



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
«КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ»

Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова  
Национального исследовательского центра  
«Курчатовский институт»

Препринт 2023-18

А.М. Крутов, В.А. Маишеев

**Уменьшение многократного рассеяния  
положительно заряженных ультрарелятивистских  
частиц, каналирующих в плоскостных полях  
монокристаллов**

Протвино 2023

### **Аннотация**

Крутов А.М., Маишеев В.А. Уменьшение многократного рассеяния положительно заряженных ультрарелятивистских частиц, каналирующих в плоскостных полях монокристаллов: Препринт НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ 2023-18. – Протвино, 2023. – 10 с., 5 рис.

На основе теории многократного рассеяния положительно заряженных частиц, каналирующих в плоскостях монокристалла кремния, выполнены расчеты среднеквадратичного угла рассеяния частиц в диапазоне импульсов 100 — 7000 ГэВ/с. Показано, что результаты этих расчетов можно представить в едином виде с помощью найденной универсальной функции. Показано, что имеется хорошее согласие этой функции с экспериментальными данными. В целом полученные результаты дают простое и наглядное описание рассматриваемого процесса рассеяния.

### **Abstract**

Krutov A.M., Maishev V.A. Reduction of multiple scattering of positively charged ultra relativistic particles channeling in planar fields of single crystals: NRC «Kurchatov Institute» – IHEP Preprint 2023-18. – Protvino, 2023. – p. 10, figs. 5.

Based on the theory of multiple scattering of positively charged particles channeling in the planes of a single crystal of silicon, calculations have been made of the rms angle of scattering for particles in the range of momenta 100 -7000 GeV/c. We show that these calculation results can be represented in a unified way using the found universal function. It was shown that there is a good agreement of this function with the experimental data. In general, the obtained results give a simple and clear description of the scattering process under consideration.

## 1. Введение

Несколько лет назад в ЦЕРНе был обнаружен и экспериментально изучен интересный эффект уменьшения многократного рассеяния положительно заряженных частиц при плоскостном каналировании в изогнутых кристаллах кремния [1, 2, 3]. В экспериментах было показано, что уменьшение среднеквадратичного угла многократного рассеяния происходит в плоскости, перпендикулярной плоскости изгиба кристалла, и меньше примерно в 8 раз по сравнению с аналогичным углом при той же толщине кристалла для неканалированных частиц.

Наблюдаемый эффект можно отнести к большой группе явлений, сопровождающих каналирование частиц в кристаллах. К таким явлениям относятся резерфордское рассеяние, процессы потери энергии, вторичная электронная эмиссия, ядерные реакции, образование рентгеновских и  $\gamma$ -лучей. Поперечные сечения этих процессов зависят от прицельных параметров частиц участвующих в столкновениях с отдельными атомами мишени. Характерной общей чертой таких процессов является подавление вероятности многократного кулоновского рассеяния по сравнению с неканалирующими частицами. Важно отметить, что количественное описание таких процессов носит конкретный характер, т. е. не существует универсальных соотношений для их единого математического представления. Описание многих из этих процессов можно найти в литературе [4, 5, 6, 7, 8].

Кроме того, некоторые простые объяснения наблюдаемого эффекта можно найти в [3]. В статье предлагается объяснение этого явления как результат двух конкурирующих процессов деканалирования и рассеяния.

На основе предложенной теории [9] были рассчитаны среднеквадратичные углы многократного рассеяния частиц при каналировании в плоскости кремния (111) для экспериментальных условий, выполненных при импульсах частиц, равных 400 и 180 ГэВ/с. Результаты расчетов оказались в хорошем согласии с измерениями. Полученные теоретические соотношения непросты и для расчетов с одним заданным импульсом и толщиной кристалла порядка 10 см требуется около нескольких часов на

ноутбуке. В данной работе на основе сложного теоретического представления о процессе многократного рассеяния положительно заряженных релятивистских частиц каналирующих в кристаллах находится очень простое описание этого процесса в диапазоне импульсов частиц от 100 до 7000 ГэВ/с и кристаллических толщина до  $\sim 10$  см.

## 2. Об общей теории

До сих пор расчеты многократного рассеяния при каналировании были сделаны для импульсов частиц 180 и 400 ГэВ/с. Здесь будут рассчитаны среднеквадратичные углы многократного рассеяния в более широком диапазоне импульсов. Для этих целей воспользуемся теорией из статьи [9].

