	0
c_{12}^0	c_{12}^1	c_{12}^2	c_{12}^3	c_{12}^4
0	0	0	0	0
c_{22}^0	c_{22}^1	c_{22}^2	c_{22}^3	c_{22}^4
0.3010	-0.5140	0.1176	0.5204	0

Таблица 2. Таблица коэффициентов модифицированной амплитуды mAMР

4. Наши модификации

Нашей целью является построение амплитуды рассеяния $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, которая близка к исходной амплитуде АМП, является гладкой в области $M(\pi\pi) \approx 1 \text{ GeV}/c^2$ и ведет себя разумно при $M(\pi\pi) > 1.5 \text{ GeV}/c^2$. Гладкость в области $M(\pi\pi) \approx 1 \text{ GeV}/c^2$ мы обеспечиваем, установив в ноль связь систем $\pi\pi$ и KK , а так же установив в

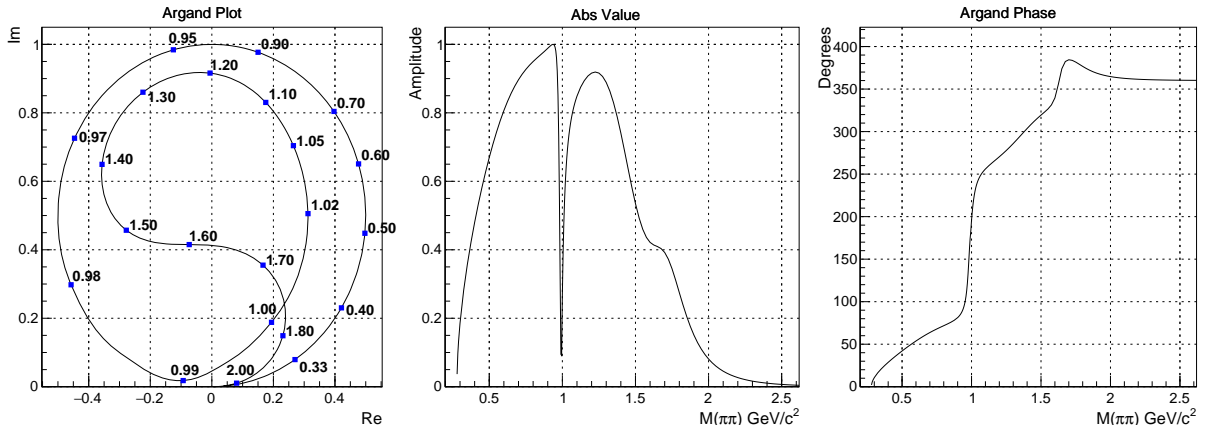


Рис. 1. Исходная амплитуда AMP

ноль связь с полюсом $f_0(975)$. Для подавления в исходной амплитуде нефизического пика при $M(\pi\pi) \sim 1.7 \text{ GeV}/c^2$ мы зануляем коэффициенты 4-й степени в полиноме фона. Параметры модифицированной амплитуды представлены в таблице 2. Исходная амплитуда изображена на рис. 1, модифицированная — на рис. 2. На рисунках представлено, слева направо: Арганд плот матричного элемента $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, его же амплитуда и фаза Арганда.

5. Результаты

Построена амплитуда mAMP, пригодная для описания $\pi\pi$ рассеяния в S -волне с $I = 0$ в многочастичном ПВА. Амплитуда пригодна только для канала $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$. Она является унитарной, гладкой в широком диапазоне $M(\pi\pi)$, близка к AMP М решению при $M(\pi\pi) < 1.6 \text{ GeV}/c^2$, за исключением области $M(\pi\pi) \approx 1 \text{ GeV}/c^2$, гладко стремится к нулю при $M(\pi\pi) \rightarrow \infty$. Она описывает пороговое поведение $\pi\pi$ рассея-