Теория процесса строится в основном на следующих положениях: 1) используется упрощенное рассмотрение процесса многократного рассеяния частиц на атомах [10], а именно предполагаем, что заряженные частицы рассеиваются только в экранированном потенциале атома когда они находятся вблизи центра атома (на расстоянии менее  $b_{max} = 137^2 r_e Z^{-1/3}$ , где  $r_e$  — классический радиус электрона, а  $Z$  — порядковый номер атома. 2) предполагается, что каналирующая частица совершает гармонические колебательные движения в поперечной плоскости изгиба кристалла. При таком движении частица рассеивается только тогда, когда приближается достаточно близко к атомному центру. 3) используем в расчетах математическую модель процесса [9], позволяющую рассчитать функцию распределения частиц по амплитудам колебаний при различной толщине кристалла. Согласно теории [9] среднеквадратичный угол многократного рассеяния на толщине кристалла  $L$  равен:

$$\sigma_s^2(L) = \frac{4\pi N_a Z^2 e^4}{p^2 c^2} \int_0^L \int_0^{\xi_{max}} \frac{dN}{d\xi}(\xi, l) F_m(\xi) d\xi dl, \quad (1)$$

где  $\frac{dN}{d\xi}$  — функция распределения по относительной амплитуде колебаний  $\xi = 2x_m/d$   $x_m$ ,  $d$  — амплитуда колебаний и межплоскостное расстояние,  $e$  — заряд электрона,  $p$  — импульс частицы,  $c$  — скорость света,  $N_a = 8.35 \frac{g}{a^3}$  ( $a$  — сторона кристаллической ячейки). Функция  $F_m(\xi)$  учитывает вероятность взаимодействия с атомным центром. Для амплитуд, меньших  $d/2 - b_{max}$ , эта функция равна 0.

$$F_m(x_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left\{ \frac{d/2 - x_m |\sin t|}{b_{max}} \right\} \tau(x_m |\sin t| - d/2 + b_{max}) dt + J_1(x_m) J_2(x_m) \ln((x_m - d/2 + R_A)/b_{min}), \quad (2)$$

$$J_1(x_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t| \tau(x_m |\sin t| - d/2 + R_A) dt, \quad (3)$$

$$J_2(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_T} \int_{x_m - d/2 + R_A}^{R_A} \exp -x^2/(2\sigma_T^2) dx, \quad (4)$$

где  $\sigma_T$  — среднеквадратичная амплитуда тепловых колебаний,  $R_A \approx (2.5 - 3)\sigma_T < b_{max}$ .

В данной статье внесены следующие изменения по сравнению с работой [9]: 1) была изменена функция  $F_m(x_m)$ , а именно добавлено слагаемое, учитывающее, что атомные центры распределены по нормальному закону вблизи расстояния  $d/2$  от центра плоского канала, что соответствует учету теплового движения атомов. В конкретных расчетах это увеличило результат в среднем на 25 процентов. 2) Использован потенциал Мольера, который был рассчитан в соответствии со статьей [11]. По сравнению с ранее использованным потенциалом, полученным в результате рентгеновских измерений, он лучше описывает результаты имеющихся экспериментальных результатов.

На рис. 1 показаны результаты сравнения наших расчетов с результатами измерений. Видно, что расчеты по усовершенствованной программе и потенциалу Мольера хорошо согласуются с измерениями. Экспериментальные результаты были получены для радиусов изгиба кристаллов 220 и 63 метра соответственно для импульсов 180 и 400 ГэВ/с. Также представлены результаты расчетов для радиусов меньших, чем в эксперименте и для очень больших (порядка 10000 м). Видно, что рассчитанные углы многократного рассеяния незначительно различаются для разных радиусов. Поэтому ниже будут приведены расчеты, выполненные для очень больших радиусов (фактически бесконечных). Такие кристаллы практически не отличаются от прямых (неизогнутых) кристаллов. Следует отметить, что в ходе экспериментов наличие кривизны кристалла является важным фактором, поскольку при измерениях позволяет разделить фракции каналирования и деканалирования.

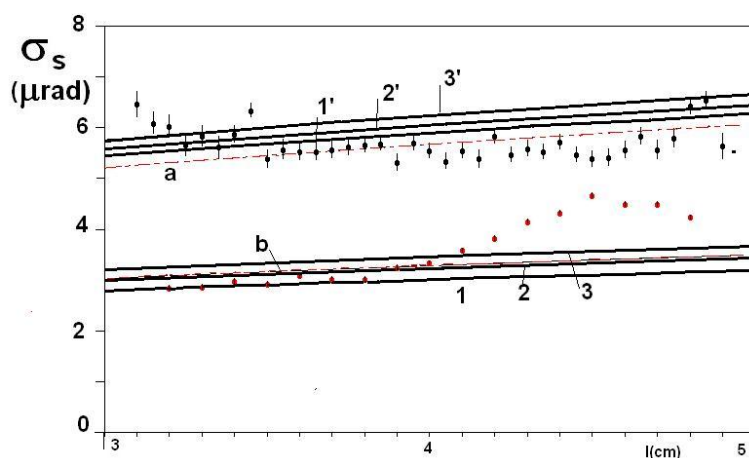


Рис. 1. Расчеты среднеквадратичного угла многократного рассеяния положительно заряженных частиц, каналирующих в плоскостях (111) монокристалла кремния. Кривые 1, 2, 3 рассчитаны для частиц с энергией 400 ГэВ/с и радиусами изгиба  $\infty$ , 63 и 30 метров соответственно. Кривые 1', 2', 3' рассчитаны для частиц с энергией 180 ГэВ/с и радиусами изгиба  $\infty$ , 220 и 63 метра соответственно. Пунктирные линии а и б и экспериментальные точки взяты из работы [3].

### 3. Расчеты для различных импульсов

Для понимания и изучения процесса многократного рассеяния при планарном каналировании релятивистских частиц рассчитан среднеквадратичный угол в широком диапазоне импульсов частиц от 100 до 7000 ГэВ/с. Как уже говорилось, для расчетов выбрано практически бесконечный радиус изгиба. Также выбрано максимальную толщину кристаллов, равную 12 см. В расчетах рассчитано изменение амплитудной функции распределения частиц на сравнительно небольшой толщине, равной в нашем случае 0,1 мм. Исходные функции распределения (как по поперечной энергии, так и по амплитуде колебаний) находились в предположении, что пучок на входе в кристалл равномерно распределен по координате и по углу входа.

На рис. 2 представлены результаты расчетов для широкого диапазона импульсов частиц и толщины кристалла от 0 до 12 см. Полезно сравнить полученные результаты с процессом многократного рассеяния частиц в аморфной среде.