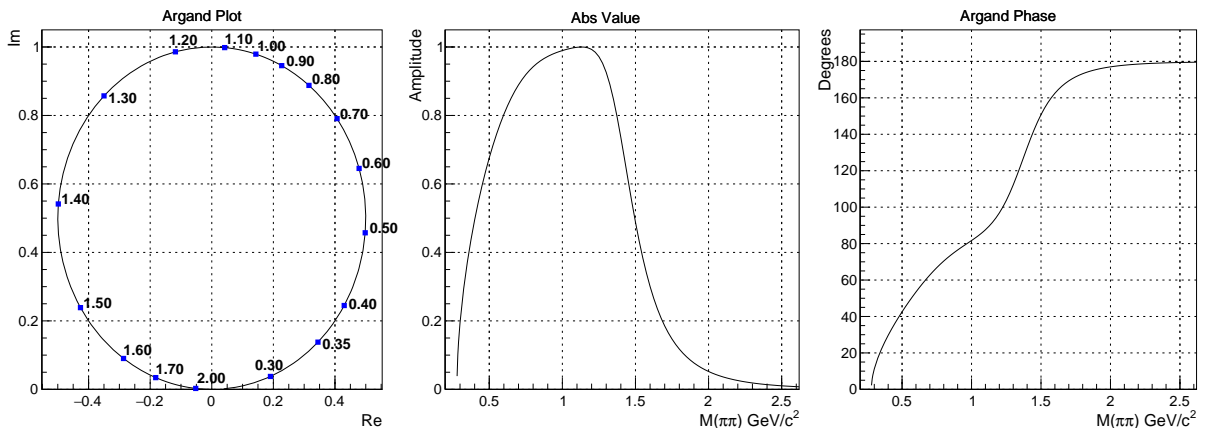


Рис. 2. Модифицированная амплитуда mAMP

ния и широкую структуру в области $M \sim 1400 \text{ MeV}/c^2$ в соответствии с данными, известными на момент написания [1]. Узкие резонансы $f_0(980)$, $f_0(1500)$ преднамеренно не описываются, их следует вводить в анализ отдельно. Амплитуда строится по формуле (17) с коэффициентами из таблицы 2. Данная амплитуда была применена в [5, 6] и других работах группы ВЕС, а также в [7]. Ранняя версия амплитуды использована в [8].

Автор благодарит членов группы ВЕС за инициирование данной работы, полезные дискуссии и использование данной амплитуды в анализе.

Список литературы

- [1] K.L. Au, D. Morgan, M.R. Pennington, Meson dynamics beyond the quark model: Study of final-state interactions. Phys. Rev. **D35** 1633 (1987)
- [2] J.D. Hansen et al., Formalism and assumptions involved in partial wave analysis of three-meson systems. Nucl. Phys. **B81** 403 (1974).
- [3] S.U. Chung and E. Klempt, A Primer on K -matrix Formalism. BNL preprint Uni-Mainz IP-92-03, (1995)
- [4] Chung, S.U., Brose, J., Hackmann, R., Klempt, E., Spanier, S. and Strassburger, C. (1995), Partial wave analysis in K-matrix formalism. Ann. Phys., 507, pp 404-430. doi:10.1002/andp.19955070504
- [5] D.I. Amelin et al., Study of resonance production in diffractive reaction $\pi^- A \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^-$, Phys. Lett. B 356 (1995), 595.
- [6] I.A. Kachaev, D.I. Ryabchikov, High spin resonances produced in $\pi^+ \pi^- \pi^-$ and $\pi^- \pi^0 \pi^0$ systems at VES setup, MESON 2018, EPJ Web Conf. 199 (2019) 02025
- [7] C. Adolph et al., Resonance production and $\pi\pi$ S-wave in $\pi^- P \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ P_{recoil}$ at 190 GeV/c, Phys. Rev. D 95, 032004 (2017)
- [8] S.U. Chung et al., Exotic and $q\bar{q}$ resonances in the $\pi^+ \pi^- \pi^-$ system produced in $\pi^- p$ collisions at 18 GeV/c, Phys. Rev. D 65, 072001 (2002)

Рукопись поступила 30 сентября 2022 г.

Препринт отпечатан с оригинала-макета, подготовленного авторами.

Качаев И.А., эксперимент ВЕС
Модифицированная амплитуда S -волнового $\pi\pi$ рассеяния для многочастичного
ПВА.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **L^AT_EX**.

Подписано к печати 03.10.2022 Формат 60 × 84/16. Цифровая печать.
Печ.л. 0,6. Уч.-изд.л. 0,8. Тираж 60. Заказ 8. Индекс 3649.

НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ
142281, Московская область, г. Протвино, пл. Науки, 1

www.ihep.ru; библиотека <http://web.ihep.su/library/pubs/all-w.htm>

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2022–8,
НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ, 2022