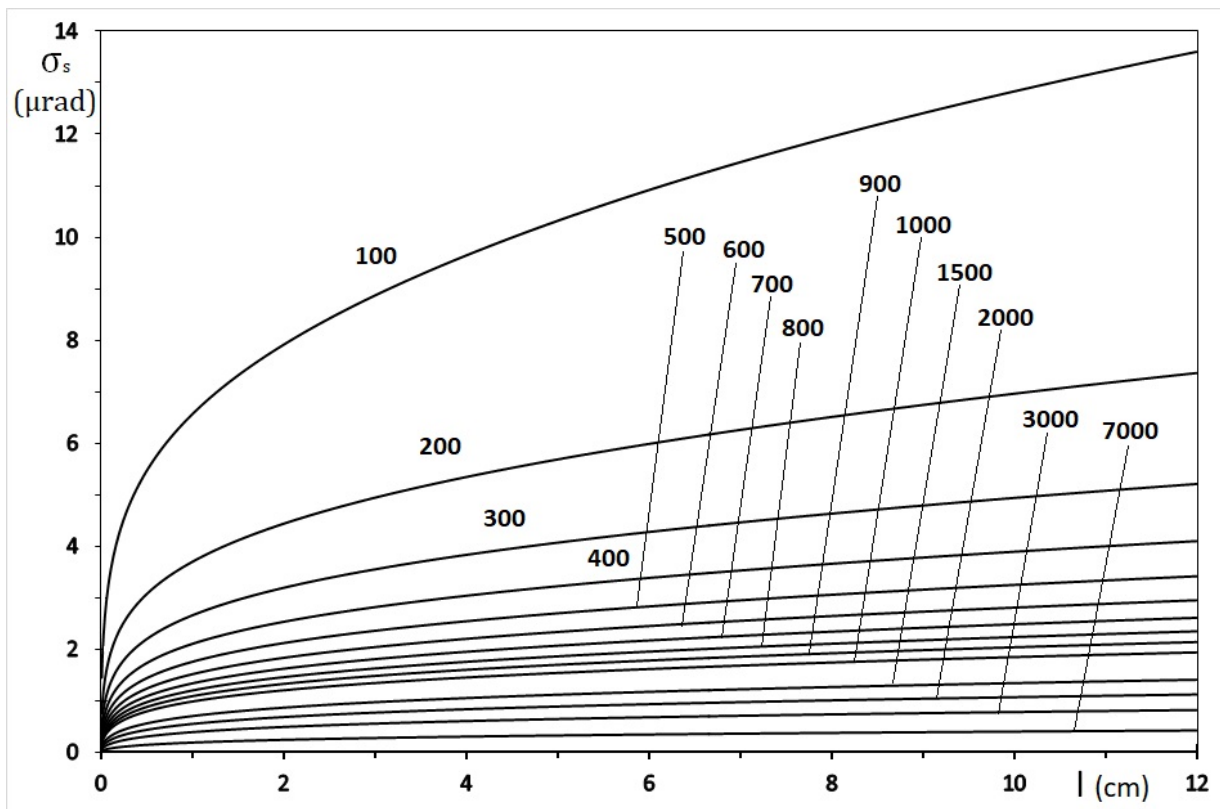


Рис. 2. Расчеты среднеквадратичного угла многократного рассеяния положительно заряженных частиц с разными импульсами (числа возле кривых в ГэВ/с), каналирующих в плоскостях (111) монокристалла кремния.

Теория многократного рассеяния заряженных частиц в аморфных средах рассматривалась во многих статьях. С практической точки зрения можно сослаться

на рекомендацию DataParticleGroup [12] использовать гауссову аппроксимацию для центральных 98% прогнозируемого углового распределения со среднеквадратичным значением, равным

$$\sigma_0 = \frac{13.6[MeV]}{\beta c p} \sqrt{l/X_0 [1 + 0.038 \ln(l/X_0)]}, \quad (5)$$

где  $p$  и  $\beta c$  — импульс и скорость падающей частицы,  $c$  — скорость света,  $l, X_0$  — толщина рассеивающей аморфной среды и ее радиационная длина. Среднеквадратичный угол в этом уравнении соответствует распределению Мольера для однозарядных частиц с  $\beta = 1$  для всех  $Z$  и имеет точность 11% или лучше для  $10^{-3} < l/X_0 < 100$ .

В работе [3] представлены результаты измерений среднеквадратичного угла многократного рассеяния положительно заряженных неканализированных частиц, движущихся в монокристалле кремния:

$$\sigma_n^2 = \left[ \frac{\varepsilon}{\beta c p} \right]^2 \frac{l}{X_0} [1 + \omega \ln(l/X_0)]^2, \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  и  $\omega$  — свободные параметры аппроксимации. Наилучшее соответствие — для  $\varepsilon = 13.35$  МэВ и  $\omega = 0.063$ .

Из уравнений (5)-(6) следует, что среднеквадратичный угол рассеяния неканализирующихся частиц (движущихся в аморфных или кристаллических средах) обратно пропорционален их энергии  $E$ . В работе [3] утверждается, что для положительно заряженных частиц в планарном каналлировании, обратный закон пропорциональности нарушается. Результаты, представленные на рис. 2, также демонстрируют это нарушение. В той же работе показано, что возможно, что угол рассеяния имеет вид  $\sim 1/E^h$ , где коэффициент  $h$  равен  $\approx 0.76 \pm 0.04$  по измерениям и  $\approx 0.070 \pm 0.01$  по теории.

Далее возьмем функцию  $\mathcal{K}(p) = p^h \sigma_s$  и найдем коэффициент  $h$ , при котором кривые рис. 2 наиболее близки друг к другу. На рис. 3 показано семейство функций  $\mathcal{K}(E)$  при различных энергиях и для  $h = 0.81$ . Видно, что при импульсах частиц в диапазоне от 200 до 7000 ГэВ/с кривые практически совпадают. Заметная разница наблюдается почти для всех длин кристаллов только для импульсов 50 и 100 ГэВ/с.

Если не учитывать медленно меняющийся логарифмический член в уравнениях (5)-(6), то можно считать, что угол  $\sigma_s^2$  пропорционален толщине кристалла. Давайте посмотрим на функцию

$$\mathcal{M}(p, l) = (\sigma_s(p, l) p^h)^w. \quad (7)$$

Тогда можно выбрать параметр  $w$  так, чтобы функция  $\mathcal{M}(p, l)$  была близка к пропорциональной в зависимости от толщины кристалла  $l$ .

Рис. 4 иллюстрирует семейство функций  $\mathcal{M}(p, l)$  для разных энергий. Наилучшее значение параметра  $w = 3.73$ . Видно, что в диапазоне 200 - 2000 ГэВ/с семейство функций примерно представляет пропорциональную зависимость от толщины кристалла, и все кривые практически совпадают друг с другом. Кривые 50, 100, 3000 и 7000 немного отличаются от большинства уже упомянутых кривых.

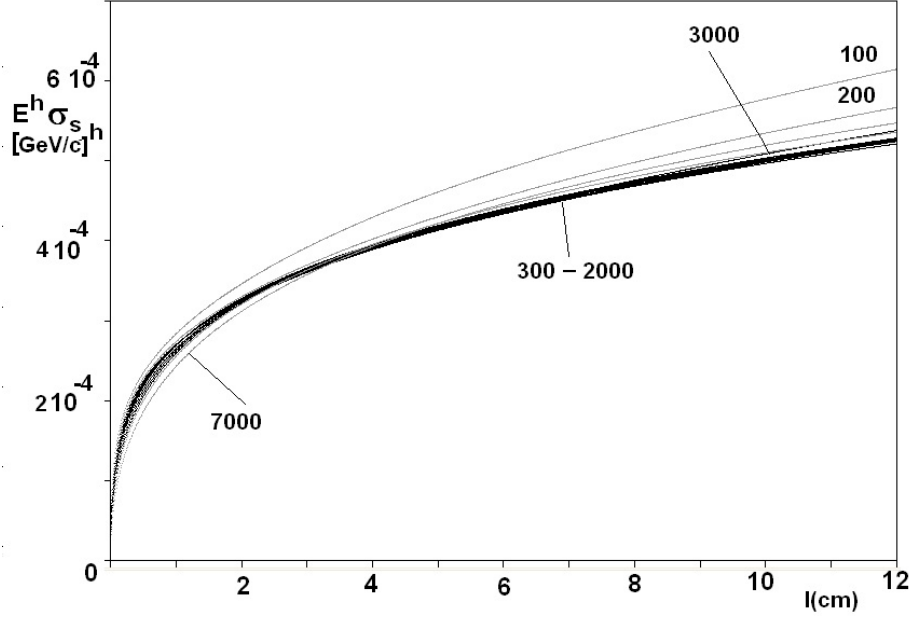


Рис. 3. Семейство функций  $\mathcal{K}(E, l)$  в диапазоне импульсов частиц 100–7000 ГэВ/с (цифры возле кривых в ГэВ/с).  $h = 0.81$ .

Таким образом, можно записать приближенное равенство

$$\mathcal{M}(p, l) = (\sigma_s(p, l)p^h)^w \approx C(p)l, \quad (8)$$

где  $C(p)$  это постоянный коэффициент, практически не зависящий от импульса частицы (в диапазоне 200–2000 ГэВ/с). Отсюда получаем приближенную зависимость среднеквадратичного угла многократного рассеяния положительно заряженных частиц при каналировании в плоскости (111) монокристалла кремния.

$$\sigma_s(p, l) = \frac{\mathcal{M}(p, l)^{1/w}}{p^h} \approx \frac{(Cl)^{1/w}}{p^h} \quad (9)$$

Рис. 4 иллюстрирует поведение функции  $\mathcal{M}(p, l)$  для параметров  $w = 3.73$  и  $h = 0.81$ . Для параметра  $C(p)$  можно написать

$$C(p) = \frac{\sigma_s^w p^{hw}}{l}. \quad (10)$$

На рис. 5 показан расчет параметра  $C(p)$  в зависимости от толщины для различных энергий частиц. Видно, что этот параметр для частиц в диапазоне энергий 300–2000 ГэВ и толщин более нескольких миллиметров около такой же. Было обнаружено, что можно положить  $C(p) = (4.95 \pm 0.2)10^{-14}(GeV/c)^{hw}/cm$  для указанного диапазона энергий и толщин более 1 см. Этот результат справедлив для  $h = 0.81$  и  $w = 3.73$ ,



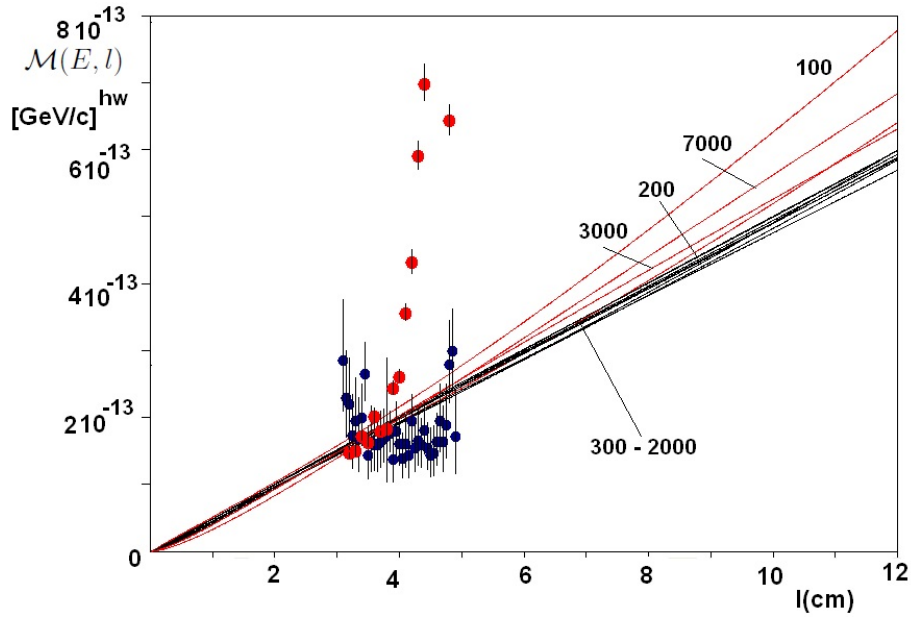


Рис. 4. Семейство функций  $\mathcal{M}(E, l)$  (при  $h = 0.81, w = 3.73$ ) в диапазоне импульсов частиц 100–7000 ГэВ/с (цифры возле кривых в ГэВ/с). Красные и синие кружки (цвета в онлайн версии) взяты из экспериментов на пучках с энергией 400 и 180 ГэВ/с соответственно.

Полученные результаты дают достаточно простое количественное описание процесса многократного рассеяния положительно заряженных частиц с импульсами в диапазоне (200 — 7000) ГэВ/с при каналировании в плоскостях (111) монокристалла кремния. Точность расчета функций по приближенному уравнению (9) лучше одного процента по сравнению с общей теорией для импульсов более 200 и до 2000 ГэВ/с и толщин кристаллов более нескольких миллиметров.

На рис. 4 показано сравнение результатов расчетов и измерений универсальной функции  $\mathcal{M}(p, l)$ . Измерения проводились на пучках положительно заряженных частиц с импульсами 180 и 400 ГэВ/с для толщин кристаллов кремния от 3 до 5 см. На основе теории показано, что в широком диапазоне энергий частиц функция, определяемая уравнением  $\mathcal{M}(p, l)$  (см. уравнения (7)-(8)) пропорциональна толщине кристалла и практически не зависит от энергии. Кроме того, необходимо выполнить условие  $h = 0.81, w = 3.73$ . Обратите внимание, что результаты измерений для 400 ГэВ представляют собой множество красных крупных точек из 17 элементов. Из рис. 4 видно, что первые 10 точек расположены вблизи теоретической кривой, а остальные 7 точек сильно отличаются от ожидаемых. Также на рис. 1 видно, что измеренные последние 7 точек расположены вдоль дуги. Этот факт также отмечен в работе [3]. Соглашаясь с авторами данной статьи, что такое поведение экспериментальных данных можно объяснить наличием возможных микродефектов (микроцарапин и т.п.) на обеих боковых поверхностях монокристалла.

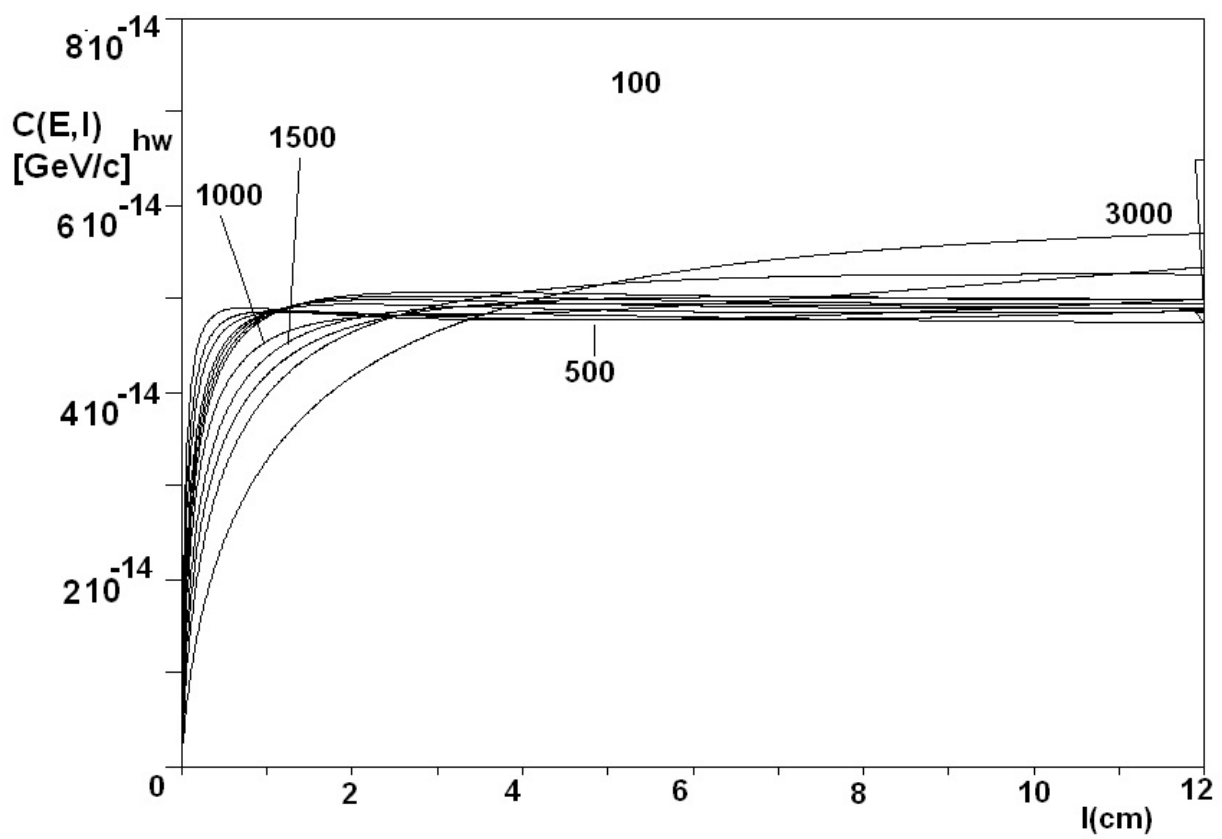


Рис. 5. Об определении константы  $C$  (см. текст).

## 4. Дискуссия

В данной работе проведено численное исследование аналитической модели многократного рассеяния положительно заряженных частиц, каналирующихся в плоскостях (111) монокристалла кремния. Обнаружено, что существует достаточно простая функция  $\mathcal{M}(E, l)$  (см. уравнение (7)). Было показано, как, зная эту функцию, можно приближенно рассчитать среднеквадратичный угол многократного рассеяния для частицы с импульсом  $P$ . Однако обнаружено, что это справедливо, когда импульс частицы принадлежит диапазону 100 - 7000 ГэВ/с (200—2000 ГэВ/с с точностью лучше 1 процента). Функция  $\mathcal{M}(E, l)$  определяется двумя параметрами  $h$  и  $w$ . Обнаружено, что  $h = 0.81$  и  $w = 3.73$ . Если пренебречь логарифмическим членом (см. уравнение), то для аморфного вещества также существует функция  $\mathcal{M}(E, l)$ , но для нее  $h = 1$  и  $w = 2$ .

Процессы многократного рассеяния частиц в аморфных средах и при планарном каналировании в кристаллах имеют общую природу – кулоновское рассеяние на ядрах. Однако при каналировании рассматриваемый процесс имеет особенности. Таким образом, по мере распространения пучка частиц в кристалле его интенсивность уменьшается за счет диффузионных процессов (деканалирования). При этом из режима каналирования исключаются частицы с наибольшей поперечной энергией. Другая особенность состоит в том, что рассеяние возможно только при движении частиц вблизи ядер. Эти особенности и приводят к уменьшению многократного рассеяния при планарном каналировании. Имеющиеся экспериментальные данные, полученные при импульсах 180 и 400 ГэВ/с, подтверждают существование универсальной функции  $\mathcal{M}(E, l)$  (см. рис. 4).

Кроме того, уравнение (9) можно представить в виде

$$\sigma_s(p, l) \approx \frac{(Cl)^{1/w}}{p^h} = \left[ \frac{(CX_0)^{1/(wh)}}{p} \right]^h (l/X_0)^{1/w} = \left[ \frac{m_s}{p} \right]^h (l/X_0)^{1/w}, \quad (11)$$

где  $m_s = (CX_0)^{1/(wh)} \approx 0.083/\text{МэВ/с}$  – размерная константа, имеющая тот же смысл, что и константа, равная 13,6 МэВ в уравнении (5).

В данной статье каналирование рассматривалось только в плоскостях (111) кремния. Предполагается, что наши исследования можно применить к другим плоскостям и другим монокристаллам. Кроме того, наше исследование указывает на возможность строгого математического упрощения теоретического подхода, предложенного в статье [9].

## 5. Заключение

Расчеты многократного рассеяния при каналировании положительно заряженных частиц, выполненные с использованием аналитической теории в широком диапазоне импульсов частиц, позволяют по-новому взглянуть на этот процесс и дают простое и ясное его описание.

## Список литературы

- [1] W. Scandale *et al.*, “Reduction of multiple scattering of high-energy positively charged particles during channeling in single crystals,” *Eur. Phys. J. C* **79** (2019) no.12, 993. doi:10.1140/epjc/s10052-019-7515-8 [arXiv:1910.00250 [physics.acc-ph]].
- [2] W. Scandale *et al.*, “Observation of strong reduction of multiple scattering for channeled particles in bent crystals,” *Phys. Lett. B* **804** (2020) 135396. doi:10.1016/j.physletb.2020.135396.
- [3] W. Scandale *et al.*, Multiple scattering of channeled and non-channeled positively charged particles in bent monocrystalline silicon *Eur. Phys.J. Plus* (2022) 137.811.
- [4] J. Lindhard, Influence of crystal lattice on motion of energetic charged particles., *Kgl. Dan. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd.*, 34: No. 14, 64p., 1965.
- [5] V.N. Baier, V.M. Katkov, and V. M. Strakhovenko, *Electromagnetic Processes at High Energies in Oriented Single Crystals*, World Scientific, Singapore, 1998.
- [6] D.S. Gemmell. "Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals". *Rev. Mod. Phys.* 46 (1): 129, (1974).
- [7] Y.H. Ohtsuki *Charged Beam Interaction with Solids.*, Taylor Francis Ltd. London and New York, 1983.
- [8] V.M. Biryukov, Yu.A. Chesnokov, and V. I. Kotov, *Crystal channeling and its application at high-energy accelerators* (Springer, Berlin, 1997), p. 219.
- [9] Ya.A. Chesnokov, V.A. Maishev Study of reduction of multiple scattering of positively charged particles during channeling in (111) crystallographic silicon planes *Nucl. Instr. Meth. B* **486** (2021) 11.
- [10] B. Rossi and K. Greisen, *Cosmic Ray Theory*, *Reviews of Modern Physics*, **14**, 240 (1941).
- [11] E. Bagli, V. Guidi and V.A. Maishev Calculation of the potential for interaction particles with complex atomic structures *Phys. Rev. E* 81, 026708 (2010).
- [12] Beringer, et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* 86 (2012) 010001.

*Рукопись поступила 23 ноября 2023 г.*

Препринт отпечатан с оригинала-макета, подготовленного авторами.

Крутов А.М. Маишеев В.А.

Уменьшение многократного рассеяния положительно заряженных ультрарелятивистских частиц, каналирующих в плоскостных полях монокристаллов.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**.

---

Подписано к печати 28.11.2023 Формат 60 × 84/16. Цифровая печать.  
Печ.л. 0,9. Уч.-изд.л. 1,2. Тираж 60. Заказ 21. Индекс 3649.

---

НИИ «Курчатовский институт» – ИФВЭ  
142281, Московская область, г. Протвино, пл. Науки, 1

[www.ihep.ru](http://www.ihep.ru); библиотека <http://web.ihep.su/library/pubs/all-w.htm>

Индекс 3649

---

П Р Е П Р И Н Т 2023–18,  
НИЦ «Курчатовский институт» – ИФВЭ, 2023

---